

Статистическая динамика рабочих колес турбомашин с технологической расстройкой

В. А. Жовдак^а, А. А. Ларин^а, А. Ф. Кабанов^б

^а Национальный технический университет “Харьковский политехнический институт”, Харьков, Украина

^б ОАО “Турбоатом”, Харьков, Украина

Исследуются случайные гармонические колебания рабочей ступени паровой турбины с учетом расстройки. Предложен подход к определению математического ожидания и спектральной плотности перемещений исследуемой системы на основе модели одного сектора.

Ключевые слова: лопатка, расстройка, случайные колебания, модель одного сектора.

Введение. Вибрационная прочность современных турбомашин во многом определяется напряженно-деформированным состоянием рабочих колес, которые, несмотря на свое многообразие, обладают общим свойством циклической симметрии. В рабочем колесе, как в циклически симметричной системе, можно выделить сектор, который, будучи повернутым на любой угол, кратный $2\pi/N$ (N – количество секторов), сохранит инвариантность совокупности своих характеристик [1]. Исследование таких систем может быть сведено к решению задачи на основе одного сектора с помощью сложных моделей, позволяющих проводить детальный численный анализ напряженно-деформированного состояния (НДС) всех конструктивных элементов исследуемого объекта. Вместе с тем реальные конструкции всегда отклоняются от строгой симметрии в большей или меньшей степени. В этом случае необходимо проводить моделирование всей конструкции. Современные численные методы решения задачи динамики базируются на применении конечноэлементного подхода, согласно которому для получения достоверных данных о вибрационных характеристиках используются модели большой размерности, что значительно затрудняет получение численных результатов.

Кроме того, действующие на рабочие колеса газодинамические нагрузки имеют явно выраженный случайный характер. Поэтому актуальной является проблема решения задачи о случайных вынужденных колебаниях рабочих колес турбомашин с учетом их расстройки.

1. Решение задачи стохастической динамики системы со строгой циклической симметрией на основе модели одного сектора. Определение вероятностных характеристик отклика исследуемой системы на случайное нагружение в рамках корреляционного подхода сводится к отысканию математического ожидания (МО) и спектральной плотности обобщенных перемещений. Эти характеристики случайного поведения системы определяются выражениями [2]

$$\{S_q(\omega)\} = [A(\omega)][A(\omega)]^* \{S_f(\omega)\}, \quad \langle \{q\} \rangle = [A(\omega)] \langle \{f\} \rangle, \quad (1)$$

где $\langle \dots \rangle$ – оператор МО; $[A(\omega)] = [Z(\omega)]^{-1}$ – матрица динамической податливости (МДП) всей системы; $\{q\}$, $\{f\}$ – векторы амплитуд перемещений и нагрузки; $\{S_f(\omega)\}$ – спектральная плотность нагрузки.

В настоящей работе предлагается построение матрицы $[A(\omega)]$ для системы со строгой циклической симметрией на основе модели одного сектора. Как показано в [1], для собственных колебаний компоненты вектора амплитуд перемещений всей циклически симметричной системы (ЦСС) выражаются через компоненты вектора амплитуд перемещений сектора:

$$\{q\} = \left\{ \{q\}_s, \{q\}_s e^{i\frac{2\pi}{N}h}, \{q\}_s e^{i\frac{2\pi}{N}2h}, \dots, \{q\}_s e^{i\frac{2\pi}{N}(N-1)h} \right\}^t, \quad (2)$$

где h – волновое число (индекс цикличности), $h = -N/2, N/2$. Из выражения (2) следует, что собственные колебания ЦСС допускают множество частных решений, определяемых числом h .

Для случая вынужденных гармонических колебаний вектор амплитуд перемещений удовлетворяет условиям (2), если вектор амплитуд нагружения удовлетворяет аналогичным условиям [3]:

$$\{f\}_j^{(h)} = \{f\}_s e^{i\frac{2\pi}{N}h(j-1)}. \quad (3)$$

В этом случае решение, соответствующее числу h волн деформаций в форме колебаний для j -го сектора, может быть определено с помощью МДП или на основе метода разложения по собственным формам [3]:

$$\{q\}_j^{(h)} = [A_h(\omega)]_s \{f\}_j, \quad \{q\}_j^{(h)} = \left(\sum_{r=1}^m \{u\}_r^h (\{\bar{u}\}_r^h)^t H(i\omega, \mu)_r^{(h)} \right) \{f\}_j, \quad (4)$$

где $H(i\omega, \mu)_r^{(h)}$ – передаточная функция; μ_r – коэффициент демпфирования; $\{u\}_r^h$ – комплексный вектор собственных форм колебаний сектора ЦСС; черта сверху над вектором обозначает комплексное сопряжение.

