

УДК 534.213:534.232.74

## ВОЗБУЖДЕНИЕ ВОЛН РЭЛЕЯ В МЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПОЛОСЕ, ПОЛЯРИЗОВАННОЙ ПОСТОЯННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

О. Н. ПЕТРИЩЕВ

*Национальный технический университет Украины “КПИ”, Киев**Получено 02.06.2005*

Предложен физически обоснованный подход к построению математических моделей процесса возбуждения ультразвуковых волн электромагнитным полем в металлах, поляризованных постоянным магнитным полем. Продуктивность и практическая значимость этого подхода показана на примере моделирования частотных характеристик преобразователей электромагнитного типа в режиме возбуждения поверхностных волн Рэлея. Показано, что математические модели ультразвуковых преобразователей, построенные на основе предлагаемой методики, учитывают основные геометрические параметры преобразователя, материальные константы металла и особенности распространения ультразвуковых волн в упругих телах.

Запропоновано фізично обґрунтований підхід до побудови математичних моделей процесу збудження ультразвукових хвиль електромагнітним полем у металах, поляризованих постійним магнітним полем. Продуктивність і практичну значимість цього підходу показано на прикладі моделювання частотних характеристик перетворювачів електромагнітного типу в режимі збудження поверхневих хвиль Релея. Показано, що математичні моделі ультразвукових перетворювачів, побудованих на основі запропонованої методики, враховують основні геометричні параметри перетворювача, матеріальні константи металу і особливості поширення ультразвукових хвиль у пружних тілах.

A physically justified approach to developing the mathematical models of the process of ultrasonic wave excitation by electromagnetic field in metals polarized by magnetostatic field is proposed. Productivity and practical significance of this approach is demonstrated on the example of simulating the frequency characteristics of electromagnetic transducers under the condition of surface Rayleigh wave excitation. It is demonstrated that mathematical models of ultrasonic transducers, designed on the basis of the offered method, take into account geometrical parameters of the basic transducer, material constants of the metal and features of propagation of ultrasonic waves in elastic bodies.

### ВВЕДЕНИЕ

Поверхностные волны, существование которых теоретически обосновал Дж. В. Стретт (лорд Рэлей) [1], в последнее время интенсивно используются для решения широкого круга практических задач в области неразрушающего контроля металлических изделий. Прежде всего, речь идет о контроле качества рабочей поверхности вагонных колес [2], сосудов высокого давления и трубопроводов [3]. Известны предложения по использованию поверхностных волн Рэлея в тензометрии [4]. Наиболее часто для ультразвуковой томографии металлических изделий [5] используются так называемые электромагнитно-акустические преобразователи (electromagnetic acoustic transducers – EMATs). Несколько менее распространены (по всей вероятности, в силу сравнительно малой изученности) магнитострикционные преобразователи [6]. Традиционно ультразвуковые преобразователи электромагнитного типа рассматриваются, в первую очередь, как источники упругих возмущений в металлах неферромагнитной группы [7], где единственным механизмом генерации упругих возмущений служат силы Лоренца [8, 9]. Вместе с тем, большинство конструкционных металлов

представляют собой сплавы на основе железа, которые, как правило, являются ферромагнетиками. Общеизвестно, что все без исключения ферромагнетики обладают доменной структурой и, стало быть, проявляют свойства магнитострикционных материалов. В магнитных полях порядка единиц килоампер на метр, которые не доводят ферромагнетик до магнитного насыщения, в качестве механизма деформирования доминирует прямой магнитострикционный эффект (эффект Джоуля). Обусловленные им деформации, как минимум, на два порядка превосходят уровни деформаций, возникающих в ферромагнитном металле из-за действия сил Лоренца.

Эффективное использование ныне существующих и разработка новых ультразвуковых устройств неразрушающего контроля металлов, в которых используются поверхностные волны Рэлея и другие типы упругих волн, существенно осложняются практически полным отсутствием теоретического обеспечения, адекватного запросам практики. Несмотря на то, что в различных научных и технических журналах опубликованы сотни статей, изданы специальные монографии (см., например, [10]), к сожалению, можно утверждать, что в настоящее время отсутствуют содер-

жательные, в смысле практических приложений, модели процесса возбуждения ультразвуковых волн электромагнитным полем в намагниченных металлах. В результате этого остается без ответа основной для пользователей ультразвуковой аппаратуры вопрос о том, как влияют форма и размеры источника электромагнитного поля в составе электромагнитного ультразвукового преобразователя на эффективность возбуждения того или иного типа упругих волн в заданном диапазоне частот.

В данной работе предлагается метод построения математических моделей процесса возбуждения упругих волн в поляризованных постоянным магнитным полем ферромагнитных металлах.

### 1. ПРИНЦИПЫ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПРОЦЕССА ВОЗБУЖДЕНИЯ УПРУГИХ ВОЛН В ПОЛЯРИЗОВАННЫХ ПОСТОЯННЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ МЕТАЛЛАХ

Процесс возбуждения ультразвуковых волн в металлах можно формализовать в виде следующего алгоритма преобразования сигналов:

$$U_{\text{вх}}(t) \rightarrow I^*(t) \rightarrow \vec{H}^*(x_k, t) \begin{matrix} \downarrow \\ \left( \begin{matrix} c_{ijkl}^H, \rho_0, r_{nm} \\ m_{pqkl}, \mu_{rs}^\varepsilon \end{matrix} \right) \rightarrow \vec{u}(x_m, t), \quad (1) \\ \uparrow \\ \vec{H}^0(x_k) \end{matrix}$$

где  $U_{\text{вх}}(t)$  – входное воздействие – разность электрических потенциалов на электрическом входе (клеммах электрического контура) ультразвукового преобразователя электромагнитного типа;  $I^*(t)$  – изменяющийся во времени  $t$  электрический ток в электрическом контуре преобразователя;  $\vec{H}^*(x_k, t)$  – вектор напряженности переменного магнитного поля, создаваемого электрическим контуром ультразвукового преобразователя в точке с координатами  $x_k = (x_1, x_2, x_3)$  в правовинтовой (физической) прямоугольной системе координат;  $\vec{H}^0(x_k)$  – вектор напряженности постоянного поля подмагничивания. Для металлов неферромагнитной группы ориентация этого поля определяет направление вектора объемной плотности сил Лоренца в точке  $x_k$ , для ферромагнетиков вектор  $\vec{H}^0(x_k)$  определяет структуру матрицы пьезомагнитных констант и, стало быть, характер напряженно-деформированного состояния металла в ближайшей окрестности этой точки. В больших скобках в алгоритме (1) записаны физико-механические константы металла в области сов-

местного действия переменного и постоянного магнитных полей:  $c_{ijkl}^H$  – компонента тензора модулей упругости, экспериментально определяемых в режиме постоянства напряженности магнитного поля;  $\rho_0$  – плотность металла;  $r_{mn}$  – компонента тензора электрической проводимости металла;  $m_{pqkl}$  – компонента тензора магнитоэлектрических констант;  $\mu_{rs}^\varepsilon$  – компонента тензора магнитной проницаемости, экспериментально определяемый в режиме постоянства деформаций при заданном уровне напряженности поля подмагничивания. В результате воздействия полей  $\vec{H}^*(x_k, t)$  и  $\vec{H}^0(x_k)$  в объеме металла с указанными константами возникает напряженно-деформированное состояние, энергия которого уносится упругими волнами от источника переменного магнитного поля. Упругие волны (отклик преобразователя) идентифицированы в алгоритме (1) вектором  $\vec{u}(x_m, t)$  смещения материальной частицы металла в момент времени  $t$ , наблюдаемого в точке с координатой  $x_m$  за пределами области существования переменного магнитного поля.

