

## Высокотемпературная ползучесть и длительная прочность элементов конструкций при циклическом нагружении

Д. В. Бреславский, О. К. Морачковский, О. А. Татарина

Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

*Представлен метод решения задач высокотемпературной циклической ползучести и повреждаемости элементов конструкций. Процедуры асимптотических разложений и осреднения как на периоде вынужденных колебаний тела, так и на периоде медленно изменяющихся нагрузок использованы для системы уравнений, описывающих процессы ползучести и повреждаемости в тонкостенных элементах конструкций.*

**Ключевые слова:** ползучесть, длительная прочность, повреждаемость, циклическое нагружение, тонкостенные конструкции.

**Введение.** Для конструктивных элементов современной техники, работающих при повышенных температурах и совместном действии как статических, так и медленно и быстро изменяющихся циклических напряжений, характерны процессы развития необратимых деформаций ползучести и накопления скрытой поврежденности. Многие из этих элементов отвечают расчетным схемам тонких оболочек вращения. В связи с широким распространением тонкостенных оболочек вращения в современном космическом, авиационном и энергетическом машиностроении возникают вопросы моделирования их напряженно-деформированного состояния (НДС) в условиях циклического нагружения [1].

Большая часть расчетных исследований ползучести и разрушения оболочечных конструкций проводилась только для случая действия статических нагрузок. Ряд работ, посвященных оценке влияния циклического нагружения на характеристики ползучести и длительной прочности пластин и оболочек, был опубликован в последнее время [2, 3]. В реальных условиях эксплуатации элементов конструкций их нагружение представляет собой сложный процесс – комбинацию циклов температуры и нагрузки с сильно отличающимися периодами. В связи с этим актуальной является разработка метода решения задач циклической ползучести и повреждаемости. В данной работе разработанный метод изложен применительно к тонкостенным конструкциям, состоящим из оболочек вращения.

**Постановка задачи и метод решения.** Поставленные задачи решаются с помощью метода конечных элементов (МКЭ). Используется конечный элемент в виде конической оболочки. В соответствии с подходом МКЭ запишем основное вариационное равенство [2, 3]

$$-\int_S (N_{ij} \delta \varepsilon_{ij}^m - M_{ij} \delta \chi_{ij}) dS + \int_S p \delta w dS = 0, \quad i, j = 1, 2, \quad (1)$$

где  $N_{ij}$  – внутренние мембранные силы;  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  – изгибающие моменты;  $M_{12}$  – крутящий момент;  $\delta\varepsilon_{ij}^m$  – вариация вектора полных деформаций оболочки;  $\delta\chi_{ij}$  – вариация вектора изменения кривизн;  $p$  – вектор нагрузок;  $\delta w$  – вариация перемещений.

В связи с тем что рассматриваются тонкие оболочки, примем, что углы поворота  $\frac{\partial w}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial w}{\partial \varphi}$ , связанные с прогибом, значительно превышают значения производных  $\frac{\partial u}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \varphi}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial s}$ ,  $\frac{\partial v}{\partial \varphi}$ . На основании принятого допущения о нерастяжимости и несжимаемости в направлении толщины материала оболочки получим геометрические зависимости для случая неосесимметричного НДС в конической оболочке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{11}^m + \chi_{11}; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_{22}^m + \chi_{22}; \quad \varepsilon_{12} = \varepsilon_{12}^m + 2\chi_{12}; \\ \varepsilon_{11}^m = \varepsilon_{11}^1 + \varepsilon_{11}^n; \quad \varepsilon_{22}^m = \varepsilon_{22}^1 + \varepsilon_{22}^n; \quad \varepsilon_{12}^m = \varepsilon_{12}^1 + \varepsilon_{12}^n; \\ \varepsilon_{11}^1 = \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \varepsilon_{22}^1 = \frac{\partial v}{r\partial s} + \frac{u}{r}\cos\alpha + \frac{w}{r}\sin\alpha; \quad \varepsilon_{12}^1 = \frac{\partial u}{r\partial\varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r}\cos\alpha; \\ \varepsilon_{11}^n = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial s}\right)^2; \quad \varepsilon_{22}^n = \frac{1}{2r^2}\left(\frac{\partial w}{\partial\varphi}\right)^2; \quad \varepsilon_{12}^n = \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial s}\frac{\partial w}{\partial\varphi}; \\ \chi_{11} = \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}; \quad \chi_{22} = \frac{\partial^2 w}{r^2\partial\varphi^2} + \frac{\cos\alpha}{r}\frac{\partial w}{\partial s} - \frac{\sin\alpha}{r^2}\frac{\partial v}{\partial\varphi}; \\ \chi_{12} = 2\frac{\partial^2 w}{r\partial s\partial\varphi} - \frac{\partial w}{r^2\partial\varphi}\cos\alpha + \frac{v}{r^2}\sin\alpha\cos\alpha - \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\sin\alpha}{r}, \end{array} \right. \quad (2)$$

