

Динамическая устойчивость вязкоупругой цилиндрической панели с сосредоточенными массами

Б. Х. Эшматов^а, Д. А. Ходжаев^б

^а Политехнический институт и государственный университет штата Вирджиния, Блэксбург, США

^б Ташкентский институт ирригации и мелиорации, Ташкент, Узбекистан

Рассматривается задача о динамической устойчивости вязкоупругой цилиндрической панели с сосредоточенными массами, основанная на гипотезе Кирхгоффа–Лява в геометрически нелинейной постановке. В уравнение движения цилиндрической панели эффект действия сосредоточенных масс вводится с использованием δ -функции Дирака. Задача решается с помощью метода Бубнова–Галеркина, основанного на многочленной аппроксимации прогибов, в сочетании с численным методом, базирующимся на использовании квадратурных формул. Обоснован выбор сингулярного ядра Колтунова–Ржаницына. Приведены сравнения результатов, полученных по различным теориям. Во всех задачах исследована сходимость метода Бубнова–Галеркина. Показано влияние вязкоупругих свойств материала и сосредоточенных масс на процесс динамической устойчивости цилиндрической панели.

Ключевые слова: вязкоупругая цилиндрическая панель, гипотеза Кирхгоффа–Лява, геометрическая нелинейность, сосредоточенные массы, δ -функция Дирака, динамическая устойчивость.

Введение. В период интенсивного развития современной промышленности одной из важных задач в машиностроении и строительстве является снижение материалоемкости конструкций машин. С целью экономии материала возникает необходимость в производстве тонкостенных конструкций. Чем тоньше элемент, тем он гибче и тем в большей мере проявляется его склонность к выпучиванию и потере устойчивости. Последняя сопровождается катастрофическим развитием деформаций и, как правило, разрушением конструкций. С этой точки зрения при производстве конструкций, обладающих легкостью, прочностью и надежностью, наиболее приемлемо применять материалы, позволяющие не только существенно улучшать их эксплуатационные характеристики, но и в ряде случаев создавать конструкции, нереализуемые на основе традиционных материалов. При этом достаточно сложными являются процедура расчета и проектирование конструкций, требующих учета их реальных свойств. В настоящее время разработка эффективных алгоритмов решения нелинейных задач о динамической устойчивости оболочек, панелей и пластин – наиболее актуальная проблема.

Пластины, панели и оболочки, на которых укреплены объекты в виде дополнительных масс, нашли широкое применение благодаря высоким вязкоупругим и прочностным свойствам. При проектировании элементов конструкций актуальным является прогнозирование их динамических характеристик в зависимости от конфигурации, распределения масс, вязкоупругих свойств материала и т.п.

В основном роль дополнительных масс выполняют продольные и поперечные ребра, накладки, крепления, узлы приборов и машин [1, 2]. При тео-

ретическом рассмотрении подобного рода задач иногда удобно интерпретировать присоединенные элементы как дополнительные массы, жестко соединенные с системами и сосредоточенные в точках. Известны работы [3–8], в которых рассматривались колебания и динамическая устойчивость упругих систем с сосредоточенными массами и задачи решались в линейной постановке. Исследованиям нелинейных колебаний и динамической устойчивости упругих цилиндрических панелей, несущих сосредоточенные массы, посвящена, например, работа [9]. Подобные задачи о колебаниях и динамической устойчивости упругих и вязкоупругих пластин, цилиндрических панелей и оболочек в различных постановках без учета сосредоточенных масс рассматривались в [1–16].

Как известно, большинство материалов обладают ярко выраженными вязкоупругими свойствами [17–20]. Анализ динамического поведения широко применяемых в промышленности новых материалов с вязкоупругими свойствами свидетельствует о существенном влиянии на их прочность неоднородностей типа присоединенных масс. Несмотря на имеющиеся в этой области исследования, значительно меньше внимания уделяется особенностям поведения неоднородных в инерционном отношении вязкоупругих систем. В [17–20] задачи рассматривались либо с помощью дифференциальной модели Фойгта [21, 22], либо интегральной модели Больцмана–Вольтерра, где при расчетах в качестве ядер релаксации принимались экспоненциальные ядра, которые не могут описать реальные процессы, происходящие в оболочках, панелях и пластинах в начальные моменты времени [18, 20]. Выбор экспоненциального ядра при расчетах не случаен. Полученные при расчетах системы интегро-дифференциальных уравнений путем дифференцирования сводились к обыкновенным дифференциальным уравнениям, которые в основном решались численным методом Рунге–Кутты [19, 21]. Известные до настоящего времени методы не позволяли решать такие задачи с сингулярными ядрами типа Колтунова, Ржаницына, Абеля, Работнова и т.д. [18, 20].

Одна из особенностей задачи заключается в том, что после применения метода Бубнова–Галеркина задача как в линейной, так и в нелинейной постановке сводится к решению не распадающихся систем интегро-дифференциальных уравнений с сингулярными ядрами, исследование которых вызывало дополнительные трудности. Благодаря разработанному численному методу [23, 24], основанному на использовании квадратурных формул, стало возможным решение этих систем. Данный метод обеспечивает достаточно высокую точность полученных результатов, он универсален, позволяет решать широкий класс динамических задач теории вязкоупругости и экономичен с точки зрения компьютерного времени [24, 25]. На его основе было получено большое количество численных результатов [24–28], хорошо соответствующих теоретическим и экспериментальным данным [10].

Цель работы – исследование нелинейной задачи о динамической устойчивости вязкоупругой цилиндрической панели с сосредоточенными массами.

Математическая модель задачи. Рассмотрим вязкоупругую пологую круговую цилиндрическую панель из однородного изотропного материала со сторонами a и b постоянной толщины h и радиусом срединной

поверхности R с сосредоточенными массами M_p в точках (x_p, y_p) , $p = 1, 2, \dots, I$ (рис. 1). Пусть цилиндрическая панель подвергается динамическому нагружению $P(t)$ вдоль стороны b .