Приравнивая правые части выражений (4), получаем h -ю матрицу динамической податливости одного сектора системы:

$$[A_h(\omega)]_s = \sum_{r=1}^m \{u\}_r^h (\{\bar{u}\}_r^h)^t H(i\omega, \mu)_r^{(h)} \quad \text{для} \quad h \in [0, N/2]; \quad (5)$$

$$[A_h(\omega)]_s = \sum_{r=1}^m \{\bar{u}\}_r^h (\{u\}_r^h)^t H(i\omega, \mu)_r^{(h)} \quad \text{для} \quad h \in [-N/2, 0]. \quad (6)$$

Тогда МДП системы с циклической симметрией определяется следующим образом [3]:

$$[A(\omega)] = \begin{bmatrix} [L]_1 & \dots & [L]_{n_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ [L]_{n_s}^T & \dots & [L]_1 \end{bmatrix}, \quad [L]_j = \frac{1}{2n_s} \sum_{h=-n_s/2}^{n_s/2} e^{-i-ah(j-1)} [A_h]_s. \quad (7)$$

Следовательно, решение задачи стохастической динамики ЦСС может быть сведено к построению матрицы динамической податливости на основе модели одного сектора и последующего вычисления спектральной плотности по выражению (1).

2. Стохастическая динамика системы с нарушенной циклической симметрией на основе модели одного сектора. При решении задачи случайных колебаний системы с расстройкой также можно воспользоваться выражениями (1). Для отыскания МДП рассматриваемой системы на основе модели одного сектора определяется рекуррентное соотношение, содержащее компоненты, характеризующие симметричную часть системы и ее расстройку. Данный подход базируется на представлении матрицы динамической жесткости всего колеса $[Z(\omega)]$ в виде суммы матрицы динамической жесткости $[Z_0(\omega)]$ ЦСС, которая может быть построена на основе модели одного сектора, и матрицы расстройки $[\Delta Z(\omega)]$:

$$[Z(\omega)]\{q\} = ([Z_0(\omega)] + [\Delta Z(\omega)])\{q\} = \{f\}. \quad (8)$$

Для нахождения матрицы $[A(\omega)]$ необходимо обращение указанной суммы матриц, которое может быть сведено к рекуррентному соотношению, полученному на основе формулы Шермона–Моррисона–Вудбари [3]:

$$[A(\omega)]^{(j+1)} = [A(\omega)]^{(j)} - \frac{1}{1 + \{v(\omega)\}_j^t \{a(\omega)\}_j^{(j)}} (\{a(\omega)\}_j^{(j)} \{v(\omega)\}_j^t [A(\omega)]^{(j)}), \quad (9)$$

где $\{a(\omega)\}_j^{(j)}$ – j -я строка МДП, определенной на j -й итерации; $\{v(\omega)\}_j$ – j -я строка матрицы расстройки. В качестве начального значения в приведенных рекуррентных соотношениях используется МДП системы со строгой циклической симметрией.

Заметим, что технологическая расстройка рабочих колес турбомашин отмечается только в локальных областях, а распределение динамических напряжений, как правило, необходимо определять в областях их концентрации. В связи с этим в соотношениях (1), (7), (9) можно ограничиться рассмотрением только тех узлов, в которых существует расстройка, приложена внешняя поверхностная нагрузка и имеет место концентрация НДС.

3. Результаты численных исследований. На основе разработанного подхода проведены численные исследования случайных колебаний лопаточного аппарата первой ступени цилиндра низкого давления (ЦНД) паровой турбины ПТ-325, рабочая лопатка которой обладает связью в виде цельнофрезерованной бандажной полки, расположенной на периферии лопатки. Бандажные полки соседних лопаток соединены специальными вставками. Хвостовик лопатки двухопорный “трибовидной” формы. Венец состоит из 136 рабочих лопаток. Направляющий аппарат содержит 62 лопатки, что определяет характер возбуждаемых форм колебаний.