где  $\varepsilon_{11}$ ,  $\varepsilon_{22}$  – линейная деформация оболочки в направлениях  $x$ ,  $\varphi$ ;  $\varepsilon_{12}$  – деформации сдвига;  $\varepsilon_{11}^m$ ,  $\varepsilon_{22}^m$ ,  $\varepsilon_{12}^m$  – деформации срединной поверхности;  $\chi_{11}$ ,  $\chi_{22}$  – изменение значений кривизн в выбранных направлениях;  $\chi_{12}$  – кручение;  $(u, v, w)^T$  – вектор перемещений в точке оболочки.

Соотношения между деформациями и напряжениями в оболочке в условиях ползучести запишем в виде

$$\sigma_{ij} = \bar{b}_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^m - c_{kl} - \varepsilon^v) + z\bar{d}_{ijkl}(\chi_{kl} - \chi_{kl}^-) \quad (3)$$

или

$$N_{ij} = b_{ijkl}\varepsilon_{kl}^1 + N_{ij}^n - N_{ij}^c, M_{ij} = d_{ijkl}\chi_{kl} - M_{ij}^c, \quad (4)$$

где

$$\bar{b}_{ijkl} = b_{ijkl}/h; \quad \bar{d}_{ijkl} = 12d_{ijkl}/h^3; \quad b_{ijkl} = B\left[\delta_{ik}\delta_{jl}\frac{(1-\nu)}{2} + \nu\delta_{ij}\delta_{kl}\right];$$

$$d_{ijkl} = D \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} \frac{(1-\nu)}{2} + \nu \delta_{ij} \delta_{kl} \right]; \quad B = \frac{Eh}{(1-\nu^2)}; \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)};$$

$E, \nu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

Остальные компоненты физических соотношений (4), зависящие от нелинейной составляющей упругих деформаций и необратимых деформаций ползучести, имеют вид

$$N_{ij}^n = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{b}_{ijkl} \varepsilon_{kl}^n dz; \quad N_{ij}^c = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{b}_{ijkl} c_{kl} dz; \quad M_{ij}^c = \int_{-h/2}^{h/2} \bar{d}_{ijkl} c_{kl} z dz. \quad (5)$$

**Уравнения состояния.** Рассматривается случай действия комбинированного циклического напряжения  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$ , где  $\sigma_0$  – постоянное напряжение;  $\sigma_1$  – медленно изменяющееся за период рабочего цикла напряжение;  $\sigma_2$  – динамическое напряжение, быстро изменяющееся по гармоническому закону с высокой частотой [4]. Циклическую составляющую полного напряжения  $\sigma_2$  представим в виде

$$\sigma_2 = \sigma_a \sin(2\pi f_2 t),$$

где  $f_2$  – циклическая частота, Гц;  $\sigma_a$  – амплитуда, МПа.