Если электрический вход (по терминологии Харкевича [11] – электрическая сторона) электромагнитного ультразвукового преобразователя определяется конструктивно как клеммы электрического контура источника переменного магнитного поля, то относительно механической стороны, или механического выхода, необходимо принять некоторые соглашения. Поскольку отклик ультразвукового преобразователя представляют собой смещения материальных частиц, т. е. векторы  $\vec{u}(x_m, t)$ , то под его механическим выходом условимся понимать любую точку с координатами  $x_m$ , расположенную за пределами области существования переменного магнитного поля.

Таким образом, ультразвуковой преобразователь электромагнитного типа – это система с распределенными параметрами, состоящая из источников переменного и постоянного магнитных полей и некоторого конечного объема металла, в котором, собственно, и происходит преобразование энергии электромагнитного поля в энергию упругих колебаний материальных частиц континуума. Формально переменное магнитное поле такого преобразователя существует во всем пространстве и обращается в нуль в бесконечно удаленной точке. Вместе с тем, необходимо принимать к сведению и то, что уровни напряженности переменного магнитного поля резко уменьшаются по мере удаления от источника. Так, при удалении от катушки на расстояние в две–три ее длины напряженность поля уменьшается более, чем на два порядка. При дальнейшем уходе от источника амплитуда пере-

менного магнитного поля падает ниже фонового внутреннего магнитного поля, которое возникает в процессе деформирования намагниченного металла и полностью определяет здесь магнитное состояние металла. Таким образом, можно говорить, что процесс преобразования энергии электромагнитного поля в энергию упругих колебаний материальных частиц металла локализован в объеме, протяженность которого составляет несколько характерных размеров электрического контура источника переменного магнитного поля. При расчете переменного магнитного поля, возбуждаемого электромагнитным ультразвуковым преобразователем, границы этой области приобретают смысл “технической бесконечности”.

Для определения последовательности вычислительных процедур, выполнение которых позволит аналитически связать воздействие и отклик преобразователя, рассмотрим процессы, происходящие в намагниченном металле при воздействии на него переменного магнитного поля.

Если переменное магнитное поле изменяется во времени по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$ , то в металле возникает режим установившихся колебаний. При этом амплитудные значения компонентов вектора смещения материальных частиц  $u_n(x_k)$  удовлетворяют уравнениям механики

$$\sigma_{mn,m} + L_n - \rho_0 \omega^2 u_n = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (2)$$

а электромагнитные поля, которые возникают в объеме  $V$  деформируемого металла, – уравнениям Максвелла в квазистационарной формулировке

$$\varepsilon_{lpk} E_{k,p} + i\omega B_l = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (3)$$

$$\varepsilon_{lpk} H_{k,p} - J_l = 0 \quad \forall x_k \in V, \quad (4)$$

причем компоненты вектора  $\vec{B}$  удовлетворяют условиям

$$B_{l,l} = 0 \quad \forall x_k \in V. \quad (5)$$

В соотношениях (2)–(5) приняты следующие обозначения:  $\sigma_{mn}$  – компонента тензора механических напряжений; запятая между индексами означает дифференцирование записанного до запятой выражения по координате, индекс которой представлен после запятой;  $L_n$  –  $n$ -ый компонент силы Лоренца;  $\rho_0$  – плотность металла;  $\varepsilon_{lpk}$  – компонента тензора Леви–Чивиты;  $E_k$  и  $H_k$  – компоненты векторов напряженности электрического и магнитного поля, возникающее в деформируемом металле (в дальнейшем будем называть внутренним электромагнитным полем);  $B_l$  – компоненты вектора индукции магнитного поля. При записи

формулы (4) учтено, что токами смещения в электропроводящей среде можно пренебречь.

Уравнения движения (2) и уравнения Максвелла (3)–(5) для металлов ферромагнитной группы связаны между собой уравнениями состояния магнитоэластичной среды [12]. Последние для гармонически изменяющихся во времени составляющих магнитоупругого поля при умеренных напряжениях постоянного и переменного магнитных полей, удовлетворяющих неравенству  $|\vec{H}^0(x_k)| > |\vec{H}^*(x_k)|$ , можно представить в следующем виде:

$$\sigma_{mn} = c_{mnkl}^H u_{k,l} - m_{pqmn} H_p^0 (H_q + H_q^*), \quad (6)$$

$$B_s = m_{nskl} H_n^0 u_{k,l} + \mu_{sm}^\varepsilon (H_m^* + H_m). \quad (7)$$

Здесь  $c_{mnkl}^H$  и  $m_{pqmn}$  – компоненты тензоров модулей упругости и магнитоэластичных констант размагниченного ферромагнетика;  $\mu_{sm}^\varepsilon$  – компонента тензора магнитной проницаемости “зажатого” (недеформируемого) ферромагнетика. Компоненты  $H_p^0$  и  $H_p^*$  удовлетворяют уравнениям магнитостатики и электродинамики по определению. Поэтому они не фигурируют в уравнениях Максвелла (3), (4). Для поликристаллических материалов тензоры  $c_{mnkl}^H$  и  $m_{pqmn}$  являются изотропными тензорами четвертого ранга:

$$c_{mnkl}^H = \lambda^H \delta_{mn} \delta_{kl} + G^H (\delta_{mk} \delta_{nl} + \delta_{ml} \delta_{nk}),$$

$$m_{pqmn} = m_2 \delta_{pq} \delta_{mn} + (m_1 - m_2) (\delta_{pm} \delta_{ql} + \delta_{pl} \delta_{qm}) / 2.$$

Здесь  $\lambda^H$  и  $G^H$  – константы Ламе размагниченного ферромагнетика;  $\delta_{ij}$  – символы Кронекера;  $m_1$  и  $m_2$  экспериментально определяемые магнитоэластичные константы, причем  $m_1 \leq 1 \text{ Н/А}^2$  и  $-m_1/2 \leq m_2 < 0$ . Система уравнений (2)–(7) замыкается обобщенным законом Ома в дифференциальной форме, который в отсутствии сторонних электрических зарядов может быть записан в следующем линейном приближении:

$$J_l = r_{lk} [E_k^* + i\omega \varepsilon_{kpq} u_p (\mu_{qs}^\varepsilon H_s^0)]. \quad (8)$$