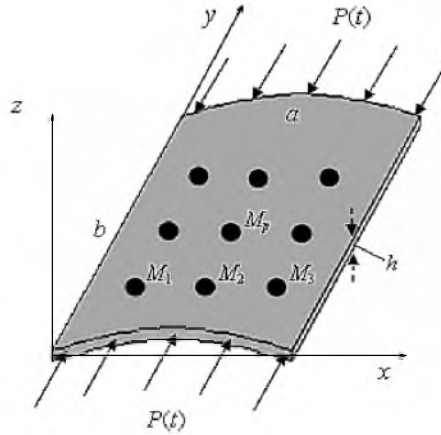


Рис. 1. Вязкоупругая цилиндрическая панель.

Физическую зависимость между напряжениями σ_x, σ_y, τ и деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma$ в срединной поверхности, согласно модели Больцмана–Вольтерра, примем в виде [17]

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\mu^2}(1-\Gamma^*)(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y), \quad (x \Leftrightarrow y), \quad \tau = \frac{E}{2(1+\mu)}(1-\Gamma^*)\gamma, \quad (1)$$

где Γ^* – интегральный оператор с ядром релаксации $\Gamma(t)$, $\Gamma^*\varphi = \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varphi(\tau)d\tau$; μ – коэффициент Пуассона; E – модуль упругости;

здесь и далее символ $(x \Leftrightarrow y)$ обозначает, что остальные соотношения получены круговой перестановкой индексов.

Связь между деформациями $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma$ и перемещениями u, v, w в срединной поверхности с учетом начальной неплоскости $w_0 = w_0(x, y)$ запишем следующим образом [10]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial x} \right)^2 \right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{R}(w - w_0) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial w_0}{\partial y} \right)^2 \right]; \\ \gamma &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2)$$

Изгибающие и крутящие моменты элемента цилиндрической панели с учетом деформаций изгиба [10] и изгибных напряжений имеют вид

$$M_x = -D(1 - \Gamma^*) \left[\frac{\partial^2(w - w_0)}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2(w - w_0)}{\partial y^2} \right] \quad (x \leftrightarrow y), \quad (3)$$

$$H = -D(1 - \mu)(1 - \Gamma^*) \frac{\partial^2(w - w_0)}{\partial x \partial y},$$

где D – цилиндрическая жесткость панели.

Влияние сосредоточенных масс на вязкоупругую панель носит инерционный характер. Учитываем эффект их действия в уравнении движения с помощью δ -функции Дирака [3]:

$$m = m(x, y) = \rho h + \sum_{p=1}^I M_p \delta(x - x_p) \delta(y - y_p),$$

где ρ – плотность материала панели.

При выводе уравнений движения элемента вязкоупругой цилиндрической панели с сосредоточенными массами исходим из уравнений [10]

$$h \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} \right) - m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0; \quad h \left(\frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right) - m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$q + \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + h \frac{\sigma_y}{R} + h \frac{\partial}{\partial x} \left(\sigma_x \frac{\partial w}{\partial x} + \tau \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \quad (4)$$

$$+ h \frac{\partial}{\partial y} \left(\sigma_y \frac{\partial w}{\partial y} + \tau \frac{\partial w}{\partial x} \right) - m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где q – сумма внешних нагрузок.

Подставляя (1) и (3) в (4), получаем

$$(1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial x} + \mu \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial y} \right) - \frac{m(1 - \mu^2)}{Eh} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0;$$

$$(1 - \Gamma^*) \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial y} + \mu \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial \gamma}{\partial x} \right) - \frac{m(1 - \mu^2)}{Eh} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0;$$

$$(1 - \Gamma^*) \left[\frac{h^2}{12} \nabla^4 (w - w_0) - \frac{1}{R} (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) \right] - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial w}{\partial x} (1 - \Gamma^*) (\varepsilon_x + \mu \varepsilon_y) + \right. \quad (5)$$

$$\left. + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial y} (1 - \Gamma^*) \gamma \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial w}{\partial y} (1 - \Gamma^*) (\varepsilon_y + \mu \varepsilon_x) + \frac{1 - \mu}{2} \frac{\partial w}{\partial x} (1 - \Gamma^*) \gamma \right] -$$

$$- \frac{1 - \mu^2}{Eh} q + \frac{m(1 - \mu^2)}{Eh} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0,$$

где ε_x , ε_y , γ имеют вид (2).

Если динамический процесс рассматривается без учета распространения упругих волн, то в первых двух уравнениях системы (5) можно отбросить инерционные члены относительно u и v [10]. Введем функции напряжения F в виде [10] в систему (5):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad \tau = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}.$$

Тогда относительно прогиба w и функции напряжения F получим следующую систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений типа Кармана [10]:

$$\begin{aligned} \frac{D}{h}(1-\Gamma^*)\nabla^4(w-w_0) &= L(w, F) + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{q}{h} - \\ &- \left[\rho + \frac{1}{h} \sum_{p=1}^I M_p \delta(x-x_p) \delta(y-y_p) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ \frac{1}{E} \nabla^4 F &= -(1-\Gamma^*) \left\{ \frac{1}{2} [L(w, w) - L(w_0, w_0)] + \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial x^2} (w-w_0) \right\}, \end{aligned} \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} L(w, w) &= 2 \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right]; \\ L(w, F) &= \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}. \end{aligned}$$

Выбор ядра релаксации. Практическое использование нелинейной теории вязкоупругих систем возможно только при конкретном задании весовых функций, что соответствует выбору ядра релаксации при наилучшем согласовании с экспериментом, накладывающем существенные ограничения на аналитические выражения ядер, которые должны иметь удобную для анализа математическую форму.