Конечноэлементная модель исследуемой лопатки и бандажной полки приведена на рис. 1, где 1, 3, 5 – точки пера лопатки, в которых определяется максимальный разброс амплитуд колебаний. Модель в основном представлена в виде регулярной сетки гексаидральных элементов, а локальные области сочленения пера с хвостовиком и бандажной полкой – из тетраэдральных элементов.

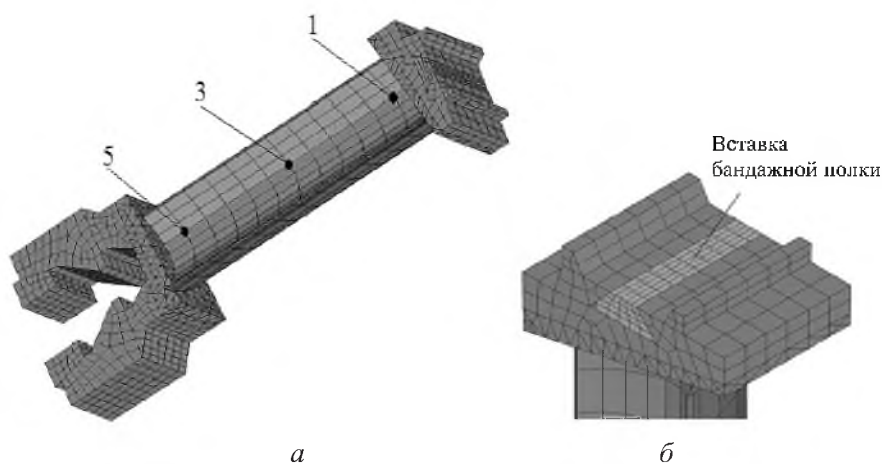


Рис. 1. Конечноэлементная модель лопатки (а) и бандажной полки (б).

3.1. *Собственные и случайные вынужденные колебания лопаточного аппарата как циклически симметричной системы.* Первая ступень ЦНД функционирует в широком диапазоне режимов эксплуатации при сравнительно больших перепадах давления и температуры. При этом на выходной кромке направляющего аппарата образуются турбулентные кромочные следы. Рабочий аппарат ступени находится на значительном расстоянии от выходной кромки регулирующей мембраны и поэтому испытывает влияние только дальнего следа, который можно считать свободной турбулентной струей. Осредненная скорость течения в турбулентной струе меньше, чем в основном потоке, вследствие чего вращающийся лопаточный аппарат периодически попадает в область с меньшим давлением. Осредненные характеристики такого турбулентного потока в соответствии с методикой [4] раскладывали в ряд Фурье.

В табл. 1 приведены результаты расчета собственных частот колебаний модели ЦСС лопаточного аппарата и осредненных амплитуд внешних сил, которые прикладывали в каждый узел конечного элемента сетки пера лопатки.

Т а б л и ц а 1

Результаты определения характеристик спектра возмущения
и собственных частот колебаний модели ЦСС лопаточного аппарата

M_1	Частота возмущения, Гц	Амплитуда возмущения, H		M_2	Собственная частота, Гц	Ω , Гц
		x	y			
1	3100	6,74	6,440	1	2272,8	36,66
				2	3331,1	53,73
2	6200	1,05	1,004	3	4737,3	38,20
				4	6386,1	51,50
				5	7594,4	61,20
3	9300	-1,94	-1,860	6	8457,6	45,47
				7	10501,0	56,46

Примечание. M_1 – номер гармоники возбуждения колебаний при частоте вращения ротора 50 Гц; M_2 – номер собственной частоты колебаний, соответствующий форме с 31-м узловым диаметром (с учетом количества направляющих лопаток); Ω – частота вращения ротора, при которой в системе возникает резонанс.