Здесь  $r_{lk}$  – компоненты тензора электрической проводимости ферромагнетика. При записи соотношения (8) учтено, что электрическое поле с напряженностью  $E_k^*$ , сопряженное с заданным изменением переменным магнитным полем  $\vec{H}^*(x_k)$ , превосходит напряженность электрического поля, которое возникает в результате деформирования токопроводящего ферромагнетика. В общем случае

произвольной структуры матрицы электрической проводимости компоненты вектора напряженности  $E_k^*$  определяются через компоненты вектора  $\vec{H}^*$  следующим образом:

$$E_m^* = \frac{\varepsilon_{mij}[(\varepsilon_s \ln H_{n,l}^*) \varepsilon_{spq} r_{qi} r_{pj}]}{2[\varepsilon_{sqr} r_{1s} r_{2q} r_{3r}]} \quad (9)$$

С учетом соотношений (8) и (9) выражение для расчета компонентов вектора сил Лоренца запишем следующим образом:

$$L_n = \varepsilon_{nls} \left\{ r_{lm} \frac{\varepsilon_{mij}[(\varepsilon_s \ln H_{n,l}^*) \varepsilon_{spq} r_{qi} r_{pj}]}{2[\varepsilon_{sqr} r_{1s} r_{2q} r_{3r}]} + \right. \\ \left. + i\omega \varepsilon_{lpq} u_p [\mu_{qs}^\varepsilon H_s^0] \right\} [\mu_{sp}^\varepsilon H_p^0] \quad (10)$$

В формулах (9) и (10) в квадратные скобки заключены суммы, которые вычисляются по отдельности.

Последняя запись позволяет объединить соотношения (2)–(7) и сформулировать следующую граничную задачу:

$$c_{mnkl}^H u_{k,lm} + \\ + i\omega \varepsilon_{nls} (r_{lk} \varepsilon_{kpq} u_p [\mu_{qs}^\varepsilon H_s^0]) [\mu_{sp}^\varepsilon H_p^0] - \\ - m_{pqmn} (H_p^0 H_q)_m - \rho_0 \omega^2 u_n + \\ + L_n^* + f_n^* = 0 \\ \forall x_k \in V, \quad (11)$$

$$\varepsilon_{lpk} E_{k,p} + i\omega (m_{plqs} H_p^0 u_{q,s} + \mu_{ln}^\varepsilon H_n) = 0 \\ \forall x_k \in V, \quad (12)$$

$$\varepsilon_{lpk} H_{k,p} - r_{lm} E_m - i\omega \varepsilon_{lrq} u_r (\mu_{qs}^\varepsilon H_s^0) = 0 \\ \forall x_k \in V. \quad (13)$$

Единственность решения системы уравнений (11)–(13) обеспечивается граничными условиями, которые в линейном приближении принимают вид

$$n_n (c_{mnkl}^H u_{k,l} - m_{pqmn} H_p^0 H_q^* - \\ - m_{pqmn} H_p^0 H_q + M_{mn}) = 0 \\ \forall x_k \in S, \quad (14)$$

$$n_s (m_{nskl} H_n^0 u_{k,l} + \mu_{sm}^\varepsilon H_m - \mu_0 \tilde{H}_s) = 0 \\ \forall x_k \in S, \quad (15)$$

$$\varepsilon_{ijk} n_j (H_k - \tilde{H}_k) = 0 \quad \forall x_k \in S. \quad (16)$$

При записи соотношений (11)–(16) приняты следующие обозначения:  $L_n^*$  – составляющая сил Лоренца, обусловленная исключительно токами проводимости (первое слагаемое в формуле (10));  $f_n^* = -m_{pqmn} (H_p^0 H_q^*)_m$ ;  $\vec{n}$  – вектор единичной нормали к поверхности  $S$ , ограничивающей объем  $V$  деформируемого металла;  $M_{mn}$  – компонента тензора напряжений Максвелла;  $\mu_0$  – магнитная проницаемость вакуума;  $\tilde{H}_m$  – компоненты вектора напряженности магнитного поля рассеяния, удовлетворяющие уравнению

$$\nabla^2 \vec{H} + (\omega/c_0)^2 \vec{H} = 0 \quad \forall x_k \notin V$$

в окружающем ферромагнетик пространстве ( $c_0$  – скорость распространения электромагнитного излучения в вакууме) и обращающиеся в нуль на бесконечности.

Так как для всех ферромагнитных металлов магнитострикционные эффекты являются доминирующим механизмом возбуждения упругих колебаний, то при записи уравнения (11) для ферромагнетика можно смело пренебречь вторым и пятым слагаемыми. Что касается составляющей  $m_{pqmn} (H_p^0 H_q)_m$ , то ее присутствие в уравнении установившихся колебаний (11) определяет связь магнитных и упругих полей в объеме деформируемого металла. Она проявляется, прежде всего, в изменении числовых значений модулей упругости (так называемый,  $\Delta E$ -эффект). Как показано в работе [13], последние приобретают добавки, не превосходящие 15 % номинальных значений  $c_{ijkl}^H$ . Указанное изменение жесткости намагниченного ферромагнетика сопровождается незначительным (не превышающим 7 %) изменением скоростей упругих волн. Помимо этого, при намагничивании изотропного ферромагнетика в нем возникает незначительная анизотропия упругих свойств.

В первом приближении всеми этими явлениями можно пренебречь, так как всегда выполняется сильное неравенство  $|\vec{H}^*| \gg |\vec{H}|$ . По этой же причине, как правило,  $|f_n^*| \gg |\vec{e}_n m_{pqmn} (H_p^0 H_q)_m|$  ( $\vec{e}_n$  – единичный орт декартовой системы координат) и уравнение установившихся колебаний (11) элемента объема ферромагнетика приобретает следующий вид:

$$c_{mnkl}^H u_{k,lm} - \rho_0 \omega^2 u_n + f_n^* = 0 \quad \forall x_k \in V. \quad (17)$$

Единственность решения системы уравнений (17) обеспечивается граничными условиями

$$n_n (c_{mnkl}^H u_{k,l} - \sigma_{mn}^*) = 0 \quad \forall x_k \in S, \quad (18)$$

где  $\sigma_{mn}^* = m_{pqmn} H_p^0 H_q^*$ .

Фактически, граничная задача магнитоупругости (11)–(16) распадается на две последовательно решаемые граничные задачи. Первая из них – задача (17), (18) о возбуждении упругих колебаний системой внешних нагрузок, распределенных в объеме металла с плотностью  $f^*(x_k)$  и по ограничивающий его объем поверхности с плотностью  $\sigma_{mn}^*$ . Ее решение позволяет найти амплитудные значения вектора смещения материальных частиц в объеме металлического образца по заданному переменному магнитному полю, характеристики которого однозначно определяются конструкцией источника в составе электромагнитного ультразвукового преобразователя.

Обратим внимание на то, что граничная задача динамической теории упругости (17), (18) формулируется одинаковым образом как для ферромагнетиков, так и для металлов неферромагнитной группы. Для последних роль объемных и поверхностных сил играют силы Лоренца и напряжения Максвелла. Для этой группы металлов решение граничной задачи (17), (18) формирует математическую модель процесса возбуждения ультразвуковых волн электромагнитным полем. Построение аналогичной модели для ферромагнетиков, помимо решения задачи (17), (18), предполагает решение граничной задачи (12), (13)–(15), (16) о внутреннем электромагнитном поле, которое индуцируется ультразвуковыми волнами в объеме деформируемого металла.

