НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 534.08;620.175.5

Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщение 2. Сильный резонанс

В. В. Матвеев, О. А. Бовсуновский

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

С использованием представленного в сообщении 1 подхода рассматривается приближенный расчет параметров колебательного процесса упругого тела с закрывающейся трещиной в области сильного субгармонического резонанса порядка 1/2, когда амплитуда низшей гармоники спектра свободных колебаний больше основной амплитуды вынужденных колебаний.

Ключевые слова: нелинейные колебания, субгармонический резонанс, вибродиагностика усталостного повреждения.

Введение. С использованием ранее [1] предложенного подхода рассматривается приближенный расчет параметров колебательного процесса упругого тела с закрывающейся трещиной в области сильного субгармонического резонанса порядка 1/2, когда амплитуда возникающих свободных колебаний больше амплитуды основных вынужденных колебаний.

Методика расчета. Пренебрегая, как и ранее [1], некоторым различием между формами колебаний упругого тела с трещиной на полуциклах разного знака, вынужденные колебания эквивалентной одномассовой нелинейной системы описываются дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 2h\frac{du}{dt} + \omega^2[1 - 0{,}5\alpha(1 + \operatorname{sign} u)]u = q_0 \sin \nu t. \tag{1}$$

Здесь ω – собственная частота рассматриваемой формы колебаний неповрежденного тела; α – параметр, интегрально характеризующий относительное изменение жесткости тела при наличии открытой трещины,

$$\alpha = \frac{K - K_{\text{т}}}{K}, \qquad K_{\text{т}} < K, \tag{2}$$

где K – жесткость неповрежденного тела, соответствующая жесткости тела с закрывающейся трещиной (в данном случае при $u < 0$); $K_{\text{т}}$ – жесткость тела при открытой трещине ($u > 0$).

Собственная частота тела с закрывающейся трещиной принимается равной [2]

$$\omega_0 = \frac{2\sqrt{1-\alpha}}{1+\sqrt{1-\alpha}}\,\omega. \tag{3}$$

Полагая, что при $\nu \approx 2\omega_0$ кроме основной гармоники вынужденных колебаний возникают колебания со спектром гармонических составляющих свободных колебаний, определенным ранее асимптотическим методом нелинейной механики [3], решение уравнения (1) в области субгармонического резонанса отыскиваем в виде [1]

$$u(t) = A_0 + A_{1/2}\sin\left(\frac{\nu t}{2} - \gamma_{1/2}\right) + A_1\sin(\nu t - \gamma_1) + \sum_{n=2,4,\ldots} A_n \cos n\left(\frac{\nu t}{2} - \gamma_{1/2}\right), \tag{4}$$

где

$$A_0 = \frac{\alpha}{\pi} A_{1/2}; \qquad A_n = (-1)^{\frac{n}{2}+1}\frac{2\alpha}{\pi(n^2-1)^2} A_{1/2}. \tag{5}$$

Для нахождения неизвестных параметров $A_{1/2}$ и $\gamma_{1/2}$ с использованием ранее [1] описанного подхода подставим решение (4) в уравнение (1), потребовав его выполнения в моменты времени t_i, когда знак перемещения $u(t_i)$, определяющий значение упругой характеристики, известен. Для рассматриваемого сильного субгармонического резонанса ($A_{1/2} > A_1$) в качестве таких моментов времени примем:

$$\begin{aligned} &\nu t_1' = 2\beta + 2\gamma_{1/2}; && \nu t_2' = 2\pi + (2\beta + 2\gamma_{1/2}); \\ &\nu t_1'' = 2\pi - (2\beta - 2\gamma_{1/2}); && \nu t_2'' = 4\pi - (2\beta - 2\gamma_{1/2}). \end{aligned} \tag{6}$$

Этим моментам (6) на гармонике с половинной частотой вынужденных колебаний соответствуют показанные на рис. 1 точки *1'*, *1''*, *2'*, *2''*. Значение угла β в (6) соответствует условию $A_{1/2}\sin\beta > A_1$ и может выбираться в интервале $\beta_0 \le \beta \le \pi/2$, где β_0 отвечает условию $A_{1/2}\sin\beta = A_1$.