Анализ приведенных данных показывает, что область опасных вынужденных частот турбулентных пульсаций в кромочном следе принадлежит инерционной подобласти [5], в которой пространственный энергетический спектр подчиняется закону Колмогорова–Обухова и может быть представлен в виде выражения

$$E(k) = \frac{18}{55} \left(\frac{8}{9\alpha} \right)^{2/3} (\varepsilon v^5)^{1/4} \left(\frac{k}{k_d} \right)^{-5/3}, \quad (10)$$

где α – постоянная Гейзенберга (для исследуемой области спектра $\alpha = 0,45$ согласно [5]); ε – функция, характеризующая диссипацию энергии; v – осредненная скорость потока; k_d – характеристическое волновое число потока; k – волновое число турбулентного потока.

На основании выражения (10) были определены спектральные плотности скорости потока и давления (рис. 2).

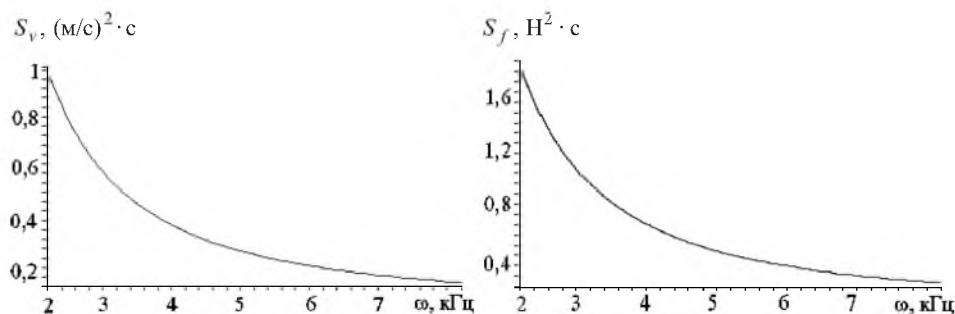


Рис. 2. Спектральные плотности скорости потока и давления в турбулентном следе.

Для рассмотренного случайного нагружения была решена задача случайных колебаний модели ЦСС лопаточного аппарата. На рис. 3 и 4 приведены математические ожидания и спектральные плотности амплитуд перемещений для 1- и 3-й точек среднего сечения пера лопатки (рис. 1,а), полученные согласно (1).

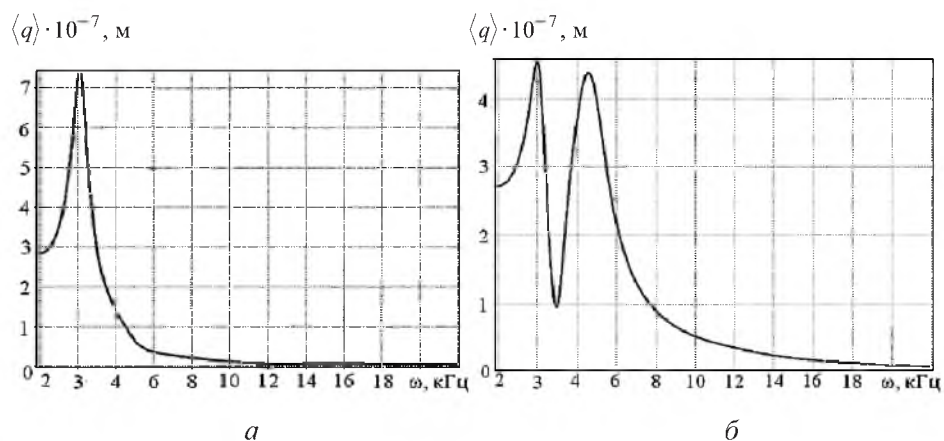


Рис. 3. Математическое ожидание амплитуд перемещений вынужденных случайных колебаний ЦСС лопаточного аппарата для 1- (а) и 3-й (б) точек.