Простейшее экспоненциальное ядро в большинстве случаев лишь качественно объясняет реальную картину [18, 20]. Как показывают исследования, интегральные соотношения наследственной теории вязкоупругости эквивалентны линейным дифференциальным соотношениям с постоянными коэффициентами, если ядро представляет собой сумму экспоненциальных функций. В то же время при обработке опытных данных оказывается, что ядра, содержащие один или несколько экспоненциальных членов, плохо подходят для описания свойств реальных материалов. Конечно, вводя спектры ползучести и релаксации, можно аппроксимировать опытную кривую с любой степенью точности, однако набор упругих и вязких элементов не является подходящей моделью для тел с несовершенной упругостью, и для описания их поведения следует выбирать другие функции. Поэтому прихо-

дится делать необходимые обобщения, вводя более сложные зависимости. Часто такое обобщение рассматривается на основе слабосингулярных функций, введение которых связано со следующими обстоятельствами.

Статические исследования вязкоупругих материалов на ползучесть и релаксацию свидетельствуют об очень большой интенсивности релаксационных процессов на начальной стадии испытаний. Скорости процессов оказываются настолько большими, что их непосредственное измерение в начальный момент оказывается невозможным. Поэтому сами процессы приходится рассматривать как динамические и условно считать их скорости равными бесконечности [18, 20].

Этот факт можно описать с помощью функций, обладающих интегрируемой особенностью абелевого типа. Такие функции, называемые слабосингулярными, обеспечивают конечные деформации и напряжения в отличие от сильносингулярных функций, которые приводят к бесконечно большим значениям. Слабосингулярные функции хорошо описывают скорости релаксационных процессов, если содержат достаточное число параметров. К таким ядрам относятся ядра, предложенные Работновым [20], Ржаницыным, Колтуновым [18] и др.

Далее при расчете динамических задач воспользуемся самым простым и в то же время достаточно общим сингулярным ядром Колтунова–Ржаницына с тремя реологическими параметрами (A , β и α) вида [18] $\Gamma(t) = Ae^{-\beta t} t^{\alpha-1}$ ($0 < \alpha < 1$).

Динамическая устойчивость вязкоупругой цилиндрической панели с сосредоточенными массами. Допустим, что панель подвергается динамическому сжатию вдоль стороны b силой $P(t) = vt$ (v – скорость нагружения) – рис. 1. Полагая, что панель шарнирно закреплена по краям, решение системы уравнений (6), удовлетворяющее граничным условиям задачи, будем искать на основе многочленной аппроксимации прогибов:

$$w(x, y, t) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{nm}(t) \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b};$$

$$w_0(x, y) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M w_{0nm} \sin \frac{n\pi x}{a} \sin \frac{m\pi y}{b}. \quad (7)$$

Подставляя (7) во второе уравнение системы (6) и приравнявая в обеих частях коэффициенты при одинаковых гармониках тригонометрических функций, аналогично [10] находим функцию усилий:

$$F(x, y, t) = E \sum_{i,j=1}^N \sum_{r,s=1}^M (1 - \Gamma^*) (w_{ir} w_{js} - w_{0ir} w_{0js}) \times$$

$$\times \left[C_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + A_{irjs} \cos \frac{(i+j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + D_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r+s)\pi y}{b} + B_{irjs} \cos \frac{(i-j)\pi x}{a} \cos \frac{(r-s)\pi y}{b} \Big] + \\
 & + \theta h E \sum_{i=1}^N \sum_{r=1}^M E_{ir} (1 - \Gamma^*) (w_{ir} - w_{0ir}) \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{r\pi y}{b} - \frac{P(t)y^2}{2}, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 A_{irjs} &= \frac{\lambda^2 ir(ir+js)}{4[(i+j)^2 + \lambda^2(r-s)^2]^2}; & B_{irjs} &= -\frac{\lambda^2 ir(ir-js)}{4[(i-j)^2 + \lambda^2(r-s)^2]^2}; \\
 C_{irjs} &= -\frac{\lambda^2 ir(ir-js)}{4[(i+j)^2 + \lambda^2(r+s)^2]^2}; & D_{irjs} &= \frac{\lambda^2 ir(ir+js)}{4[(i-j)^2 + \lambda^2(r+s)^2]^2}; \\
 E_{ir} &= \frac{i^2 \lambda^2}{\pi^2 (i^2 + r^2 \lambda^2)^2}; & \lambda &= \frac{a}{b}; & \theta &= \frac{b^2}{Rh}.
 \end{aligned}$$

Затем, подставив (7) и (8) в первое уравнение системы (6) и выполнив процедуру Бубнова–Галеркина с введением безразмерных величин

$$\begin{aligned}
 \frac{w_{kl}}{h}, \quad \frac{w_{0kl}}{h}, \quad \frac{M_p}{M_0}, \quad \frac{x_p}{a}, \quad \frac{y_p}{b}, \quad P^* = \frac{P}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^2, \quad \frac{q}{E} \left(\frac{b}{h}\right)^4, \\
 t^* = \frac{\omega t}{\sqrt{S}} = \frac{P}{P_{кр}} = \frac{vt}{P_{кр}} = \frac{P^*}{P_{кр}^*}, \quad \frac{\sqrt{S}}{\omega} \Gamma(t)
 \end{aligned}$$

и сохранением прежних обозначений относительно неизвестных $w_{kl} = w_{kl}(t)$, получим

