УДК 539.376;539.42

Связанное моделирование скорости установившейся ползучести и длительной прочности металлов

Н. А. Веклич[а], А. М. Локощенко[б], П. Н. Веклич[б]

[а] Российский государственный университет нефти и газа им. И. М. Губкина, Москва, Россия

[б] Научно-исследовательский институт МГУ им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Разработаны новые методы связанного математического моделирования скорости установившейся ползучести и длительной прочности металлов при растяжении. В качестве базовых зависимостей скорости установившейся ползучести и времени до разрушения от напряжения использованы две нелинейные дробно-степенные функции с четырьмя материальными постоянными. Вычисление последних основано на оптимальном решении двух нелинейных и несовместных в обычном смысле систем уравнений методом минимизации квадратичных невязок. Описаны методы вычисления материальных постоянных, с помощью которых получены аналитические зависимости, оптимально аппроксимирующие результаты испытаний стали 10Х15Н27Т3МР при температуре 600°С и различных напряжениях. Предложен метод кусочно-линейной аппроксимации результатов испытаний на длительную прочность посредством двухзвенной ломаной. При этом как положение точек излома, так и другие числовые характеристики ломаной линии определяются из условия оптимального ее расположения относительно экспериментальных данных. Метод позволяет более полно учитывать разные механизмы накопления поврежденности стали при различных уровнях напряжений.

Ключевые слова: длительная прочность, скорость установившейся ползучести, невязка несовместной системы уравнений, оптимальное решение, двухзвенная ломаная.

Обозначения

t^*	–	время до разрушения образца в условиях ползучести
σ	–	напряжение в образце
$\dot{p}$	–	скорость установившейся ползучести образца
σ_b	–	условный предел кратковременной прочности материала при температуре испытаний
D, A, n	–	аппроксимирующие постоянные
t_k^*, σ_{tk}	–	экспериментальные значения времени до разрушения t_k^* при напряжениях σ_{tk}
$\dot{p}_k$, σ_{pk}	–	экспериментальные значения скорости установившейся ползучести $\dot{p}_k$ при напряжениях σ_{pk}
δ_p	–	суммарная невязка теоретических значений $\dot{p}$ относительно экспериментальных данных
δ_t	–	суммарная невязка теоретических значений t^* относительно экспериментальных данных
δ	–	суммарная невязка, $\delta = \delta_t + \delta_p$

1. **Постановка задачи и основные соотношения**. В [1] был предложен аналитический метод прогнозирования длительной прочности хромоникелевых аустенитных сталей, математическую основу которого составляют два соотношения, описывающие длительную прочность и процесс развития деформации ползучести:

$$\ln t^* = D\ln 10 + 17\ln\sigma_b - n\ln\frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma}; \tag{1}$$

$$\dot{p} = A\left(\frac{\sigma}{\sigma_b - \sigma}\right)^n, \tag{2}$$

где t^* – время до разрушения образца при ползучести; σ – напряжение в растягиваемом образце; $\dot{p}$ – скорость установившейся ползучести образца. Аппроксимирующие постоянные σ_b (условный предел кратковременной прочности материала при температуре испытаний), D, A и n подлежат определению на основе соответствующих экспериментов и приняты безразмерными. Для получения размерных величин скорость установившейся ползучести $\dot{p}$, условный предел кратковременной прочности материала σ_b и время до разрушения t^* необходимо умножить на размерную единицу – соответственно 1 ч$^{-1}$, 1 МПа и 1 ч.

Выполнив потенцирование и умножение левой и правой частей уравнения (1) на (2), получим равенство $\dot{p}t^* = p^*$, где $p^* = 10^D A\sigma_b^{17}$. Назовем величину p^* предельной деформацией ползучести, которая накапливается в образце за время t^* при ползучести с постоянной скоростью $\dot{p}$. Согласно (1), (2), разрушение материала наступает по достижении деформацией ползучести образца предельного значения p^*. Следовательно, данные уравнения соответствуют деформационному критерию длительного разрушения.

Условный предел кратковременной прочности материала σ_b введен [1] в формулы (1) и (2) существенно нелинейным образом. Это позволяет аналитически описать известную из опытов на ползучесть и длительную прочность особенность быстрого и неограниченного роста скорости ползучести $\dot{p}$ на установившейся стадии и резкого уменьшения времени до разрушения t^* (почти до нуля) при напряжениях σ, приближающихся к некоторому критическому значению, подлежащему определению. Роль этого напряжения в (1), (2) играет величина σ_b. Наличие в данных формулах двух общих постоянных σ_b и n позволяет учитывать влияние явлений, развивающихся в материале на установившейся стадии ползучести, на его длительную прочность.