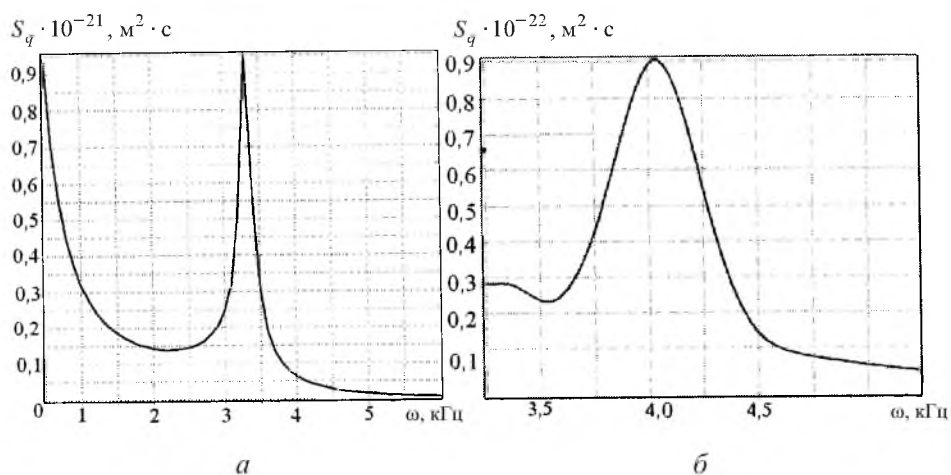


Рис. 4. Спектральная плотность амплитуд перемещений вынужденных случайных колебаний ЦСС лопаточного аппарата для 1- (а) и 3-й (б) точек.

Видно, что в исследуемой системе доминируют только первые две собственные формы колебаний, соответствующие $h = 31$. Для резонансных областей по спектральным плотностям были определены МО, дисперсии и максимальные разбросы амплитуд колебаний, значения которых приведены в табл. 2.

Сравнительный анализ представленных данных свидетельствует о том, что учет случайной составляющей нагрузки приводит к значительному разбросу амплитуд колебаний на второй частоте, который может достигать 14% относительно среднего значения.

Т а б л и ц а 2

Значения МО, дисперсий и максимального разброса амплитуд колебаний

№ точки на рис. 1,а	№ возбуждаемой формы колебаний	Дисперсия, м ²	Максимальный разброс, м	Математическое ожидание, м	Процентное отношение, %
1	2	$5,02 \cdot 10^{-23}$	$2,12 \cdot 10^{-11}$	$2,15 \cdot 10^{-9}$	0,988
3	1	$3,11 \cdot 10^{-20}$	$5,29 \cdot 10^{-10}$	$0,51 \cdot 10^{-9}$	1,040
3	2	$7,13 \cdot 10^{-23}$	$2,53 \cdot 10^{-11}$	$9,55 \cdot 10^{-9}$	0,265
5	2	$1,33 \cdot 10^{-21}$	$1,09 \cdot 10^{-10}$	$0,80 \cdot 10^{-9}$	13,670