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{S} \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^M B_{klmn} \ddot{w}_{nm} - \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 t^* w_{kl} + \\
 & + \frac{\pi^4}{\gamma} \left\{ \left[\left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 + l^2 \right]^2 + \frac{12\theta^2(1-\mu^2)}{\pi^2} \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2 E_{kl} \right\} (1 - \Gamma^*) (w_{kl} - w_{0kl}) + \\
 & + \frac{12\pi^2(1-\mu^2)}{\gamma} \left\{ -\frac{\theta}{\lambda^2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M F_{klnmir} w_{nm} (1 - \Gamma^*) (w_{ir} - w_{0ir}) - \right. \\
 & \left. - \frac{4\theta}{\pi^2 \lambda^2} \sum_{n,i=1}^N \sum_{m,r=1}^M K_{klnmir} (1 - \Gamma^*) (w_{nm} w_{ir} - w_{0nm} w_{0ir}) + \right.
 \end{aligned}$$

$$+ \left. \sum_{n,i,j=1}^N \sum_{m,r,s=1}^M a_{klmirs} w_{nm} (1 - \Gamma^*) (w_{ir} w_{js} - w_{0ir} w_{0js}) \right\} = \frac{192 \alpha_{kl} (1 - \mu^2)}{\pi^2 \gamma kl} q, \quad (9)$$

$$k, l = 1, 2, \dots,$$

где M_0 – масса всей панели, $M_0 = ab\rho h$; $P_{кр}$ – эйлера статическая критическая нагрузка, $P_{кр} = \left[\frac{\pi^2}{3(1 - \mu^2)} + \frac{\theta^2}{4\pi^2} \right] E \left(\frac{h}{b} \right)^2$; ω – частота основного тона колебаний, $\omega = \sqrt{\frac{Eh^2 \gamma}{12\rho b^4 (1 - \mu^2)}}$; $\gamma = 4\pi^4 + 3\theta^2 (1 - \mu^2)$; S – безразмерный параметр скорости нагружения, $S = P_{кр}^{*3} \left(\frac{\pi c E h^3}{v b^4} \right)^2$; c – скорость звука в материале панели, определяемая по формуле $c = \sqrt{E/\rho}$; $P_{кр}^*$ – безразмерный параметр критической нагрузки, $P_{кр}^* = \frac{P_{кр}}{E} \left(\frac{b}{h} \right)^2 = \frac{\gamma}{12\pi^2 (1 - \mu^2)}$; коэффициент α_{kl} равен единице, если k и l нечетные, если хотя бы один из них четный, то $\alpha_{kl} = 0$, если $k \neq n$ и $l \neq m$, то $B_{klm} = 4 \sum_{p=1}^l M_p \sin k\pi x_p \sin n\pi x_p \times \sin l\pi y_p \sin m\pi y_p$, если $k = n$ и $l = m$, то $B_{klkl} = 1 + 4 \sum_{p=1}^l M_p \sin^2 k\pi x_p \times \sin^2 l\pi y_p$; остальные коэффициенты, входящие в это уравнение, определяются из [24].

Интегрирование системы (9) проводилось с помощью численного метода, основанного на использовании квадратурных формул [23, 24].

При расчетах в качестве ядер релаксации использовались сингулярные ядра Колтунова–Ржаницына с тремя реологическими параметрами. Здесь, аналогично [10], в качестве критерия, определяющего критическое время, а следовательно, и критическую нагрузку, принимаем условие, что стрела прогиба не должна превышать величину, равную толщине цилиндрической панели. Для определения динамической критической нагрузки используем понятие динамического коэффициента K_d , равного отношению динамической “критической” нагрузки к верхней статической.

Обсуждение результатов. На рис. 2–9 приведены результаты вычислений, выполненные с помощью ПЭВМ на алгоритмическом языке Delphi. Далее, если не оговариваются другие данные, в качестве исходных принимаются: $w_{0kl} = 10^{-3}$; $\dot{w}_{0kl} = 0$; $A = 0,05$; $\alpha = 0,25$; $\beta = 0,05$; $q = 0$; $\lambda = 1$; $S = 1$; $\theta = 6$; $\mu = 0,32$; $M_1 = 0,1$.

Во всех рассмотренных случаях исследовалась численная сходимость метода Бубнова–Галеркина. При этом в (7) находятся те значения N и M , при которых раньше всего начинается максимальный рост прогибов.

На рис. 2 приведены результаты расчета влияния вязкоупругих свойств материала на поведение цилиндрической панели, когда сосредоточенная масса приложена к ее центру (0,5; 0,5). По оси абсцисс отложен безразмерный параметр t^* , равный отношению переменной величины сжимающей силы к эйлеровой статической нагрузке, по оси ординат – безразмерная стрела прогиба w_{kl} . Коэффициент динамичности K_d оказывается в упругом ($A=0$) и вязкоупругом ($A=0,05; 0,1$) случаях соответственно равным 4,01; 3,89 и 3,79. Как видно, учет вязкоупругих свойств материала панели приводит к уменьшению критической нагрузки. Отметим, что в частном случае при $A=0, S=0,1$ и $M_1=0$ можно получить результаты для упругой цилиндрической панели, коэффициент динамичности которой равен 6,7 [10].

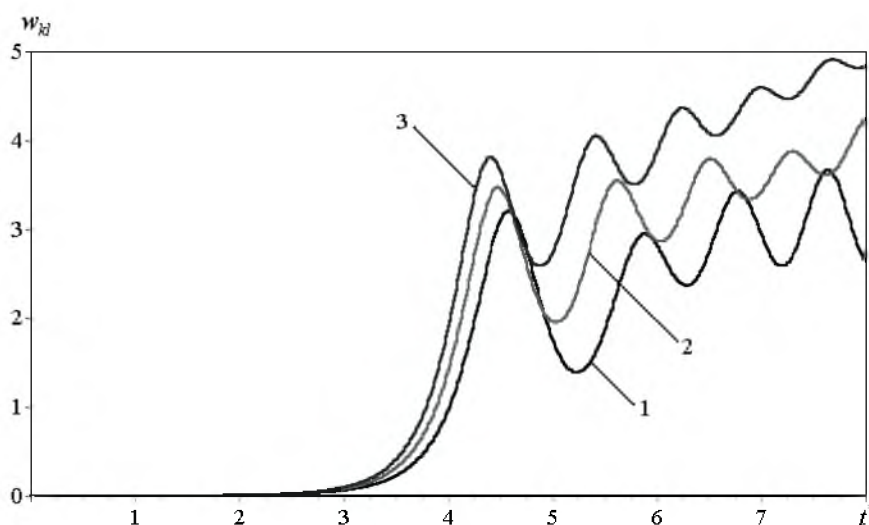


Рис. 2. Зависимость прогиба w_{kl} от времени t^* : 1 – $A=0$; 2 – $A=0,05$; 3 – $A=0,1$.