В общем случае медленно изменяющееся напряжение  $\sigma_1$  является функцией приложенной нагрузки  $p$ , периода цикла  $T$  и времени  $t$ :

$$\sigma_1 = F(p, t, T).$$

Форма медленно изменяющегося цикла определяется рабочими условиями процесса. Так, например, для авиационного двигателя – это нарастающая (набор максимального значения), постоянная (режим) и убывающая (выключение) ветки. На вторую часть цикла могут накладываться дополнительные напряжения, связанные, например, с форсированием двигателя. В каждом конкретном случае форма медленно изменяющегося циклического напряжения определяется заранее. Закон изменения на периоде рабочего цикла  $T$  напряжения  $\sigma_1$ , которое в условиях ползучести приводит к малоцикловой ползучести, примем в виде

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} \left( \frac{4}{T} t - \frac{4}{T^2} t^2 \right),$$

где  $\sigma_{\max}$  – максимальное значение напряжения  $\sigma_1$ .

Представляя данное напряжение  $\sigma_1$  периодическим рядом Фурье:

$$\sigma_1 = \sigma_{\max} \left( \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right),$$

получаем вид закона для циклического изменения напряжения  $\sigma$ :

$$\sigma = \sigma_0 \left( 1 + M \left( \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right) + A \sin(2\pi f_2 t) \right),$$

где  $A = \frac{\sigma_a}{\sigma_0}$ ,  $M = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_0}$  – коэффициенты асимметрии быстро и медленно изменяющихся циклических напряжений.

Рассмотрим случай простого напряженного состояния, когда на образец действует напряжение  $\sigma = \sigma^0 + \sigma^1(\tau)$ , где  $\sigma^0$ ,  $\sigma^1$  – статическая и циклическая составляющие. Тогда уравнения состояния представим в виде

$$\dot{c} = B \frac{(\sigma)^n}{(1-\omega)^k}; \quad (6)$$

$$\dot{\omega} = D \frac{(\sigma)^r}{(1-\omega)^l}, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \omega(t_*) = 1. \quad (7)$$

Для описания процессов ползучести и связанной с ней повреждаемости используем методику асимптотических разложений и усреднения на периоде [2]. Рассмотрим асимптотические разложения неизвестных уравнений (6), (7) по малому параметру  $\mu = T/t_*$  с коэффициентами, зависящими как от переменной  $t$  (медленные или макроскопические процессы), так и от переменной  $\tau = t/\mu$  или  $\xi = \tau/T$  (быстрые или микроскопические), в случае действия циклического напряжения  $\sigma$  без учета динамической составляющей  $\sigma_2$ . Тогда

$$c \cong c_0(t) + \mu c_1(\xi); \quad (8)$$

$$\omega = \omega_0(t) + \mu \omega_1(t, \xi), \quad (9)$$

где  $c_0(t)$ ,  $\omega_0(t)$ ,  $c_1(\xi)$ ,  $\omega_1(\xi)$  – функции, отвечающие основному процессу ползучести и повреждаемости в масштабе медленно изменяющегося времени и периодически повторяющемуся процессу в масштабе быстрого времени  $\xi$ .

Используя технику асимптотических разложений для уравнений (6), (7) и соотношений (8), (9), после осреднения на периоде рабочего цикла  $T$  при циклическом напряжении  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1$  получаем уравнения состояния для основного процесса циклической ползучести в виде

$$\dot{c}^0 = B \frac{(\sigma_{1e})^n}{(1-\omega^0)^k}; \quad (10)$$

$$\dot{\omega}^0 = D \frac{(\sigma_{1e})^r}{(1-\omega)^l}, \quad (11)$$

где

$$\sigma_{1e} = \langle \sigma \rangle = \sigma_0 \left( \int_0^1 \left( 1 + M \left( \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(2\pi k \xi) \right) \right)^s d\xi \right)^{1/s}.$$

Для уравнения (10) имеем  $s = n$ , для уравнения (11) –  $s = r$ .