Решение граничной задачи (17), (18) является центральным моментом при построении математической модели электромагнитного ультразвукового преобразователя в режиме возбуждения ультразвуковых колебаний. Именно на этом этапе определяются амплитуды смещений материальных частиц  $\vec{u}^{(\pm)}(x_k, t)$  на механическом выходе преобразователя как функция воздействий на электрическом входе преобразователя и учитывается набор геометрических параметров источников переменного и постоянного (поляризующего ферромагнетик) магнитных полей.

Завершая обсуждение принципов построения математических моделей процесса возбуждения ультразвуковых волн электромагнитным полем, необходимо подчеркнуть, что существенное значение имеет последовательность выполнения вычислительных процедур. В первую очередь, в обязательном порядке, должна решаться граничная задача (17), (18). Опыт решения задач такого рода [14, 15] дает основания утверждать, что в составе их общих решений будут присутствовать Фурье-трансформанты компонентов вектора напряженности переменного магнитного поля

$\vec{H}^*(x_k, t)$ . Параметром интегрального преобразования служит волновое число распространяющейся ультразвуковой волны. Это дает возможность использовать интегральное преобразование с наперед известным параметром преобразования в ходе решения уравнений Максвелла для определения величин  $\vec{H}^*(x_k, t)$ . Это позволяет эффективно решать уравнения электродинамики для кусочно-однородных многосвязных областей и учитывать в определении характеристик переменного магнитного поля ультразвукового преобразователя основные физические параметры среды, в которой возбуждаются ультразвуковые колебания.

## 2. ВОЗБУЖДЕНИЕ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН РЭЛЕЯ В ФЕРРОМАГНИТНОЙ ПОЛОСЕ

Рассмотрим поликристаллическую полосу из ферромагнетика, расположенную в правовинтовой декартовой системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  так, что ее толщина отсчитывается вдоль оси  $Ox_3$  в области  $0 > x_3 > -\infty$ . Пусть в полосе создано плоскопараллельное, не зависящее от значений координаты  $x_1$ , постоянное магнитное поле, с напряженностью  $\vec{H}^0(x_2, x_3)$ . Помимо этого, будем считать, что в окрестности начала координат, в области, ограниченной плоскостями  $x_2 = \pm A$  (размер  $A$  имеет смысл “физической бесконечности” для переменного магнитного поля), действует плоскопараллельное, гармонически изменяющееся во времени по закону  $e^{i\omega t}$  ( $\omega$  – известная круговая частота) магнитное поле с амплитудным значением напряженности  $\vec{H}^*(x_2, x_3)$ . Уровни напряженностей постоянного и переменного магнитных полей в любой момент времени удовлетворяют сильному неравенству  $|\vec{H}^0(x_2, x_3)| \gg |\vec{H}^*(x_2, x_3)|$ .

Совместное действие постоянного и переменного магнитных полей деформирует ферромагнитную (магнитоstrictionную) полосу так, как если бы на ее поверхности и в объеме действовали переменные внешние силы с поверхностной и объемной плотностями  $\sigma_{nm}^* = m_{pqnm} H_p^0 H_q^*$  и  $f_m^* = m_{pqnm} (H_p^0 H_q^*)_{,n}$  соответственно. Если частота смены знака переменного магнитного поля такова, что длина волны упругих возмущений намного меньше толщины полосы, то в тонком, примыкающем к поверхности  $x_3 = 0$  слое полосы возбуждаются поверхностные волны Рэлея  $Ru_j^{(\pm)}(x_2, x_3) = Ru_j^{(\pm)}(x_3) e^{\pm i\gamma x_2}$ , где  $j = 2, 3$ . Амплитуды гармонически изменяющихся во времени смещений материальных частиц металла во фронте волны Рэлея будут  $Ru_j^{(\pm)}(x_3) = R^{(\pm)} \cdot \hat{R}u_j^{(\pm)}(x_3)$ ,

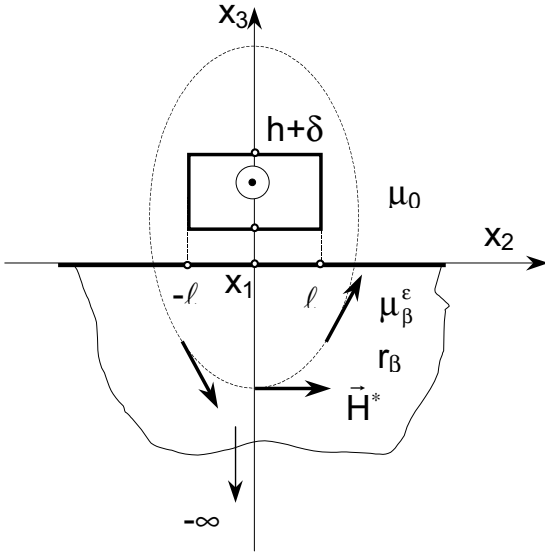


Рис. 1. К расчету амплитудного множителя волны Рэлея, возбуждаемой переменным магнитным полем одиночного электрода

где  $R^{(\pm)}$  – амплитудный множитель поверхностных волн, уходящих влево (верхний индекс “плюс”) и вправо (верхний индекс “минус”) от области приложения внешних сил;

$$\begin{aligned} R\hat{u}_2^{(\pm)}(x_3) &= \pm i\gamma \left( e^{\alpha x_3} - \frac{\gamma^2 + \beta^2}{2\gamma^2} e^{\beta x_3} \right), \\ R\hat{u}_3^{(\pm)}(x_3) &= \alpha \left( e^{\alpha x_3} - \frac{\gamma^2 + \beta^2}{2\alpha\beta} e^{\beta x_3} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  – волновые числа, связанные между собой условиями существования (дисперсионным уравнением) волн Рэлея

$$\Delta_R(\gamma^2) = (2\gamma^2 - k_t^2)^2 - 4\gamma^2\alpha\beta = 0$$

и дополнительными соотношениями вида  $\gamma^2 - \alpha^2 = k_l^2$ ,  $\gamma^2 - \beta^2 = k_t^2$ , где  $k_l$  и  $k_t$  – волновые числа невзаимодействующих волн сжатия – растяжения и сдвига. В работе [16] была решена граничная задача (17) – (18) и получено следующее выражение для амплитудного множителя

волны Рэлея:

$$\begin{aligned} R^{(\pm)} &= \frac{1}{8G\Delta'_R(\gamma^2)} \times \\ &\times \left\{ -i\frac{2\gamma\beta}{k_t^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^0 f_j^*(x_2, x_3) \times \right. \\ &\times R\hat{u}_j^{(\mp)}(x_3) e^{\mp i\gamma x_2} dx_2 dx_3 + \\ &+ i\frac{\gamma^2 + \beta^2}{\gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{33}^*(x_2, 0) e^{\mp i\gamma x_2} dx_2 \mp \\ &\left. \mp 2\beta \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{32}^*(x_2, 0) e^{\mp i\gamma x_2} dx_2 \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