Исследовали динамическое поведение вязкоупругой цилиндрической панели при значениях реологического параметра α , равного 0,05; 0,075; 0,25 и 0,5 (рис. 3). В рассмотренных случаях коэффициент динамичности $K_d = 2,38; 3,21; 3,89$ и $3,96$ соответственно. Из рис. 3 видно, что с увеличением значений реологического параметра α возрастают критическая нагрузка и время. Полученные результаты показывают, что реологический параметр α по сравнению с параметрами A и β играет существенную роль. Так, при $\alpha=0,05$ и $0,5$ различие между соответствующими значениями критических нагрузок составляет не более 40%. Заметим, что в вязкоупругом случае при $S=1$ и $\alpha=0,05$ “критическое” число полуволн $N=4$, в то время как в упругом случае [10] $N=2$.

Дальнейшие расчеты показали, что изменение реологического параметра вязкости β ($0 < \beta < 1$) не оказывает существенного влияния на изменение критического времени и критической нагрузки.

Для более подробного изучения поведения вязкоупругой цилиндрической панели при различных ядрах релаксации рассмотрим расчет деформирования панели (рис. 4). Видно, что результаты решения вязкоупругой

задачи, полученные при экспоненциальном ядре релаксации (на рис. 4 кривая 2), почти совпадают с результатами решения упругой задачи ($A = 0$, кривая 1), при ядре Колтунова–Ржаницына ($A = 0,05$, $\beta = 0,05$, $\alpha = 0,25$, кривая 4) эти результаты отличаются весьма существенно (более 40%). Проведенные исследования показывают, что результаты решения вязкоупругой задачи при экспоненциальных ядрах не являются новыми, так как они совпадают с решениями упругой задачи. Следовательно, при рассмотрении динамических задач вязкоупругости в качестве ядер релаксации необходимо выбирать ядра типа Колтунова–Ржаницына, хорошо описывающие процессы, происходящие в вязкоупругих конструкциях не только на начальных стадиях, но и в последующие моменты времени.

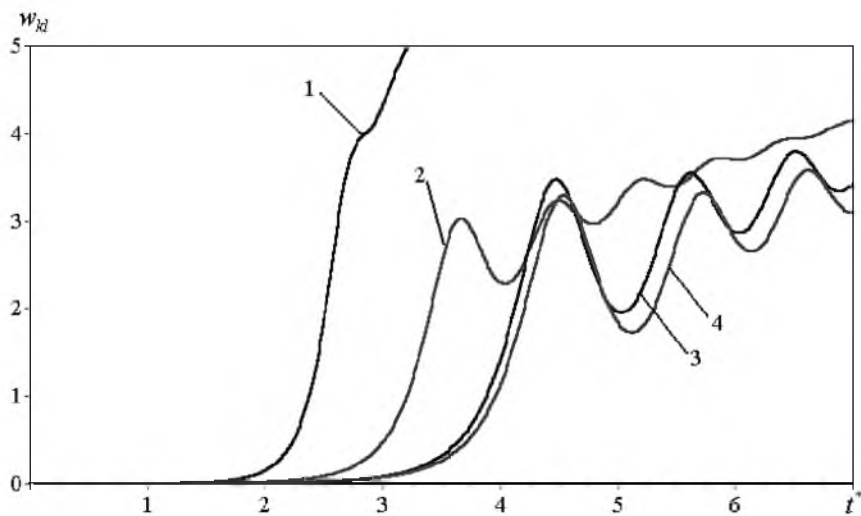


Рис. 3. Зависимость прогиба w_{kl} от времени t^* : 1 – $\alpha = 0,05$; 2 – $\alpha = 0,075$; 3 – $\alpha = 0,25$; 4 – $\alpha = 0,5$.

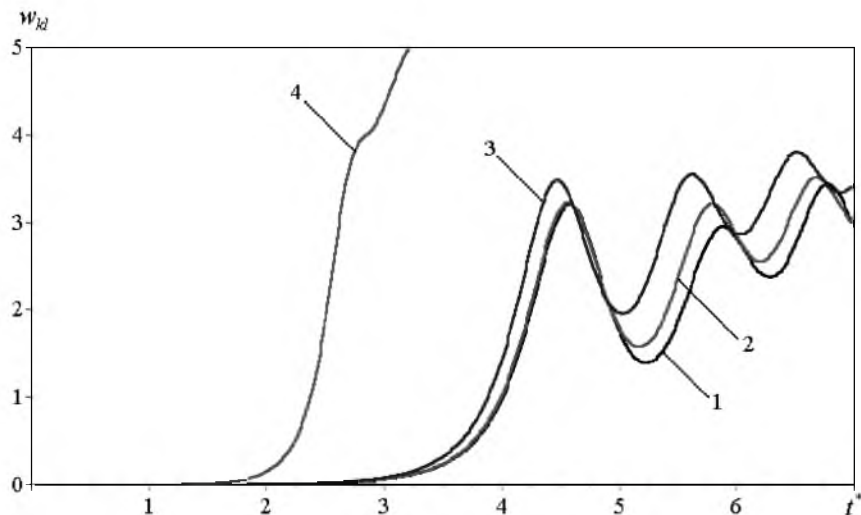


Рис. 4. Зависимость прогиба w_{kl} от времени t^* : 1 – $A = 0$; 2 – $A = 0,05$, $\beta = 0,05$, $\alpha = 0,05$; 3 – $A = 0,05$, $\beta = 0,05$, $\alpha = 0,075$; 4 – $A = 0,05$, $\beta = 0,05$, $\alpha = 0,25$.