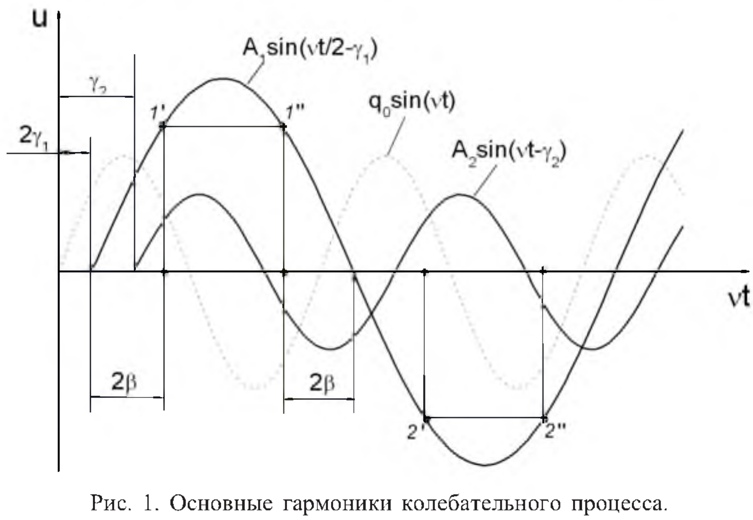

Рис. 1. Основные гармоники колебательного процесса.

Как видно, согласно принятому закону изменения жесткости точки *1′* и *1″*, для которых $u > 0$, определяют значение частоты свободных колебаний $(1-\alpha)\omega^2$, точки *2′* и *2″* – ω^2 (рис. 1).

Подставляя решение (4) для выбранных моментов времени (6) в уравнение (1), получаем две пары исходных уравнений:

$$
\begin{cases}
(1-\alpha)A_0 + \left\{\left[(1-\alpha) - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\sin\beta + \right.\\
+ \displaystyle\sum_{n=2,4,\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{2\alpha}{\pi(n^2-1)^2}\left[(1-\alpha) - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos n\beta \pm \\
\left.\pm \dfrac{\nu h}{\omega^2}\left[\cos\beta - \displaystyle\sum_{n=2,4,\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{2\alpha n}{\pi(n^2-1)^2}\sin n\beta\right]\right\}A_{1/2} \pm \\
\pm \left\{\left[(1-\alpha) - \left(\dfrac{\nu}{\omega}\right)^2\right][\sin 2\beta\cos\Delta\gamma \pm \cos 2\beta \sin\Delta\gamma] + \right.\\
\left. + 2\dfrac{\nu h}{\omega^2}[\cos 2\beta\cos\Delta\gamma \mp \sin 2\beta\sin\Delta\gamma]\right\}A_1 = \\
= \pm\dfrac{q_0}{\omega^2}(\sin 2\beta\cos 2\gamma_{1/2} \pm \cos 2\beta \sin 2\gamma_{1/2}); \qquad (1'), (1'') \\
A_0 - \left\{\left[1 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\sin\beta - \displaystyle\sum_{n=2,4,\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{2\alpha}{\pi(n^2-1)^2}\left[1 - \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{n\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos n\beta \mp \right.\\
\left.\mp \dfrac{\nu h}{\omega^2}\left[\cos\beta + \displaystyle\sum_{n=2,4,\ldots}(-1)^{\frac{n}{2}+1}\dfrac{2\alpha n}{\pi(n^2-1)^2}\sin n\beta\right]\right\}A_{1/2} \pm \\
\pm \left\{\left[1 - \left(\dfrac{\nu}{\omega}\right)^2\right][\sin 2\beta\cos\Delta\gamma \pm \cos 2\beta \sin\Delta\gamma] + \right.\\
\left. + 2\dfrac{\nu h}{\omega^2}[\cos 2\beta\cos\Delta\gamma \mp \sin 2\beta\sin\Delta\gamma]\right\}A_1 = \\
= \pm\dfrac{q_0}{\omega^2}(\sin 2\beta\cos 2\gamma_{1/2} \pm \cos 2\beta \sin 2\gamma_{1/2}), \qquad (2'), (2'')
\end{cases}
\tag{7}
$$