Далее рассмотрим процесс циклической ползучести под действием комбинированного напряжения  $\sigma = \sigma_0 + \sigma_1 + \sigma_2$ , т.е. на полученное эквивалентное напряжение  $\sigma_{1e}$  накладываем динамическое напряжение  $\sigma_2$ . Используя аналогично метод асимптотического разложения по малому параметру

$$\mu_1 = \frac{T_2}{t_*}, \quad T_2 = \frac{1}{f_2}$$

и процедуру осреднения на периоде  $T_2$ , окончательно уравнения состояния для основного процесса циклической ползучести могут быть получены в виде

$$\dot{c}^0 = B \frac{(g_1 g_2 \sigma_0)^n}{(1 - \omega^0)^k}; \quad (12)$$

$$\dot{\omega}^0 = D \frac{(g_1 g_2 \sigma_0)^r}{(1 - \omega^0)^l}, \quad (13)$$

где

$$g_1 = \left( \int_0^1 \left( 1 + M \left( \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos(2\pi k \xi) \right) \right)^s d\xi \right)^{1/s};$$

$$g_2 = \left( \int_0^1 (1 + A_2 \sin(2\pi \xi))^s d\xi \right)^{1/s}; \quad A_2 = \frac{A}{g_1}.$$

Таким образом, с помощью двукратного применения метода асимптотического разложения по малым параметрам с последующим осреднением на периодах получены определяющие уравнения (12), (13).

Уравнения состояния (12), (13) обобщены на случай сложного напряженного состояния:

$$\dot{c}_{ij} = \frac{3}{2} B \frac{(g_1 g_2 \sigma_i^0)^{n-1}}{(1 - \omega^0)^k} s_{ij}; \quad (14)$$

$$\dot{\omega} = D \frac{(g_1 g_2 \sigma_e^0)^r}{(1 - \omega^0)^l}, \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \omega(t_*) = 1, \quad (15)$$

где  $B, D, n, r, k, l$  – константы, определяемые по экспериментальным данным о ползучести и разрушении материала при заданной температуре  $T^0$ .

В кинетическом уравнении для параметра повреждаемости необходимо использовать законы для эквивалентных напряжений  $\sigma_e$ , полученные экспериментально для различных материалов [1, 5]. Как правило, наилучшие результаты можно получить с использованием критерия Писаренко–Лебедева [1] и критерия трех инвариантов [5].

Таким образом, исходная задача сводится к решению двух взаимосвязанных начально-краевых задач. Первая из них отвечает задаче ползучести под действием только статически приложенных нагрузок, но со специальными уравнениями состояния (14), (15), вторая – вынужденным колебаниям упругих тел под действием гармонического нагружения. Обе системы уравнений связаны определенными во второй задаче коэффициентами асимметрии цикла.

Предложенный метод решения задач циклической ползучести и связанной с ней повреждаемости реализован в виде пакета прикладных программ, ориентированного на IBM-совместимые компьютеры. Сформулированная задача решается с помощью метода конечных элементов.

**Конечноэлементная формулировка задачи.** В качестве конечного элемента выбран четырехузловой конический элемент с 28 степенями свободы [3]. Представим полученные разрешающие уравнения задачи с использованием их векторно-матричной формы.

Введем вектор дополнительных усилий, зависящий от деформаций ползучести  $\{\sigma_c\} = (N_1^c, N_2^c, S^c, M_1^c, M_2^c, H^c)^T$ , и вектор необратимых деформаций ползучести  $\{c\} = (c_1, c_2, c_\gamma)^T$ . Тогда физические соотношения задачи могут быть представлены в следующем виде:

$$\sigma_c = \frac{E}{1-\nu^2} \int_{-h/2}^{h/2} [M] \{c\} dz,$$

где  $[M]$  – матрица, содержащая физические константы материала.

Следовательно, вектор дополнительных усилий полностью определен необратимыми деформациями ползучести, которые вычисляются из уравнений состояния (14), (15).

Рассмотрим вектор внешних узловых сил. Из условия равенства работ на возможных перемещениях получим формулы для вычисления величин компонент этого вектора. Тогда формула для определения обобщенного вектора внешних узловых нагрузок  $\{P_v\}$  имеет вид

$$\{P_v\} = \sum_e \int_{S^e} [B]^T \{p\} dS,$$

где  $[B]$  – матрица связи узловых перемещений с перемещениями по элементу;  $\{p\}$  – вектор распределенных нагрузок.

