

## **Конечноэлементная модель для исследования колебаний стержня с закрывающейся трещиной**

**О. А. Бовсуновский**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Представлена конечноэлементная модель вынужденных колебаний стержня с закрывающейся трещиной. Рассмотрены особенности численного решения и методы его ускоренной реализации. Приведены результаты экспериментальной оценки достоверности модели.*

**Ключевые слова:** закрывающаяся трещина, нелинейные резонансы, диагностика повреждений.

**Введение.** Наиболее распространенным видом повреждения конструкций, подверженных динамическому нагружению, является трещина усталости. При циклическом деформировании упругого тела такая трещина имеет свойство открываться на полцикле растяжения и закрываться на полцикле сжатия, изменяя тем самым его жесткость в процессе циклического деформирования. Обычно изменение жесткости моделируется несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы [1, 2] или характерным изменением вынуждающей силы [3].

Закрывающаяся трещина, обуславливая существенную нелинейность колебательной системы, создает ряд трудностей при аналитическом решении задачи о вынужденных колебаниях такой системы. Сложность аналитического решения задачи о колебаниях тел с трещиной, а также наличие проблем при оценке и прогнозировании изменения их вибрационных характеристик приводят к необходимости использования численных методов решения указанных задач. При решении задач подобного класса широко применяется метод конечных элементов.

В настоящей работе предлагается конечноэлементная (КЭ) модель стержня с закрывающейся трещиной, используемая для решения задачи о его вынужденных колебаниях. Рассматривается метод решения дифференциальных уравнений движения и на основании сопоставления результатов расчетов с данными экспериментов оценивается достоверность модели.

**Конечноэлементная модель стержня с закрывающейся трещиной.** Данная конечноэлементная модель стержня с краевой поперечной закрывающейся трещиной (рис. 1) основана на КЭ-модели, рассмотренной в работе [4]. Предполагается, что трещина влияет только на жесткость стержня и не влияет на его массу и демпфирующую способность. Влияние трещины на механические свойства упругого тела учитывается путем эквивалентного изменения жесткости одного из элементов КЭ-модели, который условно называется поврежденным. Трещина моделируется модификацией матрицы жесткости этого элемента.

Полагаем также, что жесткость упругого тела в моменты открытия и закрытия трещины изменяется мгновенно. Таким образом, в процессе колебаний стержень может находиться либо в условно неповрежденном состоя-

нии (трещина закрыта), либо в поврежденном состоянии (трещина открыта). Для каждого состояния стержня составляется своя матрица жесткости. Когда трещина закрыта, ее влияние на жесткость стержня не учитывается, в этом случае матрица жесткости вычисляется так же, как и для стержня без трещины. Когда трещина открыта, в матрицу жесткости включается элемент с модифицированной жесткостью, моделирующий трещину.

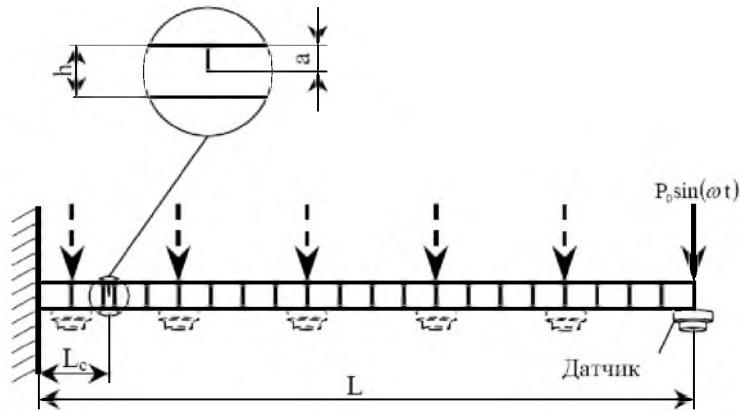


Рис. 1. Модель стержня с закрывающейся трещиной.

Эквивалентная жесткость элемента, моделирующего трещину, определяется методом, основанным на балансе энергий деформации. С одной стороны, изменение потенциальной энергии в сечении с трещиной определяется с помощью подходов механики разрушения через коэффициенты интенсивности напряжений, с другой – методом классической механики через податливость упругого элемента.