В качестве примера источника сил, порождающих поверхностные волны, рассмотрим электрод (рис. 1), который имеет прямоугольное поперечное сечение и неограниченную длину вдоль оси  $Ox_1$ . По нему протекает переменный электрический ток  $i(t) = I_0 e^{i\omega t}$ . Электрод находится в вакууме на расстоянии  $\delta$  от плоскости  $x_3 = 0$ , являющейся границей упругого полупространства с магнитной проницаемостью  $\mu_\beta^\epsilon$  и удельной электрической проводимостью  $r_\beta$  ( $\beta = 1, 2, 3$  – индексы Фойгта). В объеме полупространства существует постоянное магнитное поле  $\vec{H}^0$ . Считаем его однородным и ориентированным вдоль оси  $Ox_2$  если не во всем полупространстве, то, по крайней мере, в пределах области существования переменного магнитного поля  $\vec{H}^*(x_2, x_3) e^{i\omega t}$ , индуцируемого переменным электрическим током  $i(t)$ . Источник постоянного магнитного поля с вектором напряженности  $\vec{H}^0 \{0, H_2^0, 0\}$  на рис. 1 не показан. Штриховая замкнутая кривая изображает силовую линию переменного магнитного поля в некоторый момент времени. Так как векторы напряженности переменного магнитного поля расположены по касательной к силовой линии, то становится очевидным, что вектор напряженности переменного магнитного поля полностью определяется двумя компонентами  $H_2^*(x_2, x_3)$  и  $H_3^*(x_2, x_3)$ , которые изменяются во времени по гармоническому закону  $e^{i\omega t}$ . Указанный характер временной зависимости возможен лишь в том случае, когда в любой точке полупространства в любой момент времени выполняется сильное неравенство  $|H_2^0| \gg |\vec{H}^*(x_2, x_3)|$ .

Совокупное действие постоянного и переменного магнитных полей создает на поверхности полупространства нагрузки с поверхностной плотнос-

тью

$$\sigma_{32}^*(x_2, 0) = \frac{m_1 - m_2}{2} H_2^0 H_3^*(x_2, 0), \quad (21)$$

$$\sigma_{33}^*(x_2, 0) = m_2 H_2^0 H_2^*(x_2, 0).$$

В объеме металлического полупространства действуют силы, вектор объемной плотности которых определяется следующими компонентами:

$$f_2^*(x_2, x_3) = \frac{m_1 - m_2}{2} H_2^0 H_{3,3}^*(x_2, x_3) + m_1 H_2^0 H_{2,2}^*(x_2, x_3), \quad (22)$$

$$f_3^*(x_2, x_3) = \frac{m_1 - m_2}{2} H_2^0 H_{3,2}^*(x_2, x_3) + m_2 H_2^0 H_{2,3}^*(x_2, x_3).$$

Структура выражения (20) для расчета амплитудного множителя  $R^{(\pm)}$  позволяет ввести определения Фурье-образов внешних нагрузок:

$$f_j^*(x_3, \pm\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f_j^*(x_2, x_3) e^{\pm i\gamma x_2} dx_2, \quad (23)$$

$$\sigma_{ij}^*(\pm\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{ij}^*(x_2, 0) e^{\pm i\gamma x_2} dx_2.$$

Сообразно определению (23), представим соотношения (21) и (22) в виде

$$\sigma_{32}^*(\pm\gamma) = \frac{m_1 - m_2}{2} H_2^0 H_3^*(0, \pm\gamma),$$

$$\sigma_{33}^*(\pm\gamma) = m_2 H_2^0 H_2^*(0, \pm\gamma),$$

$$f_2^*(x_3, \pm\gamma) = \frac{m_1 - m_2}{2} H_2^0 H_{3,3}^*(x_3, \pm\gamma) \mp \mp i\gamma m_1 H_2^0 H_2^*(x_3, \pm\gamma), \quad (24)$$

$$f_3^*(x_3, \pm\gamma) = \mp i\gamma \frac{m_1 - m_2}{2} H_2^0 H_{3,2}^*(x_3, \pm\gamma) + m_2 H_2^0 H_{2,3}^*(x_3, \pm\gamma).$$

Здесь

$$H_k^*(x_3, \pm\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} H_k^*(x_2, x_3) e^{\pm i\gamma x_2} dx_2, \quad (25)$$

причем

$$\lim_{|x_2| \rightarrow \infty} \frac{\partial^n H_k^*(x_2, x_3)}{\partial x_2^n} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

О. Н. Петрищев

Из формул (24), определяющих Фурье-образы внешних нагрузок, следует, что для расчета амплитудного множителя волны Рэлея необходимо знать не распределение переменного магнитного поля в объеме токопроводящего ферромагнитного полупространства, а только значения Фурье-образов, определенных соотношением (25).

Для того, чтобы вычислить величины  $H_k^*(x_3, \pm\gamma)$ , введем для описания переменного магнитного поля в вакууме  $\vec{H}^B$  векторный потенциал  $\vec{A}(x_2, x_3)$ , такой, что  $\text{rot} \vec{A} = \mu_0 \vec{H}^B$ . Кроме того, он в обязательном порядке должен удовлетворять фундаментальному условию  $\text{div} \vec{A} = 0$ . Поскольку в вакууме есть электрод с током, то из уравнения Максвелла  $\text{rot} \vec{H}^B = \vec{j}$  (где  $\vec{j}$  – вектор плотности тока проводимости) следует, что

$$-A_{1,22} - A_{1,33} = \mu_0 j_1. \quad (26)$$

Здесь

$$j_1 = \frac{I_0}{2lh} f(x_2, x_3);$$

$$f(x_2, x_3) = \begin{cases} 1 & \forall (x_2, x_3) \in [-l, l], [\delta, \delta + h], \\ 0 & \forall (x_2, x_3) \notin [-l, l], [\delta, \delta + h]. \end{cases}$$

Выполнив интегральное преобразование Фурье (25) для левой и правой частей уравнения (26), приведем его к обыкновенному дифференциальному уравнению

$$A_{1,33}(x_3, \pm\gamma) - \gamma^2 A_1(x_3, \pm\gamma) = \mu_0 j_1(x_3, \pm\gamma), \quad (27)$$

где

$$A_1(x_3, \pm\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} A_1(x_2, x_3) e^{\pm i\gamma x_2} dx_2;$$

$$j_1(x_3, \pm\gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} j_1(x_2, x_3) e^{\pm i\gamma x_2} dx_2 = \frac{I_0}{h} \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} f(x_3);$$

$$f(x_3) = \begin{cases} 1 & \forall x_3 \in [\delta, \delta + h], \\ 0 & \forall x_3 \notin [\delta, \delta + h]. \end{cases}$$

Решение уравнения (27), удовлетворяющее условию физической реализуемости источника магнитного поля, т.е. обеспечивающее равенство нулю величин  $A_1(x_3, \pm\gamma)$  при  $x_3 \rightarrow \infty$ , имеет следующий вид:

$$A_1(x_3, \pm\gamma) = [-A_0 + A(x_3)] e^{\gamma x_3} + [B + B(x_3)] e^{-\gamma x_3}. \quad (28)$$

Здесь

$$A_0 = \frac{\mu_0 I_0}{2\gamma} \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} \frac{(1 - e^{-\gamma h})}{\gamma h} e^{-\gamma \delta};$$

$$A(x_3) = \frac{\mu_0 I_0}{2\gamma h} \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} \int_{\delta}^{x_3} f(\xi) e^{-\gamma \xi} d\xi;$$

$$B(x_3) = -\frac{\mu_0 I_0}{2\gamma h} \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} \int_{\delta}^{x_3} f(\xi) e^{\gamma \xi} d\xi;$$

$B$  – подлежащая определению константа.

