

Вычисление коэффициентов интенсивности напряжений на основе интегральных характеристик раскрытия поверхностей трещин нормального отрыва

П. П. Ворошко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предлагается способ вычисления коэффициентов интенсивности напряжений по моментам узловых перемещений поверхностей трещин, определяемых методом конечных элементов для тел с трещинами. Используется разложение функции раскрытия поверхностей трещин функциями Чебышева, асимптотическое поведение которых у фронта трещины соответствует положениям линейной механики разрушения. Приводятся результаты вычисления коэффициентов интенсивности напряжений для тестовых задач, имеющих аналитическое решение. Определение перемещений поверхностей трещин проводилось средствами пакета 3-D SPACE, реализующего смешанную вариационную схему метода конечных элементов в перемещениях и деформациях краевых задач термоупругости.

Ключевые слова: коэффициент интенсивности напряжений, прямой метод, плоские трещины, метод конечных элементов, смешанная схема, напряженно-деформированное состояние.

Для вычисления коэффициентов интенсивности напряжений K_I по результатам расчета методом конечных элементов (МКЭ) напряженно-деформированного состояния (НДС) тел с трещинами применяются различные подходы. При реализации МКЭ используется, в зависимости от конкретных особенностей расчетных схем объектов современной техники (неоднородность, сложная структура геометрии, смешанные краевые условия и т.п.), информация о НДС в виде дискретных полей МКЭ перемещений, деформаций и напряжений. Универсальные рекомендации для использования этой информации в рамках технологии и операционного наполнения МКЭ для вычисления K_I отсутствуют. Так, в экспертном исследовании теоретических аспектов определения параметров механики разрушения средствами пакета ABAQUS [1] и их реализации для практического применения указывается, что такие рекомендации в ближайшее время вряд ли будут разработаны. Если же кроме выбора метода вычисления K_I необходимо построить трехмерную геометрическую модель, адекватно отображающую стремление к квазирегулярной дискретизации области конечными элементами, трудности вычислительного характера возрастают.

В инженерной практике широко применяются метод J -интеграла и метод весовых функций (МВФ). В последнем используется информация о поверхностных напряжениях на берегах трещины для получения приближенных формул, упрощающих вычисления для различных типов образцов при лабораторных исследованиях и определение НДС ответственных конструктивных элементов современной техники [2]. Однако при использовании метода суперпозиции, когда напряжения необходимо определять по результатам МКЭ, ошибки в вычислении узловых напряжений увеличиваются.

Альтернативный подход, в котором для вычисления K_I используются узловые перемещения, в настоящее время приобретает актуальность для различных направлений в механике разрушения как в коммерческих пакетах, так и специализированном программном обеспечении МКЭ [3]. Использовать перемещения естественно, так как ошибка приближенного решения МКЭ по перемещениям минимальна, и реализация вычислений не требует дополнительных преобразований (усреднение, аппроксимация производных, выбор расстояния от фронта трещины и т.п.).

В данной работе для определения K_I по узловым перемещениям МКЭ предлагается использовать интегральные характеристики перемещений вдоль прямой на поверхности трещины в среде пакета 3-D SPACE [4], который реализует смешанную вариационную схему МКЭ в деформациях и перемещениях [5], позволяющую повысить точность определения узловых перемещений и удовлетворить краевым условиям в напряжениях поточечно. Для приводимых здесь тестовых задач узловые перемещения являются результатом решения соответствующих пространственных краевых задач термоупругости. При этом дискретизация области конечными элементами осуществлялась без дополнительных требований к зоне фронта трещины как области концентрации напряжений. Проблема построения сгущения сетки элементов у фронта трещины и переходных зон не рассматривается и не используется.