2. **Нелинейные несовместные системы уравнений и методы их решения**. Ниже описан метод определения аппроксимирующих постоянных σ_b, n, D и A.

Предположим, что для описания длительной прочности t^* имеются результаты K экспериментов при различных напряжениях σ в виде K пар

$(\sigma = \sigma_{tk}, \ t^* = t_k^*)$, $k = 1, 2, \ldots, K$. Кроме того, есть результаты N экспериментов на ползучесть, по которым можно вычислить скорости установившейся ползучести $\dot{p}$ при напряжениях σ, т.е. известны N пар $(\sigma = \sigma_{pk}, \ \dot{p} = \dot{p}_k)$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Напряжения σ_{tk} и σ_{pk} в соответствующих испытаниях могут существенно различаться.

Подставим поочередно пары $(\sigma_{tk}, \ t_k^*)$ и $(\sigma_{pk}, \ \dot{p}_k)$ в левую и правую части соотношений (1), (2) и получим две системы, состоящие из K и N уравнений соответственно, для четырех величин – σ_b, n, D и A:

$$\ln t_k^* = D \ln 10 + 17 \ln \sigma_b - n \ln \frac{\sigma_{tk}}{\sigma_b - \sigma_{tk}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, K; \tag{3}$$

$$\ln \dot{p}_k = \ln A + n \ln \frac{\sigma_{pk}}{\sigma_b - \sigma_{pk}}, \qquad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{4}$$

Из-за возможного несоответствия уравнений (1), (2) с экспериментальными данными и случайного разброса последних системы уравнений (3), (4) являются, как правило, несовместными относительно σ_b, n, D и A.

Поскольку обе системы имеют две общие неизвестные величины σ_b и n, тогда как две другие неизвестные D и A входят только в одну систему, соответственно (3) или (4), можно было бы предложить несколько методов решения систем (3), (4). Однако с целью экономии места ограничимся подробным описанием только одного основного метода. Его суть заключается в том, что обе системы объединяются и рассматриваются как одна система, состоящая из $K + N$ уравнений. Для объединенной системы отыскивается оптимальное [2, 3] решение σ_b, n, D, A. В качестве меры оптимальности решения σ_b, n, D, A используется значение суммарной невязки δ, которая равна сумме двух невязок простейшего вида [2] каждой отдельно взятой системы (3) и (4):

$$\delta = \delta_t(\sigma_b, n, D) + \delta_p(\sigma_b, n, A) = \delta(\sigma_b, n, D, A); \tag{5}$$

$$\delta_t(\sigma_b, n, D) = \sum_{k=1}^{K} \left(\ln t_k^* - D \ln 10 - 17 \ln \sigma_b + n \ln \frac{\sigma_{tk}}{\sigma_b - \sigma_{tk}} \right)^2; \tag{6}$$

$$\delta_p(\sigma_b, n, A) = \sum_{k=1}^{N} \left(\ln \dot{p}_k - \ln A - n \ln \frac{\sigma_{pk}}{\sigma_b - \sigma_{pk}} \right)^2. \tag{7}$$

Под оптимальным решением σ_b, n, D, A объединенной системы (3), (4) будем понимать точку локального экстремума (точка локального минимума) суммарной невязки $\delta = \delta(\sigma_b, n, D, A)$ (5). Таким образом, задача нахождения оптимального решения объединенной несовместной системы

(3), (4) значительно упрощается, поскольку сводится к определению точки локального минимума невязки $\delta = \delta(\sigma_b, n, D, A)$ по четырем аргументам σ_b, n, D, A.