Вблизи поверхности ферромагнитного полупространства (при  $x_3 < \delta$ ) Фурье-образ векторного потенциала будет

$$A_1(x_3, \pm\gamma) = -A_0 e^{\gamma x_3} + B e^{-\gamma x_3}. \quad (29)$$

Так как

$$H_2^B(x_3, \pm\gamma) = \frac{1}{\mu_0} A_{1,3}(x_3, \pm\gamma),$$

$$H_3^B(x_3, \pm\gamma) = -\frac{1}{\mu_0} A_{1,2}(x_3, \pm\gamma) = \pm \frac{i\gamma}{\mu_0} A_1(x_3, \pm\gamma),$$

то при  $x_3 < \delta$

$$H_2^B(x_3, \pm\gamma) = -\frac{\gamma}{\mu_0} [A_0 e^{\gamma x_3} + B e^{-\gamma x_3}],$$

$$H_3^B(x_3, \pm\gamma) = \pm \frac{i\gamma}{\mu_0} [-A_0 e^{\gamma x_3} + B e^{-\gamma x_3}]. \quad (30)$$

Переменное магнитное поле  $H_k^*(x_2, x_3)$  в ферромагнитном полупространстве удовлетворяет уравнениям Максвелла, которые в терминах Фурье-образов компонент векторов имеют следующий вид:

$$\mp i\gamma H_3^*(x_3, \pm\gamma) -$$

$$-H_{2,3}^*(x_3, \pm\gamma) = r_1 E_1^*(x_3, \pm\gamma), \quad (31)$$

$$E_{1,3}^*(x_3, \pm\gamma) = -i\omega\mu_2^{\epsilon} H_2^*(x_3, \pm\gamma), \quad (32)$$

$$\pm i\gamma E_1^*(x_3, \pm\gamma) = -i\omega\mu_3^{\epsilon} H_3^*(x_3, \pm\gamma). \quad (33)$$

Решение системы уравнений (31)–(33) относительно искомых величин  $H_m^*(x_3, \pm\gamma)$  записывается как

$$H_2^*(x_3, \pm\gamma) = C e^{\zeta x_3},$$

$$H_3^*(x_3, \pm\gamma) = \mp \frac{i\gamma\mu_2^{\epsilon}}{\zeta\mu_3^{\epsilon}} C e^{\zeta x_3}. \quad (34)$$

Здесь

$$\zeta = \sqrt{\frac{\mu_3^{\epsilon}}{\mu_2^{\epsilon}} (\gamma^2 + i\omega r_1 \mu_3^{\epsilon})}.$$

Из последних соотношений следует, что при  $x_3 \rightarrow -\infty$  переменное магнитное поле обращается в нуль.

На границе раздела сред вакуум–ферромагнетик (при  $x_3 = 0$ ) должны выполняться условия

$$\mu_0 H_3^B(0, \pm\gamma) - \mu_3^{\epsilon} H_3^*(0, \pm\gamma) = 0,$$

$$H_2^B(0, \pm\gamma) - H_2^*(0, \pm\gamma) = 0, \quad (35)$$

следуя которым определяются константы  $B$  и  $C$ . В частности, константа  $C$  задается выражением

$$C = \frac{I_0}{\left(\frac{\gamma\mu_2^{\epsilon}}{\zeta\mu_0} - 1\right)} \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} \frac{(1 - e^{-\gamma h})}{\gamma h} e^{-\gamma \delta}.$$

Для реальных металлов на частотах ультразвукового частотного диапазона всегда выполняется сильное неравенство  $\gamma/\zeta \ll 1$ . Поэтому для проводников электрического тока последнее выражение можно переписать в более простом виде:

$$C = -I_0 \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} \frac{(1 - e^{-\gamma h})}{\gamma h} e^{-\gamma \delta}. \quad (36)$$

Подставив найденные значения Фурье-образов  $H_k^*(x_3, \pm\gamma)$  в соотношения (24), а полученные результаты – в формулу (20), запишем следующее выражение для расчета амплитудного множителя волны Рэлея в токопроводящем ферромагнитном полупространстве:

$$R^{(\pm)} = -\frac{i}{\gamma} U_R W(\gamma). \quad (37)$$

Здесь

$$U_R = \frac{m_2 H_2^0 I_0}{8G} f(\nu);$$

$$f(\nu) = \frac{2\beta\alpha\gamma^2 - k_t^2\gamma^2 - k_t^4}{k_t^2[4(2\gamma^2 - k_t^2) - 4\alpha\beta - 2\gamma^2 k_t^2/\alpha\beta]} -$$

константа, зависящая от модулей упругости изотропного (поликристаллического) полупространства;

$$W(\gamma) = \frac{\sin \gamma l}{\gamma l} \frac{(1 - e^{-\gamma h})}{\gamma h} e^{-\gamma \delta} -$$

частотная характеристика одиночного электрода в режиме возбуждения поверхностной волны Рэлея



( $\gamma = \omega/v_R$ , где  $v_R$  – скорость рэлеевской волны). При  $\gamma \rightarrow 0$  выполняется  $W(\gamma) = 1$ . При любых конечных значениях  $\delta$ ,  $l$  и  $h$  значения функции  $W(\gamma)$  очень быстро уменьшаются с ростом волнового числа (круговой частоты  $\omega$ ). Причина такого поведения частотной характеристики электромагнитного ультразвукового преобразователя кроется в интерференции упругих волн, которые излучаются различными областями ферромагнетика, находящимися в области нагружения переменным магнитным полем. Впервые подобное толкование частотной характеристики ультразвукового преобразователя электромагнитного типа дано в работах [14, 15].