На рис. 5 приведены результаты, свидетельствующие о влиянии сосредоточенных масс на поведение вязкоупругой панели. Полагаем, что сосредоточенная масса приложена к центру панели, при этом параметр скорости нагружения $S = 0,2$. При сосредоточенной массе $M_1 = 0; 0,1; 0,3$ и $0,5$ значения $K_d = 5,35; 5,66; 5,87$ и $5,95$ соответственно. Видно, что по мере увеличения параметров сосредоточенных масс кривая перемещается вправо в сторону больших значений t^* . Отметим, что влияние сосредоточенных масс существенно проявляется при малых значениях параметров скоростей нагружения S .

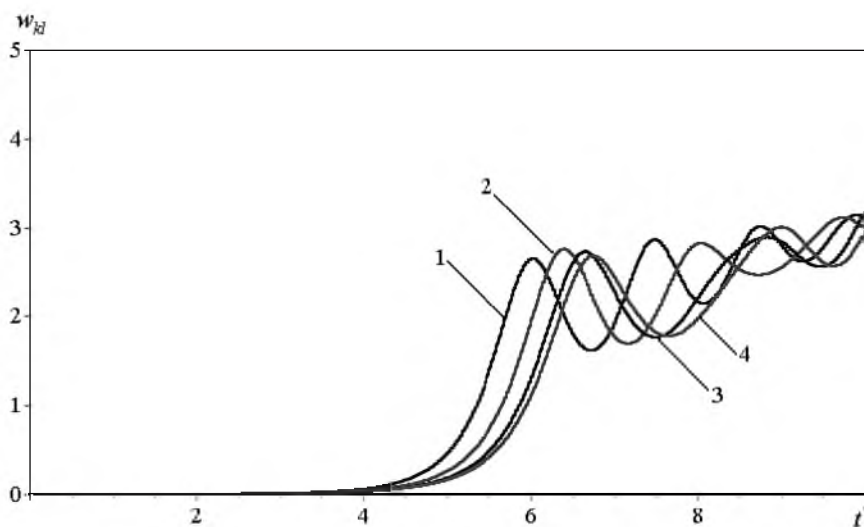


Рис. 5. Зависимость прогиба w_{kl} от времени t^* : 1 – $M_1 = 0$; 2 – $M_1 = 0,1$; 3 – $M_1 = 0,3$; 4 – $M_1 = 0,5$.

Исследовали также влияние на поведение вязкоупругой панели количества сосредоточенных масс (рис. 6), приложенных в одной $(0,5; 0,5)$ – кривая 1, двух $(0,5; 0,5)$, $(0,3; 0,5)$ – кривая 2 и трех точках $(0,5; 0,5)$, $(0,3; 0,5)$, $(0,1; 0,5)$ – кривая 3. При параметрах сосредоточенных масс $M_1 = M_2 = M_3 = 0,1$ соответствующие значения K_d составляют $3,89; 4,19; 4,29$. Следовательно, увеличение количества сосредоточенных масс приводит к росту критического времени и соответственно критической нагрузки.

Рис. 7 иллюстрирует зависимость между стрелой прогиба w_{kl} и временем t^* при различных значениях параметра скорости нагружения S . При значениях $S = 0,1; 1$ и 10 коэффициенты $K_d = 6,58; 3,89$ и $2,39$ соответственно. Заметим, что параметр S обратно пропорционален v^2 . Как и ожидалось, в вязкоупругом случае аналогично упругому случаю [10] с увеличением значения скорости нагружения v возрастают коэффициенты критической нагрузки и времени. Отметим, что в вязкоупругом случае максимальный рост прогибов происходит раньше, чем в упругом.

На рис. 8 показано влияние геометрического параметра θ на поведение цилиндрической панели. При значениях $\theta = 6; 12; 18$ и 24 коэффициенты $K_d = 3,89; 3,47; 2,96$ и $2,59$ соответственно. Как видно из полученных

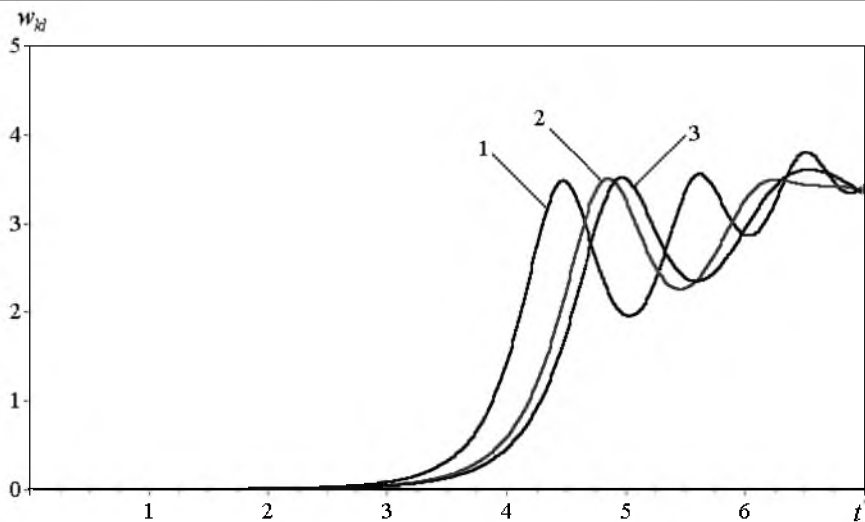


Рис. 6. Зависимость прогиба w_{kl} от времени t^* .