Для решения задачи минимизации невязки $\delta = \delta(\sigma_b, n, D, A)$ применяются хорошо известные методы математического анализа. В качестве необходимых условий локального экстремума приравняем нулю частные производные невязки δ по всем четырем аргументам σ_b, n, D, A. После преобразований, сводящихся к исключению неизвестных n, D, A, получим одно нелинейное уравнение относительно σ_b:

$$f(\sigma_b) = \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{17}{\sigma_b} + \frac{n(\sigma_b)}{\sigma_b - \sigma_{tk}}\right)(\ln t_k^* - g_1 - n(\sigma_b) g_2(\sigma_b) + n(\sigma_b)\beta_k(\sigma_b)) -$$

$$- \sum_{k=1}^{N}\frac{n(\sigma_b)}{\sigma_b - \sigma_{pk}}(\ln \dot{p}_k - g_3 + n(\sigma_b) g_4(\sigma_b) - n(\sigma_b)\alpha_k(\sigma_b)) = 0, \qquad (8)$$

где

$$\begin{cases} g_1 = \dfrac{1}{K}\sum\limits_{k=1}^{K}\ln t_k^*; \quad \beta_k(\sigma_b) = \ln\dfrac{\sigma_{tk}}{\sigma_b - \sigma_{tk}}; \quad g_2(\sigma_b) = \dfrac{1}{K}\sum\limits_{k=1}^{K}\beta_k(\sigma_b); \\ g_3 = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\ln \dot{p}_k; \quad \alpha_k(\sigma_b) = \ln\dfrac{\sigma_{pk}}{\sigma_b - \sigma_{pk}}; \quad g_4(\sigma_b) = \dfrac{1}{N}\sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k(\sigma_b); \\ n(\sigma_b) = g_5(\sigma_b)/g_6(\sigma_b); \\ g_5(\sigma_b) = \sum\limits_{k=1}^{K}\beta_k(\sigma_b)(\ln t_k^* - g_1) - \sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k(\sigma_b)(\ln \dot{p}_k - g_3); \\ g_6(\sigma_b) = \sum\limits_{k=1}^{K}\beta_k(\sigma_b)(g_2(\sigma_b) - \beta_k(\sigma_b)) + \sum\limits_{k=1}^{N}\alpha_k(\sigma_b)(g_4(\sigma_b) - \alpha_k(\sigma_b)). \end{cases} \qquad (9)$$

Уравнение (8) с одним неизвестным σ_b решаем численным методом деления отрезка на оси σ_b пополам. После нахождения σ_b остальные материальные постоянные n, A, D вычисляются с помощью соотношений:

$$\begin{gathered} n = n(\sigma_b); \qquad A = \exp(g_3 - n(\sigma_b) g_4(\sigma_b)); \\ D = [g_1 + n(\sigma_b) g_2(\sigma_b) - 17\ln\sigma_b]/\ln 10. \end{gathered} \qquad (10)$$

Минимальное значение суммарной невязки $\delta(\sigma_b, n, D, A)$ в основном методе решения обозначим $\delta^{(1)}$. Полезно также определить отдельные составляющие невязки $\delta_t^{(1)} = \delta_t(\sigma_b, n, D)$ и $\delta_p^{(1)} = \delta_p(\sigma_b, n, A)$, вычисленные при оптимальных значениях σ_b, n, D, A, при этом имеет место равенство $\delta^{(1)} = \delta_t^{(1)} + \delta_p^{(1)}$.

Если подставить оптимальные значения σ_b, n, D, A в формулы (1), (2) и построить графики $t^* = t^*(\sigma)$ и $\dot{p} = \dot{p}(\sigma)$ на соответствующих координатных плоскостях, то графики наилучшим образом расположатся относительно экспериментальных точек (σ_{tk}, t_k^*) и $(\sigma_{pk}, \dot{p}_k)$. Становится также возможным проводить прогнозирующие расчеты и определять по формуле (1) напряжение σ, которое образец выдерживает в течение заданного времени t^*, а затем разрушается.

3. **Результаты численных расчетов**. Воспользуемся приведенными в [4] результатами экспериментального определения скорости установившейся ползучести $\dot{p}$ и времени до разрушения t^* при различных напряжениях σ. Образцы изготовляли из хромоникелевой аустенитной стали 10Х15Н27Т3МР (ЭП700), температура испытания составляла 600°С.

В табл. 1 при $j = 1$ приведены $N = 10$ значений $\dot{p}$, при $j = 2$ – средние арифметические значения $\dot{p}$ при соответствующих напряжениях σ. Результаты экспериментального определения времени до разрушения t^* при различных напряжениях представлены в табл. 2 при $i = 1$ ($K = 13$), при $i = 2$ даны средние арифметические значения $t^*(\sigma)$.