где

$$
\Delta\gamma = 2\gamma_{1/2} - \gamma_1. \tag{8}
$$

Для удобства анализа уравнения (7) дополнительно пронумерованы в соответствии с обозначением точек на рис. 1. При этом верхние знаки относятся к уравнениям (1′), (2′), нижние – к уравнениям (1″), (2″).

Для усреднения тригонометрических функций угла β в интервале его возможного изменения $\beta_0 \ldots \pi/2$ заменим их средними значениями:

$$(\sin\beta)_{\text{ср}} = \frac{2\cos\beta_0}{\pi - 2\beta_0}; \qquad (\sin 2\beta)_{\text{ср}} = \frac{1+\cos 2\beta_0}{\pi - 2\beta_0};$$
$$(\cos\beta)_{\text{ср}} = \frac{2(1-\sin\beta_0)}{\pi - 2\beta_0}; \qquad (\cos 2\beta)_{\text{ср}} = \frac{2-\sin 2\beta_0}{\pi - 2\beta_0}. \tag{9}$$

Учитывая малость амплитуд высших гармоник ($n > 2$) спектра свободных колебаний, в уравнениях (7) будем принимать во внимание только вторую гармонику, амплитуда которой равна $2\alpha/9\pi$. Тогда, рассматривая алгебраическую сумму уравнений $[(1')+(1'')]-[(2')+(2'')]$, находим относительную амплитуду низшей гармоники $\overline{A}_{1/2} = A_{1/2}/A_1$:

$$\overline{A}_{1/2} = \frac{\alpha(2-\sin 2\beta_0)\sin\Delta\gamma}{2\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos\beta_0 - \frac{\alpha^2}{\pi}[\pi - 2\beta_0 + 0{,}22222(2-\sin 2\beta_0)]}, \tag{10}$$

а алгебраическую сумму уравнений $[(1')-(2')]-[(1'')-(2'')]$ –

$$\overline{A}_{1/2} = \frac{\alpha(1+\cos 2\beta_0)\cos\Delta\gamma}{4(1-\sin\beta_0)\frac{\nu h}{\omega^2}}. \tag{11}$$

Приравнивая выражения (10) и (11), получаем формулу для определения разности сдвига фаз (8):

$$\operatorname{tg}\Delta\gamma = \frac{1+\cos 2\beta_0}{4(1-\sin\beta_0)(2-\sin 2\beta_0)\frac{\nu h}{\omega^2}} \times$$
$$\times\left\{2\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right]\cos\beta_0 - \frac{\alpha^2}{\pi}[\pi - 2\beta_0 + 0{,}22222(2-\sin 2\beta_0)]\right\}. \tag{12}$$

Для использования приведенных выражений необходимо знать величину β_0, удовлетворяющую условию $\sin\beta_0 \approx A_1/A_{1/2}$.