Элементы матрицы податливости элемента без трещины  $[C_e]$  вычисляются по формуле

$$[C_e^{(0)}] = \frac{l}{6EI_p} \begin{bmatrix} 2l^2 & 3l \\ 3l & 6 \end{bmatrix},$$

где  $l$  – длина элемента;  $E$  – модуль упругости;  $I_p$  – полярный момент инерции.

Элементы матрицы податливости элемента с трещиной  $[C_e]$  определяются следующим образом:

$$c_{ik} = c_{ik}^{(0)} + c_{ik}^{(1)}. \quad (1)$$

Здесь  $c_{ik}^{(0)}$  – элементы матрицы податливости неповрежденного элемента  $[C_e^{(0)}]$ ;  $c_{ik}^{(1)}$  – элементы матрицы дополнительной податливости  $[C_e^{(1)}]$ , которые при наличии трещины находятся так:

$$c_{ik}^{(1)} = \frac{\partial U^{(1)}}{\partial P_i \partial P_k} = c_{ki}^{(1)}, \quad i, k = 1, 2; \quad P_1 = P; \quad P_2 = M, \quad (2)$$

где  $P$ ,  $M$  – поперечная сила и изгибающий момент, действующие на элемент;  $\partial U^{(1)}$  – дополнительная энергия деформации, обусловленная наличием трещины, при изгибе стержня она имеет вид

$$\partial U^{(1)} = b \int_0^a \frac{K_{IM}^2}{E} da, \quad (3)$$

где  $K_{IM}$  – коэффициент интенсивности напряжений при растяжении;  $a$  – глубина трещины;  $b$  – ширина поперечного сечения.

В выражении (3) коэффициент интенсивности напряжений вычислялся по формуле Черепанова [5]:

$$K_{IM} = \frac{4,2M}{bh^{3/2}} \sqrt{(1-\gamma)^{-3} - (1-\gamma)^3}, \quad (4)$$

где  $\gamma = a/h$ ;  $h$  – высота поперечного сечения.

В результате матрица жесткости элемента с трещиной принимает вид

$$[K_{me}] = [T][C_e]^{-1}[T]^T, \quad (5)$$

где  $[T]$  – матрица преобразования системы зависимых узловых сил в систему независимых,

$$[T] = \begin{bmatrix} -1 & -l & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

**Уравнение движения.** Наличие трещины усталости приводит к периодическому изменению жесткости тела в процессе колебаний, которое характеризуется несимметричной кусочно-линейной восстанавливающей силой. Уравнение движения для тела с такой характеристикой восстанавливающей силы задается двумя системами дифференциальных уравнений, одна из них описывает колебания тела с закрытой трещиной, другая – с открытой:

$$\begin{cases} [M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [K_u]\{x\} = \{P\}F(t), & \delta = 0; \\ [M]\{\ddot{x}\} + [D]\{\dot{x}\} + [K_d]\{x\} = \{P\}F(t), & \delta = 1, \end{cases} \quad (6)$$

где параметр  $\delta$  определяет состояние трещины,  $\delta = 1$ , если трещина открыта,  $\delta = 0$ , если закрыта;  $\{x\}$  – вектор обобщенных узловых перемещений;  $[M]$  – глобальная матрица масс;  $[D]$  – глобальная матрица демпфирования;  $[K_u]$ ,  $[K_d]$  – глобальные матрицы жесткости тела с закрытой и открытой трещиной соответственно;  $\{P\}$  – вектор узловых нагрузок;  $F(t)$  – функция вынуждающей силы. Здесь и далее матрицы, соответствующие неповрежденному состоянию стержня, приведены с индексом  $u$ , матрицы, соответствующие поврежденному состоянию стержня, – с индексом  $d$ .