Т а б л и ц а 1

Экспериментальные ($j = 1$ и 2) и теоретические ($j = 3 - 7$) значения скорости установившейся ползучести $\dot{p}$ при различных напряжениях

σ, МПа	$\dot{p}$, ч$^{-1}$, при j, равном						
	1	2	3	4	5	6	7
200	$1{,}60 \cdot 10^{-7}$	$1{,}60 \cdot 10^{-7}$	$0{,}90 \cdot 10^{-7}$	$1{,}09 \cdot 10^{-7}$	$2{,}57 \cdot 10^{-8}$	$5{,}50 \cdot 10^{-8}$	$7{,}00 \cdot 10^{-8}$
240	$2{,}00 \cdot 10^{-7}$	$2{,}00 \cdot 10^{-7}$	$1{,}75 \cdot 10^{-7}$	$1{,}92 \cdot 10^{-7}$	$7{,}64 \cdot 10^{-8}$	$1{,}18 \cdot 10^{-7}$	$1{,}00 \cdot 10^{-7}$
280	$3{,}20 \cdot 10^{-7}$	$3{,}20 \cdot 10^{-7}$	$3{,}20 \cdot 10^{-7}$	$3{,}24 \cdot 10^{-7}$	$2{,}00 \cdot 10^{-7}$	$2{,}35 \cdot 10^{-7}$	$3{,}00 \cdot 10^{-7}$
320	$3{,}16 \cdot 10^{-7}$	$3{,}16 \cdot 10^{-7}$	$5{,}70 \cdot 10^{-7}$	$5{,}34 \cdot 10^{-7}$	$4{,}78 \cdot 10^{-7}$	$4{,}49 \cdot 10^{-7}$	$6{,}00 \cdot 10^{-7}$
550	$4{,}80 \cdot 10^{-6}$	$1{,}17 \cdot 10^{-5}$	$1{,}60 \cdot 10^{-5}$	$1{,}24 \cdot 10^{-5}$	$3{,}08 \cdot 10^{-5}$	$1{,}80 \cdot 10^{-5}$	$2{,}08 \cdot 10^{-5}$
550	$1{,}86 \cdot 10^{-5}$	$1{,}17 \cdot 10^{-5}$	$1{,}60 \cdot 10^{-5}$	$1{,}24 \cdot 10^{-5}$	$3{,}08 \cdot 10^{-5}$	$1{,}80 \cdot 10^{-5}$	$2{,}08 \cdot 10^{-5}$
600	$4{,}65 \cdot 10^{-5}$	$5{,}60 \cdot 10^{-5}$	$4{,}10 \cdot 10^{-5}$	$3{,}54 \cdot 10^{-5}$	$7{,}08 \cdot 10^{-5}$	$4{,}90 \cdot 10^{-5}$	$5{,}08 \cdot 10^{-5}$
600	$6{,}54 \cdot 10^{-5}$	$5{,}60 \cdot 10^{-5}$	$4{,}10 \cdot 10^{-5}$	$3{,}54 \cdot 10^{-5}$	$7{,}08 \cdot 10^{-5}$	$4{,}90 \cdot 10^{-5}$	$5{,}08 \cdot 10^{-5}$
650 650	$1{,}50 \cdot 10^{-4}$ $1{,}80 \cdot 10^{-4}$	$1{,}65 \cdot 10^{-4}$ $1{,}65 \cdot 10^{-4}$	$1{,}38 \cdot 10^{-4}$ $1{,}38 \cdot 10^{-4}$	$1{,}85 \cdot 10^{-4}$ $1{,}85 \cdot 10^{-4}$	$1{,}63 \cdot 10^{-4}$ $1{,}63 \cdot 10^{-4}$	$1{,}66 \cdot 10^{-4}$ $1{,}66 \cdot 10^{-4}$	$1{,}41 \cdot 10^{-4}$ $1{,}41 \cdot 10^{-4}$
σ_b, МПа	–	–	755	700	1169	778	830
n	–	–	2,58	2,14	4,86	2,98	3,15
A, ч$^{-1}$	–	–	$1{,}26 \cdot 10^{-6}$	$7{,}70 \cdot 10^{-7}$	$5{,}49 \cdot 10^{-5}$	$1{,}30 \cdot 10^{-6}$	$2{,}50 \cdot 10^{-6}$
δ_p	–	–	$\delta_p^{(1)} = 2{,}47$	$\delta_p^{(2)} = 1{,}98$	$\delta_p^{(3)} = 8{,}58$	$\delta_p^{(4)} = 3{,}49$	$\delta_p^{(5)} = 3{,}49$

Т а б л и ц а 2

Экспериментальные ($i = 1$ и 2) и теоретические ($i = 3 - 7$) значения времени до разрушения t^* при различных напряжениях