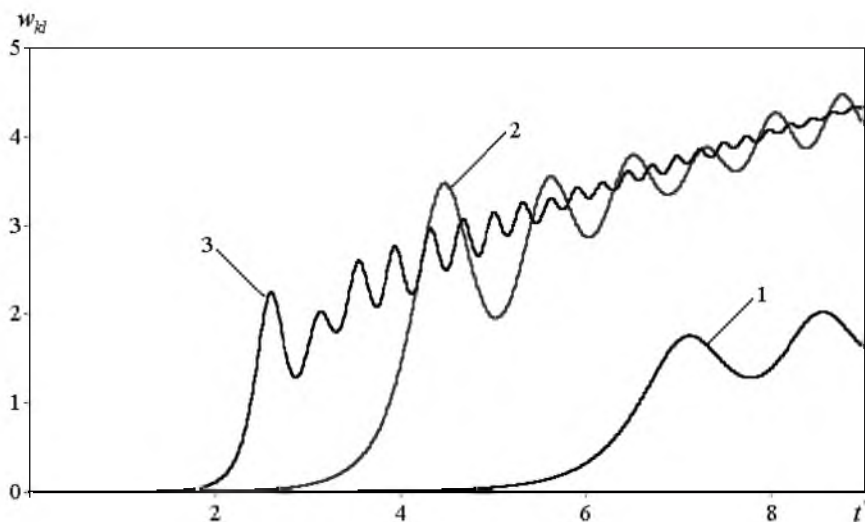


Рис. 7. Зависимость прогиба w_{kl} от времени t^* : 1 – $S = 0$; 2 – $S = 1$; 3 – $S = 10$.

результатов, увеличение безразмерного геометрического параметра θ приводит к уменьшению критической нагрузки и времени.

Проводили сравнение результатов, полученных по линейной и нелинейной теориям. Установлено, что они в основном зависят от трех параметров (начальной неправильности, скорости нагружения и дополнительной статической нагрузки). Как показывают исследования, в диапазоне изменения параметров начальных неправильностей ($10^{-4} \leq w_{0kl} \leq 10^{-2}$), в пределах изменения параметров S и q результаты, полученные по этим теориям, почти совпадают. Однако по мере увеличения параметров начальных неправильностей ($w_{0kl} \geq 10^{-1}$) результаты уже отличаются друг от друга. Это особенно заметно при комплексном росте наряду с параметрами начальных неправильностей значений скоростей нагружения и внешней нагрузки.

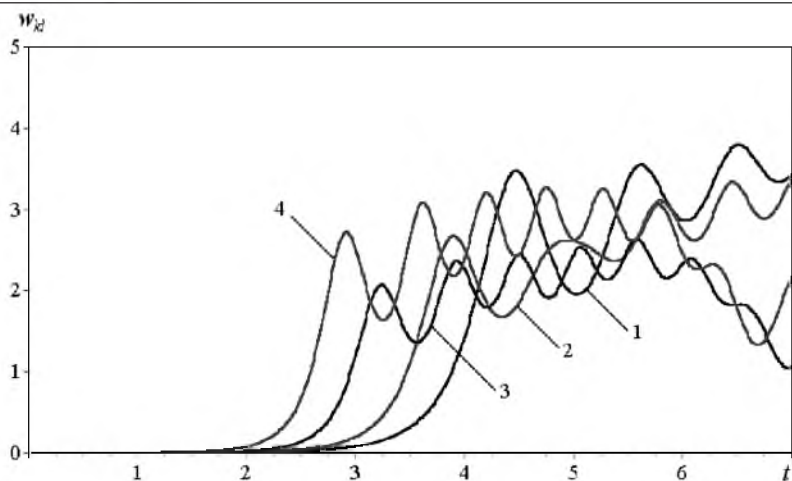


Рис. 8. Зависимость прогиба w_{kl} от времени t^* : $1 - \theta = 6$; $2 - \theta = 12$; $3 - \theta = 18$; $4 - \theta = 24$.

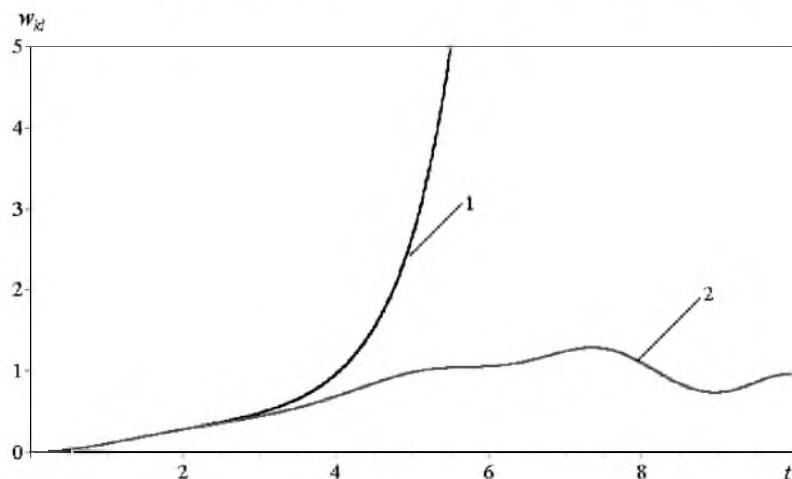


Рис. 9. Зависимости прогиба w_{kl} от времени t^* , полученные по линейной (1) и нелинейной (2) теориям Кирхгоффа–Лява.

На рис. 9 приведены результаты, полученные по линейной и нелинейной теориям Кирхгоффа–Лява для $S = 0,05$, $w_0 = 10^{-1}$, $q = 10$. Как видно, различие между результатами составляет более 20%. Коэффициенты динамичности K_d соответственно равны 4,06 и 5,08. Заметим, что кривая, построенная по линейной теории Кирхгоффа–Лява, имеет монотонно возрастающий характер, тогда как кривая, соответствующая нелинейной теории Кирхгоффа–Лява, увеличивается скачкообразно.

Выводы

1. Установлено, что учет вязкоупругих свойств материала приводит к уменьшению значений критической нагрузки и времени, учет сосредоточенных масс как в упругом, так в вязкоупругом случае – к увеличению критической нагрузки.

2. Результаты, полученные при экспоненциальных ядрах, совпадают с данными решения упругой задачи и, следовательно, не могут быть использованы в качестве ядер релаксации, описывающих реальные вязкоупругие свойства материала цилиндрической панели.

3. В качестве ядер релаксации необходимо выбирать сингулярные ядра типа Колтунова–Ржаницына, содержащие достаточное количество реологических параметров для описания реальных процессов, происходящих в конструкциях и хорошо согласующихся с экспериментами.