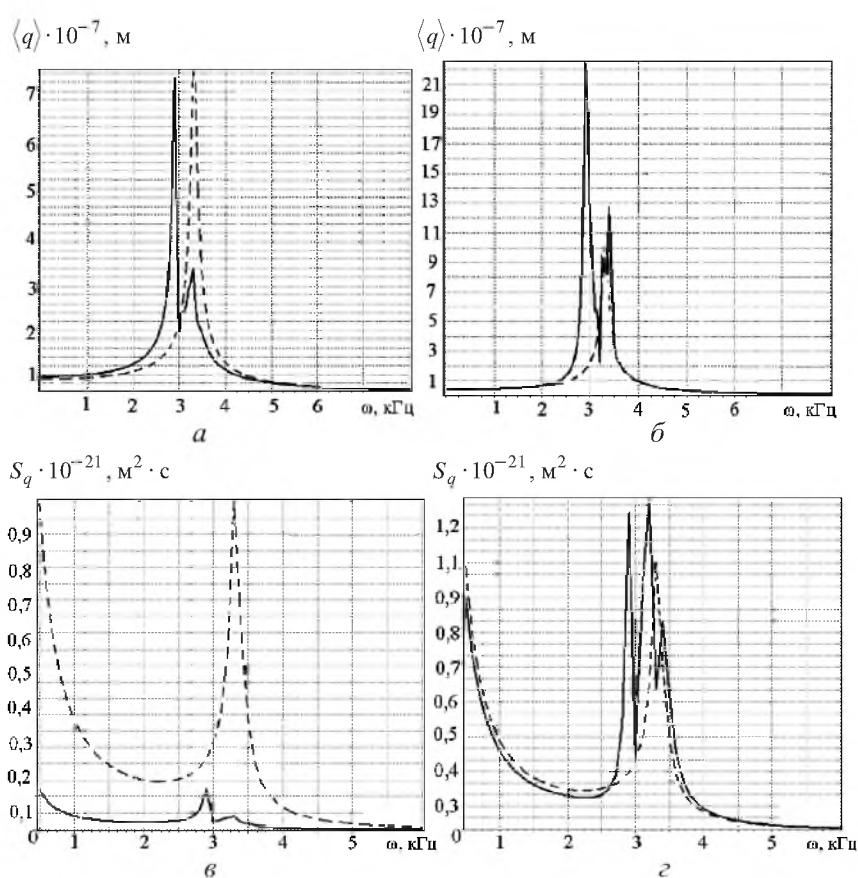


Рис. 5. Результаты решения задачи вынужденных случайных колебаниях лопаточного аппарата с учетом расстройки: а, б – МО амплитуд перемещений для 1-й точки первого и пятого секторов соответственно; в, г – спектральная плотность 1-й точки первого и пятого секторов соответственно. (Штриховые линии – результаты для ЦСС.)

3.2. Случайные колебания лопаточного аппарата с расстройкой. Проведенные ранее [6] исследования показывают, что технологические особенности сборки лопаток значительно влияют на характер статического напряженно-деформированного состояния и спектр собственных частот циклически симметричной модели ступени. В настоящей работе предполагается,

что расстройка исследуемого рабочего колеса обусловлена наличием технологических зазоров в бандажном соединении, что вызывает нарушение симметрии бандажной полки по изгибной жесткости. Был проведен качественный анализ динамического поведения такой колебательной системы под действием вышеописанной случайной нагрузки (рис. 5).

Возникновение большого числа резонансных пиков в математическом ожидании амплитуд перемещений и спектральной плотности можно объяснить проявлением двух процессов, характерных для систем с нарушенной циклической симметрией, а именно: расслоением кратных частот и потерей ортогональности между пространственной формой нагрузки и собственными формами колебаний расстроенной системы. Формы вынужденных случайных колебаний, соответствующие дополнительным резонансным пикам, обладают четко выраженной локализацией. Таким образом, эффект локализации форм колебаний в системах с расстройкой имеет место как при случайном воздействии, так и при детерминированном [7].

Выводы

1. Предложен подход к решению задачи случайных колебаний системы с нарушенной циклической симметрией на основе модели одного сектора.
2. Решена задача статистической динамики на основе моделей лопаточного аппарата, представляющих системы с конструктивной циклической симметрией и с расстройкой, в рамках корреляционной теории.
3. Показано, что в расстроенных системах могут возникать новые опасные резонансные состояния, вызванные расслоением спектра собственных частот колебаний и потерей ортогональности между пространственной формой нагрузки и собственными формами колебаний.

Резюме

Досліджуються випадкові гармонічні коливання робочого ступеня парової турбіни з урахуванням розладу. Запропоновано підхід до визначення математичного сподівання і спектральної щільності переміщень системи на основі моделі одного сектора.

1. *Иванов В. П.* Колебания рабочих колес турбомашин. – М.: Машиностроение, 1983. – 224 с.
2. *Болотин В. В.* Случайные колебания упругих систем. – М.: Наука, 1979. – 336 с.
3. *Petrov E. P., Sanliturk K. Y., and Ewins D. J.* A new method for dynamic analysis of mistuned blade disk based on the extract relationships between tuned and mistuned systems // *Trans. ASME, J. Eng. Gas Turb. Power.* – 2002. – No. 4. – P. 586 – 597.
4. *Костюк А. Г.* Динамика и прочность турбомашин. – М.: Машиностроение, 1982. – 264 с.
5. *Хинце И. О.* Турбулентность. Ее механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.

6. *Жовдак В. А., Кабанов А. Ф., Ларин А. А., Степченко А. С.* Исследование влияния бандажного соединения на статические и динамические характеристики лопаточного аппарата на основе трехмерных моделей // Вестн. НТУ "ХПИ". – 2005. – № 21. – С. 9 – 16.
7. *Зиньковский А. П., Бусленко И. Н., Матвеев В. В.* Локализация колебаний бандажированного лопаточного венца рабочего колеса турбомашин // Пробл. прочности. – 1994. – № 7. – С. 53 – 61.

Поступила 25. 10. 2007