Имея в своем распоряжении выражение (37), легко рассчитать амплитудные множители волн Рэлея, возбуждаемых более сложными токовыми структурами. Так, токовая петля (рис. 2), состоящая из двух одинаковых электродов с противоположно направленными одинаковыми токами (точка в круге – ток течет на наблюдателя, крест в круге – ток течет от наблюдателя), возбуждает в токопроводящем ферромагнитном полупространстве волну Рэлея с амплитудным множителем  $R^{(\pm)} = (2/\gamma)U_R W(\gamma) \sin[\gamma(l+d)]$ . Токовый меандр, состоящий из  $N$  одинаковых токовых петель, возбуждает волну Рэлея с амплитудным множителем

$$R^{(\pm)} = \frac{1}{\gamma} U_R W(\gamma) \frac{\sin[2N\gamma(l+d)]}{\cos[\gamma(l+d)]} \times e^{\mp i2(N-1)\gamma(l+d)}. \quad (38)$$

Следует отметить, что структуры, подобные токовому меандру, уже давно привлекают внимание исследователей процесса возбуждения электромагнитным полем ультразвуковых волн в металлах. Так, в работе [17] численно решена задача о возбуждении электромагнитным полем токового меандра продольной и поперечной волн в массивном блоке алюминия. В исследовании [18], где также, как и в статье [17], в качестве механизма возбуждения упругих волн рассматривались исключительно силы Лоренца, токовый меандр моделировался дельта-источниками. Это дало возможность построить аналитическое выражение, подобное двум последним сомножителям в формуле (38).

На рис. 3 представлены графики модуля частотно-зависимой функции

$$W^u(\gamma) = W(\gamma) \frac{\sin[2N\gamma(d+l)]}{\cos[\gamma(d+l)]},$$

рассчитанные в предположении, что число токовых петель в меандре  $N=4$ . Значения остальных

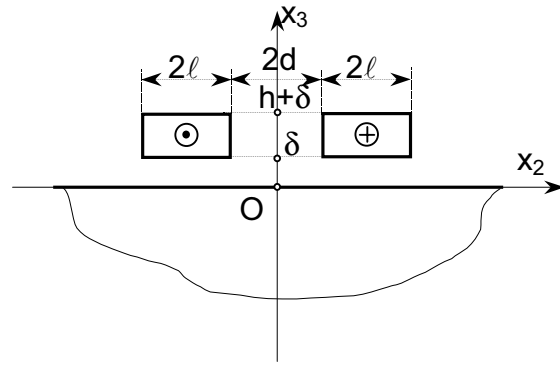


Рис. 2. Расчетная схема токовой петли, электромагнитное поле которой возбуждает волны Рэлея

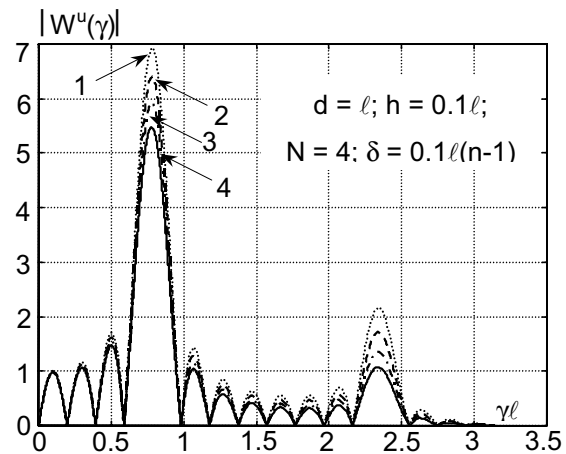


Рис. 3. Изменение модуля частотной характеристики токового меандра в зависимости от величины неконтакта  $\delta$

параметров указаны на врезке в правом углу рисунка. Варьируемым параметром семейства кривых является расстояние  $\delta$  (величина зоны неконтакта), причем  $\delta = 0.1l(n-1)$ , где  $n$  – номер кривой. По оси абсцисс отложено безразмерное волновое число  $\gamma l$ . Из графика видно, что учет размеров электродов токового меандра приводит к весьма быстрому уменьшению уровней главных лепестков частотной характеристики  $W^u(\gamma)$ . На частотах, которым соответствуют значения  $\gamma(d+l) = \pi/2 + k\pi$ ,  $k=0, 1, \dots$ , второй сомножитель в  $W^u(\gamma)$  принимает значения  $2N(-1)^{N-k-1}$ . Если не учитывать составляющей  $W(\gamma)$ , то частотная характеристика  $W^u(\gamma)$  токового меандра становится периодической функцией в частотном диапазоне  $0 \leq \omega < \infty$ . Соответствующая ей импульсная

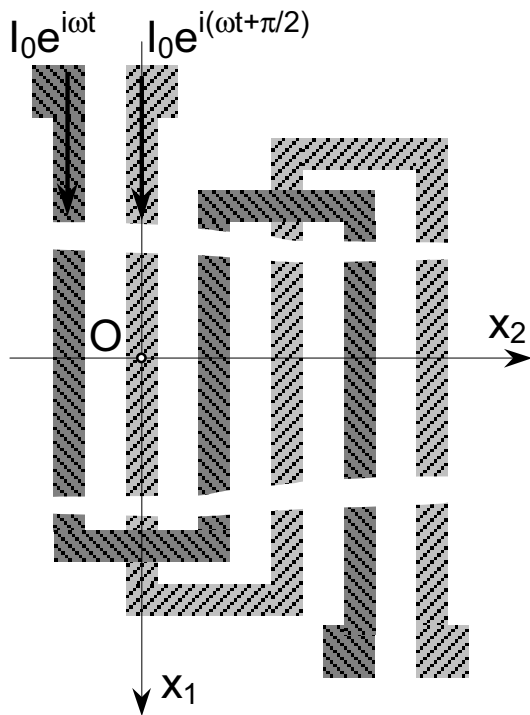


Рис. 4. Двухфазный двухзвенный токовый меандр

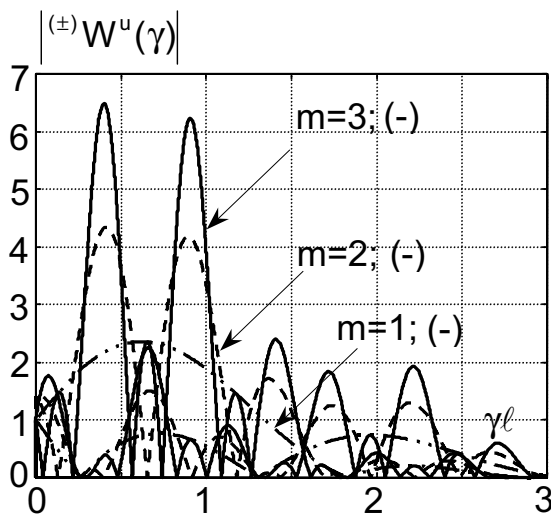


Рис. 5. Модуль частотной характеристики двухфазного токового меандра

характеристика представляется в виде конечного набора дельта-функций Дирака, чего, естественно, не наблюдается в экспериментах. Последнее обстоятельство заставляет при расчете произвольного ограничивать частотную характеристику токо-

вого меандра в области верхних частот. Необходимо сказать, что характерная асимметрия элементов частотной характеристики токового меандра слева и справа от частоты первого максимума функции  $W^u(\gamma)$ , обусловленная функцией  $W(\gamma)$ , наблюдается и в экспериментальных исследованиях [18, рис. 7, а – с. 2224]. Последнее обстоятельство можно рассматривать как экспериментальное подтверждение адекватности математической модели токового меандра в режиме возбуждения поверхностных волн Рэлея реальному объекту и происходящим в нем процессам.