4. В зависимости от различных геометрических и физических параметров цилиндрической панели необходимо выбирать соответствующие теории (линейная и нелинейная теории Кирхгоффа–Лява).

Резюме

Розглядається задача про динамічну стійкість в'язкопружної циліндричної панелі зі зосередженими масами, що базується на гіпотезі Кірхгоффа–Лява в геометрично нелінійній постановці. У рівнянні руху циліндричної панелі ефект дії зосереджених мас враховується шляхом використання δ -функції Дірака. Задача розв'язується за допомогою методу Бубнова–Гальоркіна на основі багаточленної апроксимації прогинів у поєднанні з числовим методом. Обґрунтовано вибір сингулярного ядра Колтунова–Ржаницына. Наведено порівняння результатів, що отримані за різними теоріями. У всіх задачах досліджено збіжність методу Бубнова–Гальоркіна. Показано вплив в'язкопружних властивостей матеріалу і зосереджених мас на процес динамічної стійкості циліндричної панелі.

1. Андрианов И. В., Лесничая В. А., Маневич Л. И. Метод усреднения в статике и динамике ребристых оболочек. – М.: Наука, 1985. – 221 с.
2. Амиро И. Я. и др. Колебания ребристых оболочек вращения. – Киев: Наук. думка, 1988. – 172 с.
3. Amba-Rao C. L. On the vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass // J. Appl. Mech. – 1964. – **31**. – P. 550 – 551.
4. Chen R. Vibration of cylindrical panels carrying a concentrated mass // Ibid. – 1979. – **37**. – No. 3. – P. 874 – 875.
5. Андреев Л. В., Дышко А. Л., Павленко И. Д. Динамика пластин и оболочек с сосредоточенными массами. – М.: Машиностроение, 1988. – 195 с.
6. Dowell E. and Doherty S. M. Experimental study of asymptotic modal analysis applied to a rectangular plate with concentrated masses // J. Sound Vibration. – 1994. – **170**. – P. 671 – 681.
7. Cha P. D. Free vibration of a rectangular plate carrying a concentrated mass // Ibid. – 1997. – **207**. – P. 593 – 596.
8. Wu J. S. and Luo S. S. Use of the analytical-and-numerical-combined method in the free vibration analysis of a rectangular plate with any number of point masses and translational springs // Ibid. – 1997. – **200**. – P. 179 – 194.

9. *Бондарев П. А.* Колебания пластинки с сосредоточенными массами, лежащей на нелинейном упругом основании // Укр. мат. журн. – 1974. – № 1. – С. 61 – 66.
10. *Вольмир А. С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек. – М.: Наука, 1972. – 432 с.
11. *Sheeinman I. and Reichman Y.* A study of buckling and vibration of laminated shallow curved panels // Int. J. Solids Struct. – 1992. – **29**, No. 11. – P. 1329 – 1338.
12. *Touati D. and Cederbaum G.* Dynamic stability of nonlinear viscoelastic plates // Ibid. – 1994. – **31**, No. 17. – P. 2367 – 2376.
13. *Cheng Chang-jun and Zhang Neng-hui.* Dynamical behavior of viscoelastic cylindrical shells under axial pressures // Appl. Math. Mech. – 2001. – **22**, No. 1. – P. 1 – 9.
14. *Sun Y. X. and Zhang S. Y.* Chaotic dynamic analysis of viscoelastic plates // Int. J. Mech. Sci. – 2001. – **43**. – P. 1195 – 1208.
15. *Awrejcewicz J. and Kryszko V. A.* Nonclassical thermoelastic problems in nonlinear dynamics of shells // Applications of the Bubnov–Galerkin and Finite Difference Numerical Methods. – Springer-Verlag, 2003.
16. *Sahu S. K. and Datta P. K.* Dynamic stability of laminated composite curved panels with cutouts // J. Eng. Mech. – 2003. – **129**, No. 11. – P. 1245 – 1253.
17. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости. – М.: Наука, 1970. – 280 с.
18. *Колтунов М. А.* Ползучесть и релаксация. – М.: Высш. шк., 1976. – 276 с.
19. *Богданович А. Е.* Нелинейные задачи динамики цилиндрических композитных оболочек. – Рига: Зинатне, 1987. – 296 с.
20. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
21. *Kocaturk T., Sezer S., and Demir C.* Determination of the steady state response of viscoelastically point-supported rectangular specially orthotropic plates with added concentrated masses // J. Sound Vibration. – 2004. – **278**. – P. 789 – 806.
22. *Cabanska-Placzkiewicz K.* Vibrations of a complex system with damping under dynamic loading // Strength Mater. – 2002. – **34**, No. 2. – P. 165 – 180.
23. *Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Юсупов М.* О некоторых методах решения систем интегро-дифференциальных уравнений, встречающихся в задачах вязкоупругости // Прикл. математика и механика. – 1987. – **51**, № 5. – С. 867 – 871.
24. *Эшматов Х.* Интегральный метод математического моделирования задач динамики вязкоупругих систем: Автореф. дисс. ... д-ра техн. наук. – Киев, 1991. – 32 с.
25. *Verlan A. F. and Eshmatov B. Kh.* Mathematical simulation of oscillations of orthotropic viscoelastic plates with regards to geometric nonlinearity // Int. J. Electronic Modeling. – 2005. – **27**, No. 4. – P. 3 – 17.

26. Бадалов Ф. Б., Эшматов Х., Акбаров У. Й. Устойчивость вязкоупругих пластин при динамических нагрузках // Прикл. механика. – 1991. – 27, № 9. – С. 892 – 899.
27. Eshmatov B. Kh. Nonlinear vibrations of viscoelastic orthotropic plates from composite materials // Third M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 14–17, 2005, Boston (USA).
28. Eshmatov B. Kh. Dynamic stability of viscoelastic plates at growing compressing loadings // Int. J. Appl. Mech. Tech. Phys. – 2006. – 47, No. 2. – P. 165 – 175.

Поступила 25. 09. 2006