Рассмотрим предварительно приведенные выражения при $\beta_0 = 0$:

$$\overline{A}_{1/2} = \frac{2\alpha\sin\Delta\gamma}{2\left[(2-\alpha)-\frac{1}{2}\left(\frac{\nu}{\omega}\right)^2\right] - 1{,}141741\alpha^2} \equiv \frac{\alpha\cos\Delta\gamma}{2\frac{h\nu}{\omega^2}}; \tag{13}$$

$$\operatorname{tg}\Delta\gamma = \frac{2\left[(2-\alpha)-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\nu}{\omega}\right)^2\right]-1{,}141741\alpha^2}{4\dfrac{h\nu}{\omega^2}}. \tag{14}$$

Задавшись значениями α и $h/\omega = \delta/2\pi$ (δ – логарифмический декремент свободных колебаний), для случая настроенного субрезонанса $\nu/\omega = 4\sqrt{1-\alpha}/(1+\sqrt{1-\alpha})$ с использованием формул (13), (14) определяем значения $\Delta\gamma$ и $\bar{A}_{1/2}$. Зная приближенную величину $\bar{A}_{1/2}$, определяем значение $\beta_0 = \arcsin(1/\bar{A}_{1/2})$ и затем опять находим $\Delta\gamma$ с помощью (12) и $\bar{A}_{1/2}$ – по (10) или (11). Для дальнейшего уточнения значения $\bar{A}_{1/2}$ необходимо вновь определить β_0 из условия, что $\sin\beta_0$ равен найденной величине $\bar{A}_{1/2}$, и т.д.

Результаты расчета. Расчетные зависимости относительной амплитуды $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$, полученные по формулам (13), (14) при $\nu = 2\omega_0$ для различных значений логарифмического декремента колебаний δ, приведены на рис. 2, на рис. 3 – зависимости $\bar{A}_{1/2}(\delta)$ для различных значений параметра α. В качестве примера на рис. 2 для значений $\delta = 0{,}01$ и $0{,}005$ штрихпунктирными линиями показаны зависимости $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$, полученные с использованием (10) и (11) при определении величин β_0 из условия $\beta_0 \approx \arcsin(1/\bar{A}_{1/2})$. Как видно, на практике допустимо использовать выражения (13), что значительно упрощает расчеты.

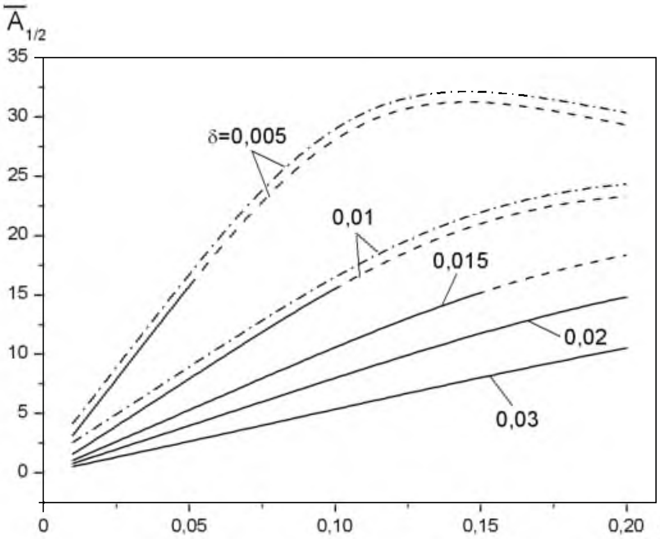

Рис. 2. Зависимость относительной амплитуды низшей гармоники $\bar{A}_{1/2}$ от параметра α, полученная с использованием формул (13), (14) – сплошные и штриховые линии и (10), (11), (12) при определении значения β_0 из условия $\sin\beta_0 \approx \arcsin(1/\bar{A}_{1/2})$ – штрихпунктирные линии, при частоте возбуждения $\nu = 2\omega_0$ для различных значений логарифмического декремента колебаний.

При отношении $\alpha/\delta \le 10$ относительная амплитуда $\bar{A}_{1/2}$ оказывается прямо пропорциональна значению α при данной величине δ и обратно пропорциональна δ при данном α. Эти области значений $\overline{A}_{1/2}$ показаны на рис. 2 сплошными линиями.