При численном решении системы дифференциальных уравнений (6) на каждом временном шаге определяли состояние трещины, т.е. параметр  $\delta$ . В случае изгибных колебаний этот параметр оценивали по относительной величине углов поворотов сечений слева ( $\varphi^I$ ) и справа ( $\varphi^{II}$ ) от элемента с трещиной. Если  $\varphi^I < \varphi^{II}$ , трещина закрыта ( $\delta = 0$ ), если  $\varphi^I > \varphi^{II}$ , трещина открыта ( $\delta = 1$ ).

Численное решение уравнений движения (6) требует больших вычислительных ресурсов. Существенная экономия времени вычисления достигается за счет их решения в главных или нормальных координатах. Полученное решение преобразуется в исходные узловые координаты.

В нормальных координатах система уравнений движения (6) принимает вид

$$\begin{cases} [I_u]\{\ddot{q}\} + [\Lambda_u]\{\dot{q}\} + [\omega_u^2]\{q\} = \{R_u\}F(t), & \delta = 0; \\ [I_d]\{\ddot{q}\} + [\Lambda_d]\{\dot{q}\} + [\omega_d^2]\{q\} = \{R_d\}F(t), & \delta = 1, \end{cases} \quad (7)$$

где  $\{q\}$  – главная координата;  $[I_u]$ ,  $[I_d]$  – матрицы масс в главных координатах;  $[\omega_u^2]$ ,  $[\omega_d^2]$  – матрицы собственных частот в главных координатах;  $[\Lambda_u]$ ,  $[\Lambda_d]$  – матрицы демпфирования в главных координатах;  $\{R_u\}$ ,  $\{R_d\}$  – векторы вынуждающих сил.

Уравнение движения (6) преобразуется к виду (7) с помощью следующих соотношений:

$$\begin{aligned} [I_u] &= [\Phi_u]^T [M] [\Phi_u]; & [I_d] &= [\Phi_d]^T [M] [\Phi_d]; \\ [\omega_u^2] &= [\Phi_u]^T [K] [\Phi_u]; & [\omega_d^2] &= [\Phi_d]^T [K_d] [\Phi_d]; \\ [\Lambda_u] &= [\Phi_u]^T [D] [\Phi_u]; & [\Lambda_d] &= [\Phi_d]^T [D_d] [\Phi_d]; \\ \{R_u\} &= [\Phi_u]^T \{P\}; & \{R_d\} &= [\Phi_d]^T \{P\}, \end{aligned}$$

где  $[\Phi_u]$  – матрица форм колебаний стержня с закрытой трещиной;  $[\Phi_d]$  – матрица форм колебаний стержня с открытой трещиной.

Матрицы форм колебаний находятся из решения задачи на собственные значения для стержня с закрытой и открытой трещиной для всех собственных значений  $\lambda_i$ . При этом собственный вектор  $\{\Phi\}$ , соответствующий собственному значению  $\lambda_i$ , будет представлять  $i$ -й столбец матрицы форм колебаний. Для стержня с закрытой трещиной матрицы форм колебаний получают из равенства

$$K_u \{\Phi_{ui}\} = \lambda_i M_u \{\Phi_{ui}\},$$

для стержня с открытой трещиной –

$$K_d \{\Phi_{di}\} = \lambda_{di} M \{\Phi_{di}\}.$$

Преимуществом такого преобразования является диагональный вид матриц  $[I]$ ,  $[\Lambda]$  и  $[\omega^2]$ , что дает ощутимое ускорение решения уравнения движения.

Главные координаты  $\{q\}$  выражают количество каждой из форм колебаний в колебательном процессе, а сами формы колебаний для поврежденного и неповрежденного состояний стержня отличаются. Следовательно, две системы дифференциальных уравнений, входящие в уравнение движения (7), решаются в разных координатах. Поэтому на каждом временном шаге, на котором происходит изменение состояния трещины, необходимо вычислять начальные условия. Если на  $i$ -м временном шаге состояние трещины изменилось, то начальные условия для следующего  $i+1$ -го шага рассчитываются по формулам

$$\{q_i\}_d = [\Phi_d]^{-1}[\Phi_u]\{q_i\}_u; \quad (8)$$

$$\{q_i\}_u = [\Phi_u]^{-1}[\Phi_d]\{q_i\}_d. \quad (9)$$

Формула (8) используется при открытой трещине, формула (9) – при закрытой.