σ, МПа	t^*, ч, при i, равном						
	1	2	3	4	5	6	7
320	52126	52126	33277	35567	57299	48349	37792
550	1627 862 737	1075 1075 1075	1184 1184 1184	1075 1075 1075	890 890 890	1202 1202 1202	1042 1042 1042
600	670 434 308 189	400 400 400 400	460 460 460 460	536 536 536 536	387 387 387 387	443 443 443 443	427 427 427 427
650	246 211 177 144 101	176 176 176 176 176	138 138 138 138 138	103 103 103 103 103	168 168 168 168 168	130 130 130 130 130	154 154 154 154 154
σ_b, МПа	–	–	755	700	1169	778	830
n	–	–	2,58	2,14	4,86	2,98	3,15
D	–	–	$-44{,}75$	$-43{,}97$	$-49{,}46$	$-44{,}92$	$-45{,}69$
δ_t	–	–	$\delta_t^{(1)} = 2{,}41$	$\delta_t^{(2)} = 4{,}20$	$\delta_t^{(3)} = 1{,}77$	$\delta_t^{(4)} = 2{,}28$	$\delta_t^{(5)} = 1{,}95$
$\delta = \delta_t + \delta_p$	–	–	4,88	6,18	10,35	5,77	5,44

Для указанных числовых данных в результате решения уравнения (8) и расчетов по формулам (10) получены оптимальные значения σ_b, n, D, A, приведенные в табл. 1 при $j = 3$ и табл. 2 при $i = 3$ вместе с результатами расчета скоростей установившейся ползучести $\dot{p}$, времени до разрушения t^* и невязок $\delta^{(1)}$, $\delta_t^{(1)}$, $\delta_p^{(1)}$ по формулам (1), (2), (5)–(7). Проведены также расчеты напряжения σ, которое образец выдерживает в течение заданного времени t^*, а затем разрушается. Например, при $t^* = 10^4$ ч имеем $\sigma = 407$ МПа, при $t^* = 10^5$ ч – 245 МПа.

Ниже рассмотрены другие методы определения материальных констант σ_b, n, D и A для оптимального моделирования известных экспериментальных данных.

Проанализируем оптимальное решение отдельно взятой системы (4), т.е. результаты минимизации ее невязки $\delta_p(\sigma_b, n, A)$ (7) по аргументам σ_b, n, A. Результаты этого решения приведены в табл. 1 при $j = 4$. Минимальная величина невязки в этом случае $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \delta_p^{(2)} = 1{,}98$, что меньше соответствующей составляющей $\delta_p^{(1)} = 2{,}47$, полученной основным методом, $\delta_p^{(2)} < \delta_p^{(1)}$. Точность аппроксимации экспериментальных данных по установившейся скорости ползучести $\dot{p}$ повысилась. Подставим найденные значения σ_b и n в невязку $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ системы (3) и минимизируем эту невязку по аргументу D. Минимальное по D значение невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D) = \delta_t^{(2)} = 4{,}20$ системы (3) и вычисленные по формуле (1) теоретические значения t^* приведены в табл. 2 при $i = 4$. Невязка $\delta_t^{(2)}$ значительно превышает составляющую $\delta_t^{(1)} = 2{,}41$, полученную по основному методу, $\delta_t^{(2)} > \delta_t^{(1)}$. Кроме того, выполняется неравенство $\delta^{(2)} = \delta_t^{(2)} + \delta_p^{(2)} = 6{,}18 > \delta^{(1)} = 4{,}88$. Таким образом, принятая минимизация невязки δ_p существенно снижает как точность аппроксимации значений t^*, так и общую точность решения по обеим системам.

Можно, наоборот, сначала наилучшим образом аппроксимировать значения t^* (табл. 2, $i = 1$). Для этого следует оптимально решить систему уравнений (3) относительно σ_b, n, D, т.е. минимизировать ее невязку $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ по аргументам σ_b, n, D. Затем полученные значения σ_b и n подставить в невязку $\delta_p(\sigma_b, n, A)$ (7) и, используя экспериментальные данные для $\dot{p}$ (табл. 1 при $j = 1$), определить минимум этой невязки по аргументу A. В результате получим оптимальное решение для системы уравнений (4). В табл. 1 при $j = 5$ и табл. 2 при $i = 5$ приведены результаты расчетов $\dot{p}(\sigma)$, $t^*(\sigma)$ и минимальных невязок $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \delta_p^{(3)}$, $\delta_t(\sigma_b, n, D) = \delta_t^{(3)}$ по этому методу. Для системы уравнений (3) получено удовлетворительное решение с минимальной невязкой $\delta_t^{(3)} = 1{,}77$. Однако минимальная невязка системы (4) $\delta_p^{(3)} = 8{,}58$ значительно выше по сравнению с составляющей $\delta_p^{(1)} = 2{,}47$. Можно заключить, что точность метода последовательного наилучшего решения систем (3), (4) существенно ниже, чем основного метода совместного решения этих систем, если учесть неравенство $\delta^{(3)} = \delta_t^{(3)} + \delta_p^{(3)} = 10{,}35 > \delta^{(1)} = 4{,}88$.