Анализ полученных результатов показывает, что для случая настроенного резонанса при значениях $\alpha/\delta < 10$ зависимости $\overline{A}_{1/2} = f(\alpha, \delta)$ удовлетворительно описываются, как и в случае слабого резонанса, единой формулой

$$\overline{A}_{1/2} = \frac{\pi}{2}\frac{\alpha}{\delta} \tag{15}$$

при том же значении коэффициента пропорциональности.

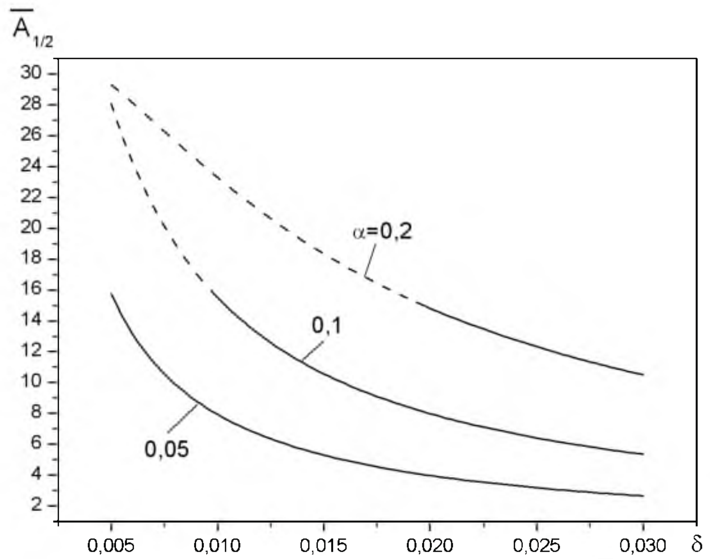

Рис. 3. Зависимость относительной амплитуды низшей гармоники $\overline{A}_{1/2}$ от величины логарифмического декремента колебаний δ, полученная с использованием формул (13), (14) для различных значений параметра α.

Для определения относительной амплитуды низшей гармоники $\overline{A}_{1/2}$ при субгармоническом резонансе применительно к конкретному элементу конструкции необходимо определить параметр α, который зависит от вида, относительных размеров и месторасположения трещины нормального отрыва, относительных размеров и форм колебаний конструктивного элемента. Например, для стержней прямоугольного поперечного сечения с одной краевой поперечной трещиной параметр α определяется по формуле [4]

$$\alpha = \frac{D(h/l, x_{\text{т}})H_1(\gamma)}{1 + D(h/l, x_{\text{т}})H_1(\gamma)}.$$

Здесь

$$D(h/l, x_{\text{т}}) = 2\pi \frac{bh^2 S_1 P^2(x_{\text{т}})}{S_2^2 \int\limits_0^l P^2(x)dx}; \qquad H_1(\gamma) = \int\limits_0^\gamma \gamma F_1^2(\gamma)d\gamma,$$

где $P(x)$ – осевое усилие при продольных колебаниях и изгибающий момент при изгибных колебаниях стержня; S_1 – площадь поперечного сечения при продольных колебаниях и осевой момент инерции при изгибных колебаниях; S_2 – площадь поперечного сечения при продольных колебаниях и осевой момент сопротивления при изгибных колебаниях; b и h – ширина и высота поперечного сечения стержня; l – длина стержня; $x_{\text{т}}$ – координата сечения с трещиной; γ – относительная глубина трещины; $F_1(\gamma)$ – безразмерная функция относительной глубины трещины, входящая в выражения для определения коэффициента интенсивности нормальных напряжений.