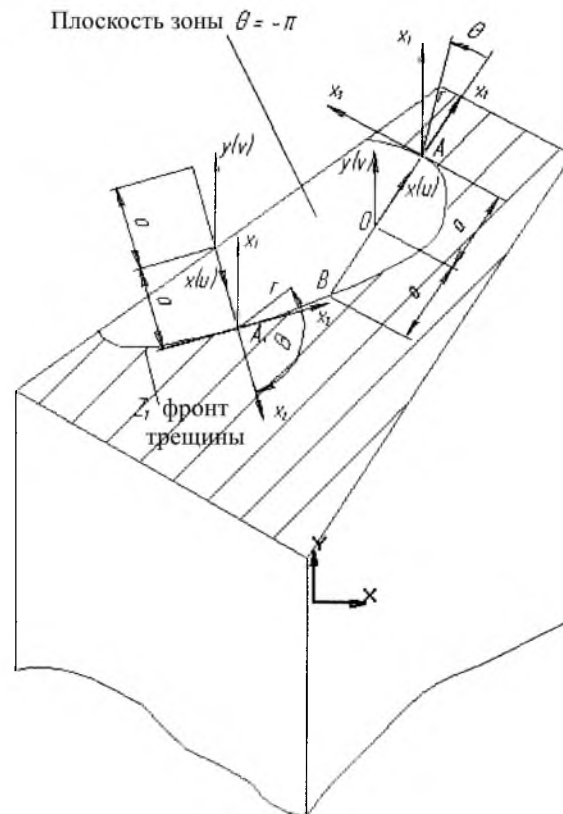


Схема определения отрезка AB на поверхности трещины.

Рассмотрим аппроксимацию раскрытия поверхностей трещины $w(x)$ для трещин нормального отрыва. Асимптотическое поведение $w(x)$ вдоль линии AB , нормальной к фронту трещины (A – точка фронта, где определяется K_I , B – точка пересечения линии AB с контуром фронта трещины, рисунок), представим в виде [6]

$$w(x, \theta = \pi) = CK_I \sqrt{a} \sqrt{1 - x/a}, \quad (1)$$

где K_I – коэффициент интенсивности напряжений;

$$C = 4\sqrt{2/\pi} f(\nu)/E; \quad a = |AB|/2;$$

E, ν – модуль сдвига и коэффициент Пуассона материала упругого тела; $f(\nu) = 1 - \nu^2$ – при плоской деформации; $f(\nu) = 1$ – при плоском напряженном состоянии.

Представим $w(x)$ разложением по функциям Чебышева на отрезке $(-1, 1)$ [7]:

$$\begin{cases} w(x) = \sum_{n=1} b_n U_n(x), & U_n(x) = \sqrt{1-x^2} Q_{n-1}(x), & Q_{n-1}(x) = \frac{1}{n} \frac{dT_n(x)}{dx}; \\ T_n(x) = \cos(n\theta); & x = \cos(\theta); \\ b_n = k_n \int_{-1}^1 v(x) Q_{n-1}(x) dx; & k_1 = \pi; & k_{2, \dots, n} = \pi/2, \end{cases} \quad (2)$$

где $T_n(x), Q_n(x)$ – многочлены Чебышева первого и второго рода.

Запишем раскрытие (2) в ближайшей к фронту трещины точке x^* :

$$w(x^*) = CK_I \sqrt{a} \sqrt{1 - x^*} = \sqrt{1 - x^*} \sqrt{1 + x^*} \sum_{n=1} (b_n U_n(x^*)). \quad (3)$$

Из (3) следует

$$K_I = \frac{\sqrt{1 + x^*}}{(C\sqrt{a}) \left(b_1 + \sum_n (b_{4n+1} - b_{4n}) \right)}. \quad (4)$$

Коэффициенты разложения (2) равны $b_n = -k_n \int_{-1}^1 w'(t) T_n(t) dt$, так как

на концах сегмента $w(\pm 1) = 0$. Для задачи Гриффитса $w(x)$ является эллипсом [8] с осями $a = 2, b = w(0) = w_0$, и в разложении (2) отличаться от нуля будет коэффициент $b_1 = w_0$.