В работе [4] по исходным данным для скорости установившейся ползучести (табл. 1, $j = 1$) методом арифметического осреднения решений отдельно взятых уравнений системы (4) были получены значения $\sigma_b = 778$ МПа и $n = 2{,}98$ при $j = 6$. В табл. 1 приведены также результаты расчетов параметра A, скорости ползучести $\dot{p}$ по формулам (10), (2) и невязки $\delta_p(\sigma_b, n, A)$ (5), которая в [4] не определялась. Дополнительно проведенные расчеты показали, что $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \delta_p^{(4)} = 3{,}49 > \delta_p^{(1)} = 2{,}47$. В табл. 2 при $i = 6$ представлены результаты расчета оптимального параметра D, времени до разрушения t^* и минимальной по D невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D) = \delta_t^{(4)} = 2{,}28 < \delta_t^{(1)} = 2{,}41$. Последнее неравенство указывает на то, что в [4] получена более точная аппроксимация экспериментальных результатов по длительной прочности t^* по сравнению с основным методом (табл. 2, $i = 3$). Однако в [4] выполнена менее точная аппроксимация экспериментальных результатов по установившейся скорости ползучести $\dot{p}$. В целом решение [4] оказалось вполне удовлетворительным. По точности аппроксимации оно превышает результаты, приведенные в табл. 1 и 2 при $j=4$, 5 и $i=4$, 5, но уступает основному методу минимизации суммарной невязки $\delta(\sigma_b, n, D, A)$: $\delta^{(4)} = 5{,}77 > \delta^{(1)} = 4{,}88$.

Отметим, что решение [4] можно несколько улучшить за счет выбора других величин σ_b и n, при которых сохраняется уровень невязки $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \delta_p^{(4)}$, а точность аппроксимации экспериментальных значений t^* повышается. Определяя условный минимум невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ при дополнительном условии $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \mathrm{const} = \delta_p^{(4)}$, находим величины σ_b и n. В табл. 1 и 2 при $j=7$ и $i=7$ приведены результаты определения условного минимума невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ методом множителей Лагранжа. Сравнение невязок $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ при $i=6$ и 7 (табл. 2) показывает, что метод множителей Лагранжа позволяет найти наименьшее значение невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D) = \delta_t^{(5)} = 1{,}95$ $(i=7)$ системы уравнений (3), если задано некоторое приемлемое (компромиссное) постоянное значение $\delta_p^{(4)}$ невязки $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \delta_p^{(4)}$ системы уравнений (4).

В связи с этим были проведены дополнительные расчеты по определению условного минимума невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ при условии $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \mathrm{const} = C$ и различных значениях константы C. Расчеты показали, что если задать константу $C = \delta_p^1 = 2{,}47$, то условный минимум невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ будет равен $\delta_t^{(1)}$. Можно утверждать, что метод нахождения условного минимума невязки $\delta_t(\sigma_b, n, D)$ при условии $\delta_p(\sigma_b, n, A) = \mathrm{const}$ по точности аппроксимации результатов испытаний равнозначен основному методу. Однако он связан с более громоздкими математическими выкладками, поэтому соответствующие расчетные формулы не приводятся.

4. **Аппроксимация результатов испытаний на длительную прочность с помощью двухзвенной ломаной линии**. Пусть имеются результаты N испытаний на длительную прочность t^* при различном напряжении σ, приложенном к образцу.