С использованием приведенных в [5] данных о функции $F_1(\gamma)$ при продольных колебаниях получим

$$H_1(\gamma) = 0{,}6272\gamma^2 - 0{,}17248\gamma^3 + 5{,}92134\gamma^4 - 10{,}70538\gamma^5 + 31{,}56845\gamma^6 -$$

$$-67{,}47602\gamma^7 + 139{,}12342\gamma^8 - 146{,}6824\gamma^9 + 92{,}35521\gamma^{10},$$

при изгибных –

$$H_1(\gamma) = 0{,}6295\gamma^2 - 1{,}0472\gamma^3 + 4{,}602\gamma^4 - 9{,}9752\gamma^5 + 20{,}2948\gamma^6 -$$

$$-32{,}9933\gamma^7 + 47{,}0408\gamma^8 - 40{,}6933\gamma^9 + 19{,}6\gamma^{10}.$$

Значение функции $D(h/l, x_{\text{т}})$ зависит от относительной высоты поперечного сечения стержня (h/l), месторасположения трещины ($x_{\text{т}}$), формы колебаний (i) стержня, и, например, для консольного стержня при продольных колебаниях определяется по выражению

$$D(h/l, x_{\text{т}}) = 4\frac{\pi h}{l}\cos^2\left[\frac{\pi(2i-1)}{2l}x_{\text{т}}\right],$$

при изгибных –

$$D(h/l, x_{\text{т}}) = 24\frac{\pi h}{l}\left[S(k_i x_{\text{т}}) - \frac{S(k_i l)}{T(k_i l)}T(k_i x_{\text{т}})\right]^2,$$

где $S(kx)$, $T(kx)$ – функции Крылова,

$$S(kx) = \frac{(\operatorname{ch} kx + \cos kx)}{2}; \qquad T(kx) = \frac{(\operatorname{sh} kx + \sin kx)}{2};$$

$$k_1 l = 1{,}875; \qquad k_2 l = 4{,}694; \qquad k_3 l = 7{,}855;$$

для $i > 3$ имеем

$$k_i l = \frac{\pi(2i-1)}{2l}.$$

Функция $D(h/l, x_т)$ для исследуемой формы колебаний стержня, данных значений h/l и $x_т$ – величина постоянная, и характер зависимости относительной амплитуды $\overline{A}_{1/2}$ от относительной глубины трещины будет определяться зависимостью значения функции $H_1(\gamma)$ от γ и может существенно отличаться от линейной.

С использованием выражений (10)–(12) или (13), (14) могут быть получены амплитудно-частотные и фазочастотные характеристики исследуемой системы в области субгармонического резонанса.

В качестве примера на рис. 4 приведены указанные зависимости для $\alpha = 0{,}08$ и $\delta = 0{,}02011$. Для сравнения там же штрихпунктирной линией показана амплитудно-частотная зависимость для области основного резонанса. Зависимости приведены в относительных координатах $\overline{\overline{A}} = \overline{A}_{1/2}(\nu)/\overline{A}_{1/2}(\nu = 2\omega_0)$ и $\overline{\nu} = \nu/2\omega_0$ для субгармонического резонанса и $\overline{A} = A(\nu)/A(\nu = \omega_0)$ и $\overline{\nu} = \nu/\omega_0$ для основного резонанса.

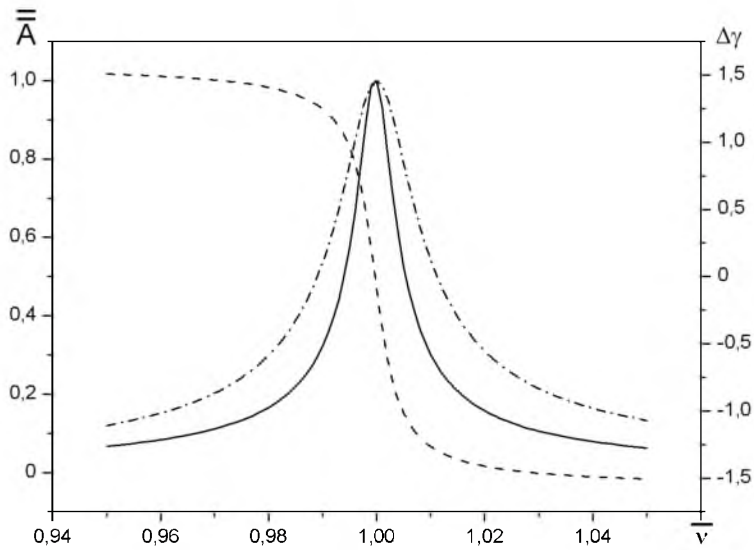

Рис. 4. Амплитудно-частотная (сплошная линия) и фазочастотная (шриховая линия) зависимости в области субгармонического резонанса, определенные с использованием формул (13), (14), при $\alpha = 0{,}08$ и $\delta = 0{,}02011$.