Для монотонных функций раскрытия трещин с суммируемой производной основной вклад в K_I вносит первый член разложения (2). Используем преобразования [9]:

$$U_n(t) = \frac{1}{n} \sqrt{1-t^2} \frac{dT_n(t)}{dt} dt;$$

$$b_n^* = \int_{-1}^1 w(t) \frac{dT_n(t)}{dt} dt = \frac{2}{\pi n} \int_{-1}^1 \frac{dw(t)}{dt} T_n(t) dt = \frac{2}{\pi n} \int_{-1}^1 \frac{dw(t)}{dt} \cos n\theta dt; \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 T_n(t) dt = -\frac{1}{2} \left[\frac{T_{n+1}(t)}{n+1} - \frac{T_{n-1}(t)}{n-1} \right]; \quad \int_{-1}^1 T_1(t) dt = \frac{1}{4} T_2(t) dt.$$

Вычисление K_I на основе МКЭ по (4) является альтернативным прямому способу вычисления K_I . При этом основное слагаемое определяется по МКЭ вдали от фронта трещины, что позволяет надеяться на меньшую погрешность, так как в зонах концентрации напряжений погрешность определения перемещений выше.

Вычисление коэффициентов b_n проводилось численно. Интегралы заменялись конечными суммами при разбиении интервала интегрирования Δ на $M + 1$ отрезков:

$$\Delta = \{-1, t_M, t_{M-1}, \dots, t_2, t_1, 1\}, \quad (6)$$

где узлы t_i определялись по формуле

$$t_j = \cos \frac{\pi}{M+1} j, \quad j = 1, 2, \dots, M. \quad (7)$$

Производные $w(t)$ в пределах отрезков разбиения определялись центральными разностями.

В таблице приведены результаты определения K_I для тестовых задач в неограниченной упругой среде: для дискообразной круговой трещины (задачи № 2 и 3) и эллиптической (задача № 4) при равномерном растяжении на бесконечности (задачи № 1 и 2) и неравномерном нагреве от стационарного температурного поля (задачи № 3 и 4) для известных решений [6]. В случаях неравномерного нагрева температура на поверхности трещины $T_0 = -20^\circ\text{C}$, на бесконечности $T_\infty = 100^\circ\text{C}$ для круговой трещины и $T_0 = 300^\circ\text{C}$, $T_\infty = 0$ – для эллиптической. Интенсивность внешней равномерной нагрузки $p = 1$ МПа. Дискретизация областей осуществлялась восемью узловыми призматическими элементами при числе отрезков по длине трещины $M + 1 = 4$ для задач № 1–3. Для задачи № 4 с целью сравнения K_{ICH}^{\max} со значением, вычисленным по методике эквивалентного объемного интегрирования [10], дискретизация зоны трещины осуществлялась специальной областью с равномерным разбиением линии фронта трещины на 102 отрезка. Результаты вычисления K_{ICH}^{\max} по обеим методикам практически совпадают.

Значения K_I для тестовых задач по раскрытию в ближайшем к фронту трещины узлу

№ задачи	Наименование задачи	$K_{IA},$ МПа $\sqrt{м}$	$K_{ICH},$ МПа $\sqrt{м}$	$K_{I0},$ МПа $\sqrt{м}$	$\varepsilon,$ %
1	Задача Гриффитса, $E = 1$ МПа, $\nu = 0,25$	1,75	1,75	1,75	-1,1
2	Дискообразная круговая трещина, $E = 1$ МПа, $\nu = 0,25$	1,13	1,15	1,17	1,8
3	Дискообразная круговая трещина, $E = 1$ МПа, $\nu = 0,25$, $\alpha = 10^{-4}$ ($^{\circ}C$) $^{-1}$	$0,9 \cdot 10^{-2}$	$0,89 \cdot 10^{-2}$	$0,9 \cdot 10^{-2}$	-1,1
4	Дискообразная эллиптическая трещина, $E = 1,88 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, $\alpha = 0,135 \cdot 10^{-4}$ ($^{\circ}C$) $^{-1}$	864	863	747	-0,1

Примечание. K_{IA} – определено аналитически, K_{ICH} – по (5), K_{I0} – по формуле $\varepsilon = 100(K_{ICH} - K_{IA})/K_{IA}$.