Перейдем к логарифмической системе координат и введем новые обозначения для экспериментально определенных величин: $x = \lg t^*$; $y = \lg \sigma$. Полагаем, что результаты испытаний представлены в виде набора N точек $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$ на координатной плоскости (x, y), причем абсциссы x пронумерованы в порядке возрастания: $x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_N$. Поставим задачу о наилучшей аппроксимации экспериментальных данных с помощью двухзвенной ломаной линии, которую зададим уравнением следующего вида:

$$\begin{aligned} y &= y_0 + k_1(x - x_0), \quad x < x_0; \\ y &= y_0 + k_2(x - x_0), \quad x \ge x_0. \end{aligned} \tag{11}$$

В уравнения (11) входят четыре постоянные величины аппроксимации. Две из них x_0 и y_0 обозначают абсциссу и ординату точки излома, k_1 и

k_2 – угловые коэффициенты, подлежащие определению при условии, согласно которому двухзвенная линия (11) наилучшим образом должна располагаться на плоскости $(x,\ y)$ относительно всех экспериментальных точек $(x_1, y_1), \ldots, (x_N, y_N)$.

Если формально потребовать, чтобы линия прошла через все эти точки, получим систему N уравнений относительно неизвестных x_0, y_0, k_1 и k_2:

$$\begin{aligned} y_i &= y_0 + k_1(x_i - x_0), \quad i = 1, 2, \ldots, j; \\ y_i &= y_0 + k_2(x_i - x_0), \quad i = j+1, j+2, \ldots, N. \end{aligned} \tag{12}$$

В уравнениях (12) величина j определяется из условия $x_j \le x_0 \le x_{j+1}$, т.е. точка излома линии располагается на плоскости $(x,\ y)$ между j-й и $j+1$-й экспериментальными точками. При этом предполагается, что индекс j удовлетворяет неравенству $1 \le j \le N$, тогда как нарушение этого неравенства для индекса j означает, что результаты экспериментов аппроксимируются с помощью одной прямой, а не двухзвенной ломаной линии.

Система уравнений (12) – нелинейная и в общем случае несовместна. Ее решение будем искать в оптимальном смысле, добиваясь минимизации невязки $\delta = \delta(x_0, y_0, k_1, k_2)$:

$$\delta = \delta(x_0, y_0, k_1, k_2) = \sum_{n=1}^{j} (y_n - y_0 - k_1(x_n - x_0))^2 +$$

$$+ \sum_{n=j+1}^{N} (y_n - y_0 - k_2(x_n - x_0))^2. \tag{13}$$

В случае нарушения условия $1 \le j \le N$ одна из сумм, входящих в формулу (13), полагается равной нулю.

Невязка δ (13) зависит от аргументов y_0, k_1 и k_2 достаточно просто и допускает по ним частное дифференцирование. В точке локального минимума частные производные δ по этим трем аргументам равны нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \delta}{\partial k_1} = -2 \displaystyle\sum_{n=1}^{j} (y_n - y_0 - k_1(x_n - x_0))(x_n - x_0) = 0; \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial k_2} = -2 \displaystyle\sum_{n=j+1}^{N} (y_n - y_0 - k_2(x_n - x_0))(x_n - x_0) = 0; \\ \dfrac{\partial \delta}{\partial y_0} = -2 \left(\displaystyle\sum_{n=1}^{j} (y_n - y_0 - k_1(x_n - x_0)) + \right. \\ \qquad \left. + \displaystyle\sum_{n=j+1}^{N} (y_n - y_0 - k_2(x_n - x_0)) \right) = 0. \end{cases} \tag{14}$$

Решая систему уравнений (14) относительно y_0, k_1 и k_2, получаем

$$\begin{cases} y_0 = y_0(x_0) = a(x_0)/b(x_0); \\ k_1 = k_1(x_0) = (a_{22}(x_0) - y_0(x_0)a_{12}(x_0))/a_{11}(x_0); \\ k_2 = k_2(x_0) = (b_{22}(x_0) - y_0(x_0)b_{12}(x_0))/b_{11}(x_0); \end{cases} \tag{15}$$

где

$$\begin{cases} a(x_0) = \sum_{n=1}^{N} y_n - a_{12}(x_0)a_{22}(x_0)/a_{11}(x_0) - b_{12}(x_0)b_{22}(x_0)/b_{11}(x_0); \\ b(x_0) = N - (a_{12}(x_0))^2/a_{11}(x_0) - (b_{12}(x_0))^2/b_{11}(x_0); \\ a_{11}(x_0) = \sum_{n=1}^{j}(x_n - x_0)^2; \quad a_{12}(x_0) = \sum_{n=1}^{j}(x_n - x_0); \\ a_{22}(x_0) = \sum_{n=1}^{j} y_n(x_n - x_0); \\ b_{11}(x_0) = \sum_{n=j+1}^{N}(x_n - x_0)^2; \quad b_{12}(x_0) = \sum_{n=j+1}^{N}(x_n - x_0); \\ b_{22}(x_0) = \sum_{n=j+1}^{N} y_n(x_n - x_0). \end{cases} \tag{16}$$