**Оценка достоверности КЭ-модели.** На результат расчетов колебаний тел с закрытой трещиной существенное влияние оказывает разбиение тела на элементы. Поэтому для оценки достоверности использовали две модели, различающиеся КЭ-сетками. Первая модель имела сетку с уменьшенной длиной элемента, моделирующего трещину, вторая – равномерную сетку. Преимуществом первой модели является возможность более точного задания местоположения трещины.

Достоверность КЭ-модели оценивали при сопоставлении результатов расчета относительного изменения собственных частот колебаний консольного стержня с краевой трещиной по первой форме изгибных колебаний с данными экспериментов (таблица).

Обе модели удовлетворительно работают в диапазоне относительной глубины трещины  $\gamma \leq 0,5$ . Однако первая модель более точно описывает изменение первой собственной частоты колебаний.

Следует отметить, что отличие расчетных данных от экспериментальных прямо зависит не только от относительной глубины трещины  $\gamma$ , но и от отдаления трещины от заделки  $L_c$ : чем больше отношение  $L_c/L$ , тем меньше значение  $\varepsilon$ . Объяснить это можно уменьшением изменения жесткости системы и, как следствие, уменьшением возмущений системы в моменты открытия и закрытия трещины.

Расчетные результаты получены с использованием модели, состоящей из 21 элемента. Дальнейшее увеличение элементов неоправданно, поскольку существенного изменения результатов не наблюдается.

Оценка достоверности модели показывает ее способность выявлять нелинейные резонансы, в частности супергармонический резонанс порядка 2/1 и субгармонический резонанс порядка 1/2 (расчеты проводили для стержня со следующими параметрами:  $L = 0,23$  м;  $L_c/L = 0,1$ ;  $h = 0,02$  м;  $b = 0,004$  м;  $E = 206$  ГПа;  $\rho = 7850$  кг/м<sup>3</sup>;  $\delta = 0,01$ ). Результаты этих расчетов представлены на рис. 2. Как видно, амплитуды супергармонического и субгармонического резонансов соответственно в 144 и 299 раз меньше ампли-

**Экспериментальные и расчетные значения относительного изменения собственной частоты колебаний моделей стержня с закрывающейся трещиной**

$L_c/L$	$\gamma$	$\Delta f_{exp}$ (эксп)	$\Delta f_1$ (первая модель)	$\Delta f_2$ (вторая модель)	$\varepsilon_1, \%$ (первая модель)	$\varepsilon_2, \%$ (вторая модель)
15X2НМФА (220×13,8×4 мм) [6]						
0,077	0,101	0,999	0,998	0,996	-0,06%	-0,28%
	0,232	0,974	0,981	0,979	0,67%	0,52%
	0,362	0,942	0,945	0,945	0,34%	0,32%
	0,507	0,828	0,877	0,878	5,94%	6,15%
	0,652	0,645	0,761	0,765	18,00%	18,62%
0,155	0,244	0,988	0,981	0,981	-0,70%	-0,66%
	0,347	0,969	0,957	0,959	-1,16%	-0,94%
	0,486	0,882	0,904	0,910	2,59%	3,23%
0,277	0,101	0,997	1,000	0,997	0,33%	0,08%
	0,217	0,991	0,991	0,988	0,03%	-0,21%
	0,312	0,983	0,977	0,975	-0,55%	-0,75%
	0,406	0,963	0,956	0,954	-0,67%	-0,84%
	0,500	0,933	0,924	0,954	-0,90%	2,35%
Сталь АТСТS-1018 (330×25×25 мм) [7]						
0	0,250	0,924	0,973	0,975	5,30%	5,54%
	0,500	0,871	0,884	0,894	1,53%	2,71%
	0,750	0,725	0,723	0,741	-0,26%	2,29%
0,18	0,250	0,947	0,983	0,983	3,90%	3,83%
	0,500	0,901	0,924	0,925	2,66%	2,74%
	0,750	0,830	0,799	0,801	-3,70%	-3,38%

**Примечание.**  $\Delta f_{exp}$ ,  $\Delta f_1$  и  $\Delta f_2$  – относительное изменение собственной частоты, обусловленное наличием трещины;  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – относительное отличие экспериментальных данных от расчетных для первой и второй моделей.