Вектор узловых сил  $\{P_n\}$ , определенных нелинейной составляющей упругих деформаций, определим по формуле

$$\{P_n\} = \sum_e \int_{S^e} [D]^T [P_m] \{\varepsilon^n\} dS,$$

где  $\{\varepsilon^n\}$  – вектор нелинейных составляющих упругих деформаций;  $[P_m]$  – матрица, зависящая от физических констант материала.

Формула для вычисления вектора узловых сил  $\{P_c\}$ , определенных необратимыми деформациями ползучести, имеет вид

$$\{P_c\} = \sum_e \int_{S^e} [D]^T [P_m] \{c_m\} dS,$$

где  $\{c_m\}$  – вектор необратимых деформаций ползучести.

Обобщенный вектор узловых усилий  $\{P_p\}$  от проекции обобщенных сил на нормаль вычислим по формуле

$$\{P_p\} = \sum_e \int_{S^e} [B]^T \{p^p\} dS,$$

где  $\{p^p\}$  – проекции вектора обобщенных сил на нормаль.

Использование МКЭ позволяет вариационное равенство (1) свести к системе линейных алгебраических уравнений:

$$[K] \{\delta\} = \{P_v\} + \{P_n\} + \{P_c\} + \{P_p\}, \quad (16)$$

где  $\{\delta\}$  – узловые перемещения;  $[K]$  – глобальная матрица жесткости, которая может быть вычислена по формуле

$$[K] = \sum_e \int_{S^e} [D]^T [E] [D] dS.$$

Для описания процессов высокотемпературной ползучести и связанной с ней повреждаемости используем уравнения состояния (14), (15).

В задачах колебаний необходимо определить матрицу масс системы:

$$[M] = \sum_e \int_V [B]^T \rho [B] dS.$$

Тогда система разрешающих уравнений имеет вид

$$([K] - \Omega^2 [M]) \{q_a^k\} = \{P_a^k\}, \quad (17)$$

где  $([K] - \Omega^2 [M])$  – матрица “динамической жесткости” системы;  $\{q_a^k\}$  – вектор амплитудных значений узловых перемещений; компоненты вектора

$\{P_a^k\}$  определяются амплитудными значениями гармонической части  $p(t) = p_0 + p_a \sin(2\pi f_2 t)$ .

Система (17) разрешается относительно  $\{q_a^k\}$  фронтальным методом и используется для определения собственных частот и форм собственных колебаний, по которым вычисляются значения интенсивностей амплитудных напряжений.

**Ползучесть и повреждаемость цилиндрической оболочки.** В качестве примера расчета рассмотрим ползучесть цилиндрической оболочки с жестко защемленными краями, которая нагружена циклическим внутренним давлением

$$p(t) = p_0 + p_s \left( \frac{2}{3} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2 k^2} \cos\left(\frac{2\pi k}{T} t\right) \right) + p_a \sin(2\pi f_2 t). \quad (18)$$

Данная форма цикла качественно соответствует распределению давления в камерах сгорания современных летательных аппаратов [5]. Оболочка изготовлена из жаропрочного никелевого сплава ЭИ867, деформирующегося при температуре 1173 К. Физико-механические характеристики сплава:  $B = 2,65 \cdot 10^{-21}$  МПа<sup>-n</sup>/ч;  $D = 2,4 \cdot 10^{-13}$  МПа<sup>m</sup>/ч;  $n = 6,7$ ;  $m = 3,92$ ;  $k = l = 7,06$ . Длина оболочки  $L = 0,3$  м, радиус срединной поверхности  $R = 0,05$  м, толщина стенки  $h = 0,003$  м. Статическая составляющая внутреннего давления  $p_0 = 20$  МПа, амплитуда его циклической составляющей изменялась в пределах  $(0 \dots 0,25)p_0$  для частоты нагружения  $f_2$ , равной 0,1 первой собственной частоты. Задачу решали с помощью конического конечного элемента с сеткой из 100 элементов.