Решения y_0, k_1 и k_2 (15) будем называть оптимальными для невязки δ при произвольно заданной абсциссе x_0 точки излома. Подставив аналитические выражения (15), (16) для оптимальных значений $y_0 = y_0(x_0)$, $k_1 = k_1(x_0)$, $k_2 = k_2(x_0)$ в формулу (13) для невязки δ, получим

$$\delta = \sum_{n=1}^{j}[y_n - y_0(x_0) - k_1(x_0)(x_n - x_0)]^2 +$$

$$+ \sum_{n=j+1}^{N}[y_n - y_0(x_0) - k_2(x_0)(x_n - x_0)]^2 = \delta(x_0). \tag{17}$$

Формула (17) для невязки $\delta = \delta(x_0)$ показывает, что $\delta(x_0)$ непрерывно зависит от аргумента x_0. Более того, $\delta(x_0)$ дифференцируема по аргументу x_0 всюду, кроме узловых точек $x_0 = x_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$.

В узловых точках невязка $\delta(x_0)$ недифференцируема по аргументу x_0, поскольку в них происходит скачкообразное изменение величины j, входящей в формулы (16). Это влечет за собой появление (или, наоборот, исчезновение) отдельных слагаемых в суммах, входящих в формулы (16), (17) и влияющих на невязку $\delta(x_0)$. В других (промежуточных) точках x_0 скачкообразного появления (исчезновения) отдельных слагаемых нет, и невязка $\delta(x_0)$ непрерывна и дифференцируема по аргументу x_0. Производная невязки $\delta(x_0)$ по аргументу x_0 в узловых точках $x_0 = x_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ имеет разрыв первого рода с конечным скачком.

Поэтому для нахождения точки экстремума невязки $\delta = \delta(x_0)$ целесообразно воспользоваться одним только свойством непрерывности, не обращаясь к разрывной производной.

При вычислениях по формулам (15)–(17) при различных значениях абсциссы x_0 на отрезке $x_1 \le x_0 \le x_N$ с достаточно мелким шагом Δx_0 находим такое значение x_0, при котором невязка $\delta = \delta(x_0)$ (17) наименьшая. Зная x_0, остальные параметры двухзвенной ломаной определяем с помощью формул (15), (16).

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 05-01-00226).

Резюме

Розроблено нові методи зв'язаного математичного моделювання швидкості сталої повзучості та тривалої міцності металів при розтязі. За базові залежності швидкості сталої повзучості та часу до руйнування від напруження використано дві нелінійні дробово-степеневі функції з чотирма матеріальними сталими. Визначення цих сталих базується на оптимальному розв'язку двох нелінійних і несумісних у звичайному розумінні систем рівнянь методом мінімізації квадратичних відхилень. Описано методи визначення матеріальних сталих, за допомогою яких отримано аналітичні залежності, що оптимально апроксимують результати досліджень сталі 10Х15Н27Т3МР за температури 600°С та різних напружень. Запропоновано метод кусково-лінійної апроксимації результатів досліджень на тривалу міцність за допомогою дволанкової ламаної. При цьому положення точок злому та інші числові характеристики ламаної лінії визначаються за умови її оптимального розташування відносно експериментальних даних. Метод дозволяє більш повно враховувати різні механізми накопичення пошкодженості сталі за різних рівнів напруження.

1. *Аршакуни А. Л., Шестериков С. А.* Прогнозирование длительной прочности жаропрочных металлических материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 1994. – № 3. – С. 126 – 141.
2. *Вентцель Е. С.* Теория вероятностей. – М.: Наука, 1969. – 572 с.
3. *Тихонов А. Н.* О задачах с приближенно заданной информацией // Некорректные задачи естествознания. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1987. – С. 8 – 14.
4. *Кашелкин В. В., Кузнецова И. А., Шестериков С. А.* Метод прогнозирования длительной прочности хромоникелевых аустенитных сталей // Изв. РАН. Механика твердого тела. – 2004. – № 1. – С. 182 – 187.

Поступила 12. 09. 2007