Предложенный способ использовался для сравнительного анализа результатов вычисления K_I по методу эквивалентного объемного интегрирования и инженерными формулами при определении НДС ответственных элементов атомных энергетических установок в корпусах реакторов типа ВВЭР-1000 [11, 12].

Заключение. Приведенные сравнительные данные K_I для тестовых примеров позволяют надеяться на применение предложенного метода при оценке конструкционной прочности реальных объектов современной техники. Так, на основе определения НДС ответственных элементов атомных энергетических установок эффективность предложенного метода подтверждается сравнительным анализом результатов вычисления K_I для полуэллиптических трещин в корпусах реакторов типа ВВЭР-1000 по методу эквивалентного объемного интегрирования и инженерными формулами.

Резюме

Пропонується спосіб обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень за моментами вузлових переміщень поверхонь тріщин, отриманих методом скінченних елементів для тіл із тріщинами. Використовується розклад функції розкриття поверхонь тріщин функціями Чебишева, асимптотична поведінка яких біля фронту тріщини відповідає положенням лінійної механіки руйнування. Наводяться результати обчислення коефіцієнтів інтенсивності напружень для тестових задач, що мають аналітичний розв'язок. Визначення переміщень поверхонь тріщин проводилося засобами пакету 3-D SPACE, реалізуючого змішану варіаційну схему методу скінченних елементів у переміщеннях і деформаціях щодо крайових задач термопружності.

1. Brocks W. and Schelder I. Numerical Aspects of Path-Dependence of the J -integral in Incremental Plasticity // GKSS, Technical Notes GKSS/WMS/01/08.

2. *Овчинников А. В.* Приближенная формула определения коэффициентов интенсивности напряжений K_1 для тел с поверхностными трещинами // Пробл. прочности. – 1986. – № 11. – С. 44 – 47.
3. *Courtin S., Gardin C., Bezine G., and Hamouda Ben Hadj H.* Advantages of the J -integral approach for calculating stress intensity factors when using the commercial finite element software ABACQUS // Eng. Fract. Mech. – 2005. – 72. – P. 2174 – 2185.
4. *Програмне забезпечення “Тривимірне скінченноелементне моделювання теплового і термонапруженого стану елементів машинобудівних конструкцій (SPACE) // Система сертифікації УкрСЕПРО. Сертифікат відповідності № UA1.017.0054634-04. – 2004.*
5. *Чирков А. Ю.* Смешанная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории упругости и малых упругопластических деформаций. – Киев: Ин-т пробл. прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, 2003. – 249 с.
6. *Саврук М. П.* Коэффициенты напряжений в телах с трещинами. – Киев: Наук. думка, 1988. – 620 с.
7. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 618 с.
8. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
9. *Хемминг Р. В.* Численные методы. – М.: Наука, 1972. – 400 с.
10. *Вычислительные методы механики разрушения / Под ред. С. Атлури. – М.: Мир, 1990. – 391 с.*
11. *Ворошко П. П., Кобельский С. В., Кравченко В. И., Чирков А. Ю.* Применение программного обеспечения МКЭ решения краевых задач термопластичности для оценки напряженного состояния ответственных элементов оборудования АЭС // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2004. – № 1. – С. 118 – 123.
12. *Харченко В. В., Кобельский С. В., Кравченко В. И. и др.* Определение коэффициента интенсивности напряжений для поверхностных полуэллиптических трещин в корпусе реактора ВВЭР-1000 по результатам решения краевых задач термоупругости на основе смешанной схемы МКЭ // Пробл. прочности. – 2007. – № 2. – С. 45 – 51.

Поступила 01. 11. 2006