Результаты расчетов представлены на рис. 1, 2. Рис. 1 иллюстрирует графики прогиба в начальный и конечный моменты времени вдоль образующей оболочки при полном комбинированном нагружении, рис. 2 – рост максимального параметра повреждаемости по времени на внешней поверхности оболочки, где кривая 1 соответствует статическому нагружению, кривая 2 – совместному действию статической  $p_0$  и накладываемой на нее быстро изменяющейся составляющей  $p_a$ , кривая 3 – комбинированному нагружению по закону (18).

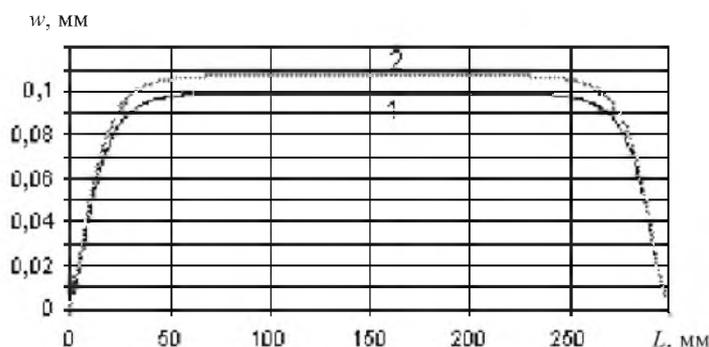


Рис. 1. Изменение прогиба в начальный (1) и конечный (2) моменты времени вдоль образующей оболочки.

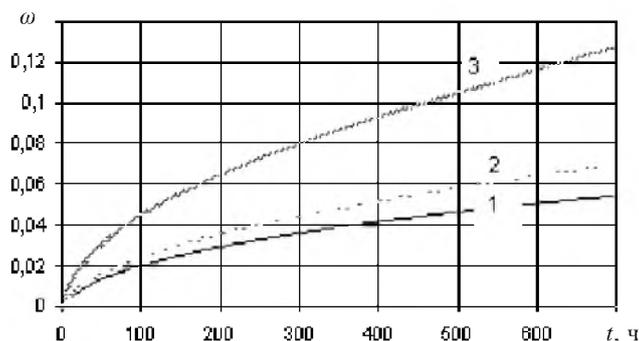


Рис. 2. Рост параметра повреждаемости в точке, где происходит разрушение.

**Заключение.** Анализ данных свидетельствует о существенном влиянии на скорость ползучести и время накопления поврежденности быстро и медленно изменяющихся циклических напряжений. Отметим, что учет медленно изменяющегося напряжения цикла значительно ускоряет процесс накопления поврежденности. За 60 циклов (700 ч) значения накопленной поврежденности для случаев статического и комбинированного нагружения отличаются в 2,5 раза. При этом общее время до разрушения составляет 3255 ч (279 цикл).

## Резюме

Представлено метод розв'язку задач високотемпературної циклічної повзучості і пошкодження елементів конструкцій. Процедури асимптотичного розкладу й осереднення як на періоді вимушених коливань тіла, так і на періоді повільно змінюваних навантажень використано для системи рівнянь, що описують процеси повзучості і пошкодження в тонкостінних елементах конструкцій.

1. Писаренко Г. С., Руденко В. Н., Третьяченко Т. Н., Троценко В. Т. Прочность материалов при высоких температурах. – Киев: Наук. думка, 1966. – 795 с.
2. Altenbach H., Breslavsky D., Morachkovsky O., and Naumenko K. Cyclic creep-damage in thin-walled structures // J. Strain Anal. Eng. Design. – 2000. – 35, No. 1. – P. 1 – 11.
3. Бреславский Д. В., Морачковский О. К., Чупрынин А. А. Геометрически нелинейные задачи циклической ползучести оболочек вращения // Вісн. Харків. держ. політехн. ун-ту. – Харків, 1999. – Вип. 42. – С. 49 – 53.
4. Бреславский Д. В., Морачковский О. К., Уварова О. А. Метод асимптотических разложений в задачах мало- и многоциклового ползучести материалов // Там же. – 2004. – № 19. – С. 23 – 32.
5. Collins J. A. Failure of Materials in Mechanical Design: Analysis, Prediction, Prevention (Second edition). – New York: John Wiley & Sons, 1993. – 654 p.

Поступила 25. 10. 2007