Дополнительные возможности управления характеристиками возбуждаемых рэлеевских волн дают полифазные токовые структуры. На рис. 4 изображен двухфазный токовый меандр, состоящий из двух звеньев, в каждом из которых по три электрода, имеющие одинаковые размер и форму поперечного сечения. В показанной на рис. 4 токовой структуре все они расположены эквидистантно с интервалом  $2d$ . Направления токов в двух крайних левых электродах показаны стрелками. Несложно заметить, что при заданном сдвиге фаз между токами в двух крайних левых электродах переменный ток в каждом последующем электроде приобретает дополнительный сдвиг фаз на  $\pi/2$  относительно предыдущего. Такая система токов возбуждает волны Рэлея, которые уходят влево и вправо от области нагружения с разными амплитудами. Комплексная частотная характеристика двухфазного токового меандра  $(\pm)W^u(\gamma)$  для волн Рэлея, уходящих влево и вправо от области существования переменного магнитного поля, определяется выражением

$$(\pm)W^u(\gamma) = i[1 \mp 2 \sin \gamma(d+l)] W(\gamma) \times \frac{1 - (-i)^m [\cos 6m\gamma(d+l) \pm i \sin 6m\gamma(d+l)]}{1 \mp \sin 6\gamma(d+l) + i \cos 6\gamma(d+l)}, \quad (39)$$

где  $l$  – половина ширины электрода;  $m$  – число звеньев в двухфазном токовом меандре.

На рис. 5 показаны результаты расчетов модуля функции  $(\pm)W^u(\gamma)$  для однозвенного, двухзвенного и трехзвенного токовых меандров. Величины параметра  $m$  указаны возле соответствующих кривых. Модули частотной характеристики для волн Рэлея, уходящих влево и вправо, даны в одном масштабе. Графики, определяющие уровни волн, уходящих вправо, выделены символом “-”. Хорошо видно, что рассматриваемый двухфазный токовый меандр возбуждает волны Рэлея, которые большую часть энергии уносят в сторону возрастания координаты  $x_2$  (вправо от излучателя). Асим-

метрия потока энергии возрастает по мере увеличения количества звеньев двухфазного меандра. Одновременно с этим уменьшается ширина полосы частот, в пределах которой эффективно возбуждаются упругие колебания. Когда число звеньев становится более четырех, амплитуды волн Рэлея, излучаемых влево и вправо, различаются в некоторых частотных диапазонах более чем на порядок. Здесь двухфазный токовый меандр можно рассматривать как однонаправленный ультразвуковой преобразователь электромагнитного типа. Вполне вероятно, что в более сложных (полифазных) токовых структурах можно получить более яркое проявление однонаправленного возбуждения поверхностных волн Рэлея.

## ВЫВОДЫ

Предлагаемая схема построения частотных характеристик электромагнитных ультразвуковых преобразователей опирается на классические представления механики деформируемого твердого тела и электродинамики. Это обеспечивает качественное и количественное соответствие моделей, построенных по предлагаемой методике, реальным конструкциям и процессам. Такое соответствие подтверждается сравнением результатов математического моделирования токового меандра с экспериментальными данными о его частотной характеристике.

1. Гринченко В. Т., Мелешко В. В. Гармонические колебания и волны в упругих телах.– К.: Наук. думка, 1981.– 283 с.
2. Дымкин Г. Я., Шевелев А. В. Методика ультразвукового контроля дисков цельнокатанных колес вагонов поверхностными волнами // Дефектоскопия.– 2003.– N 5.– С. 3–13.
3. Schlawne F., Graff A., Scheider H. Use of EMATs for inspection of tubes and pipes // NDT.net.– 2003.– 8, N 3 (see <http://www.ndt.net>).
4. Ерофеев В. И., Самохвалов Р. В., Зазнобин В. А. Исследование возможности измерения изгибных напряжений с использованием поверхностных волн Рэлея // Дефектоскопия.– 2004.– N 2.– С. 62–66.
5. Hutchins D. A., Hu J. K., Young R. P., Stoner R., Jansen D., Zhang Q. L. Ultrasonic tomography of metals using noncontact transduction // J. Acoust. Soc. Amer.– 1989.– 85, N 2.– P. 747–752.
6. Light G., Kwun H., Kim S., Spinks R. Health monitoring of piping and plate using the magnetostrictive sensor (McS) guided wave technology // NDT.net.– 2004.– 9, N 2 (see <http://www.ndt.net>).
7. Stepinski T. Deep penetrating eddy current for detection voids in copper // NDT.net.– 2003.– 8, N 6 (see <http://www.ndt.net>).
8. Pichenot G., Sollier T. Eddy current modeling for nondestructive testing // NDT.net.– 2003.– 8, N 6 (see <http://www.ndt.net>).
9. Elshafiey I., Udra L. A new eddy current imaging system for enhancement of nondestructive evaluation // NDT.net.– 2004.– 9, N 9 (see <http://www.ndt.net>).
10. Комаров В. А. Квазистационарное электромагнитно-акустическое преобразование в металлах (основы теории и применение при неразрушающих исследованиях).– Свердловск: УНЦ АН СССР, 1986.– 235 с.
11. Харкевич А. А. Теория электроакустических преобразователей. Волновые процессы // Избранные труды. Том I.– М.: Наука, 1973.– С. 52–217.
12. Власов К. Б. Некоторые вопросы теории упругих ферромагнитных (магнитоэлектрических) сред // Изв. АН СССР. Сер. физическая.– 1957.– 21, N 8.– С. 1140–1148.
13. Петрищев О. Н. Принципы расчета частотных характеристик ЭМА преобразователей в режиме возбуждения ультразвуковых колебаний // Труды акуст. симпозиума “Консонанс-2003”.– К.: Ин-т гидромеханики НАН Украины, 2003.– С. 195–201.
14. Гринченко В. Т., Петрищев О. Н. Возбуждение внешним магнитным полем упругих колебаний в продольнополяризованной магнитоэлектрической полосе // Прикл. мех.– 1986.– 22, N 7.– С. 60–65.
15. Гринченко В. Т., Петрищев О. Н. Изучение закономерностей процесса возбуждения упругих волн при сложном нагружении участка изотропной упругой полосы // Изв. АН Арм. ССР. Механика.– 1987.– 40, N 6.– С. 22–31.
16. Петрищев О. Н. Моделирование процесса возбуждения волн Рэлея в пластине из магнитоэлектрического материала // Акуст. и ультразвук. техн.– 1992.– Вып. 27.– С. 53–61.
17. Ludwig R., Dai X.-W. Numerical simulation of electromagnetic acoustic transducer in the time domain // J. Appl. Phys.– 1991.– 69, N 1.– P. 89–98.
18. Matula T. J., Marston P. L. Electromagnetic acoustic wave transducer for the generation of acoustic evanescent waves on membranes and optical and capacitor wave-number selective detectors // J. Acoust. Soc. Amer.– 1993.– 93, N 4.– P. 2221–2227.