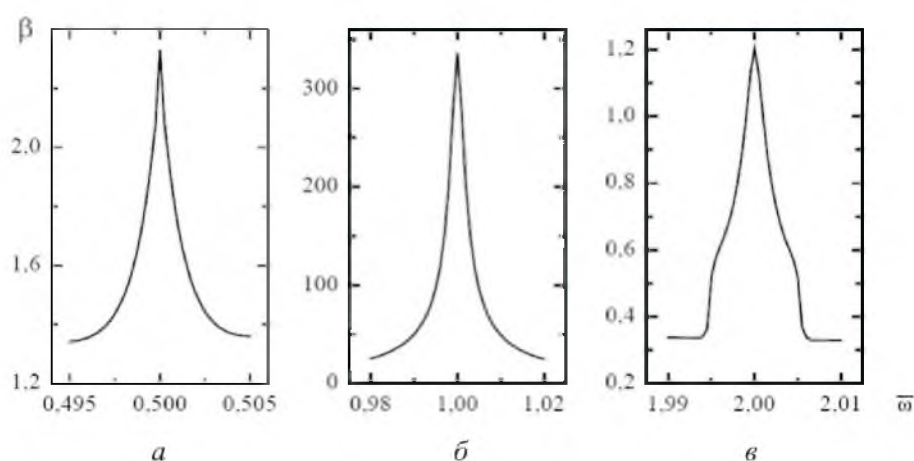


Рис. 2. Зависимость коэффициента динамичности  $\beta$  от относительной частоты вынуждающей силы  $\bar{\omega}$  при супергармоническом (а), основном (б) и субгармоническом (в) резонансах.

туды основного резонанса. Различие между амплитудами основного и нелинейных резонансов уменьшается с ростом трещины и уровня демпфирования. В любом случае амплитуды нелинейных резонансов слишком малы для использования их с целью диагностики повреждений.

## Выводы

1. КЭ-модель стержня с краевой закрывающейся трещиной позволяет исследовать его вынужденные колебания.

2. Предложен способ ускорения решения дифференциальных уравнений движения, заключающийся в приведении их к главным координатам с учетом изменения последних в моменты открытия и закрытия трещины.

3. Оценка достоверности КЭ-модели показывает, что с ее помощью можно с достаточной точностью прогнозировать изменение собственных частот колебаний стержня с трещиной и описывать нелинейные резонансы.

## Резюме

Представлено скінченноелементну модель вимушених коливань стержня з тріщиною, що закривається. Розглянуто особливості числового розв'язку і методи прискорення його реалізації. Наведено результати експериментальної оцінки достовірності моделі.

1. *Zastrau B.* Vibration of cracked structures // Arch. Mech. – 1985. – **37**, No. 6. – P. 731 – 743.
2. *Wong C. W., Zhang W. S., and Lau S. L.* Periodic forced vibration of unsymmetrical piecewise-linear systems by incremental harmonic balance method // J. Sound Vibration. – 1991. – **149**, No. 1. – P. 91 – 105.
3. *Maetzawa S. and Furukawa S.* Superharmonic resonance in piecewise linear system // Bull. JSME. – 1973. – **16**, No. 96. – P. 931 – 941.
4. *Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D.* Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // Comp. Struct. – 1996. – **61**, No. 6. – P. 1057 – 1074.
5. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. – М.: Наука, 1974. – 640 с.
6. *Бовсуновский А. П.* К вопросу об определении собственной частоты поперечных и продольных колебаний стержня с трещиной. Сообщ. 2. Результаты эксперимента и расчета // Пробл. прочности. – 1999. – № 3. – С. 45 – 54.
7. *Ismail F., Ibrahim A., and Martin H. R.* Identification of fatigue cracks from vibration testing // J. Sound Vibration. – 1990. – **140**, No. 2. – P. 305 – 317.

Поступила 25. 10. 2007