Оценка достоверности методики. Для оценки достоверности результатов расчета проводилось их сравнение с данными численного решения, полученного методом усреднения по ускорению [6, 7].

На рис. 5 для случая настроенного субгармонического резонанса при $\delta = 0{,}00503$ приведена расчетная зависимость относительной амплитуды низшей гармоники от α, полученная по формуле (13) и по данным численного решения. Как видно, для $\alpha < 0{,}1$, что соответствует отношению $\alpha/\delta < 20$, наблюдается достаточно удовлетворительное их соответствие. При этом подтверждается наличие в области указанных значений α/δ практически линейной зависимости относительной амплитуды низшей гармоники от параметра α с несколько отличающимся от расчетного коэффициентом пропорциональности.

 ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2008, № 3

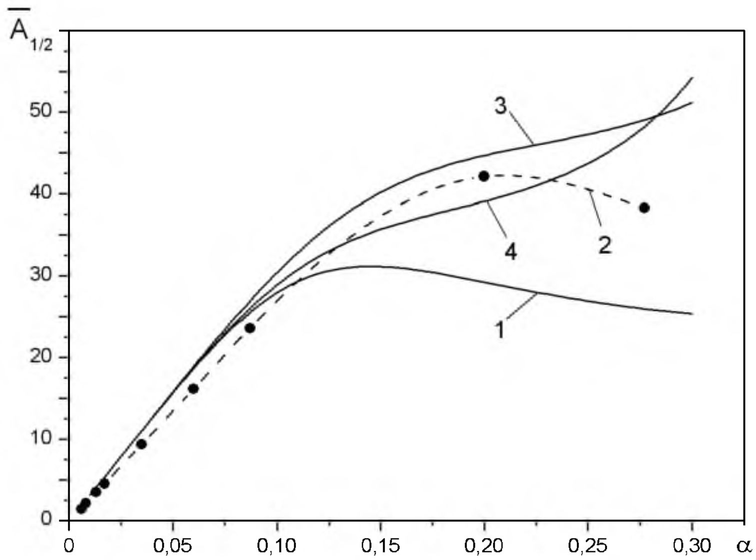

Рис. 5. Зависимость относительной амплитуды низшей гармоники при субгармоническом резонансе от параметра α при $\delta = 0{,}00503$: *1* – по формуле (13); *2* – по данным численного решения; *3* – по формуле (13) при значении коэффициента при $\alpha^2 = 1$; *4* – при значении коэффициента, равном $(2-\alpha)/2+0{,}141471$.

Однако с увеличением параметра α расхождение между результатами аналитического и численного решений существенно возрастает. Это можно, по-видимому, объяснить возможным изменением относительной амплитуды гармоники $A_2 \cos 2(\nu t/2 - \gamma_{1/2})$ при больших значениях α. Так, принимая $A_2 = 0$, что обусловливает в формулах (13), (14) замену коэффициента 1,141471 при α^2 на 1,0, получаем зависимость, показанную на рис. 5 кривой *3*. Возможно также изменение значения постоянной составляющей с увеличением параметра α. Так, принимая вместо $A_0 = A_{1/2}\alpha/\pi$ значение $A_0 = A_{1/2}\alpha(2-\alpha)/2\pi$ [1], что определяет значение коэффициента при α^2 равным $0{,}141471+(2-\alpha)/2$, получаем зависимость $\bar{A}_{1/2}(\alpha)$ – на рис. 5 кривая *4*. Такое объяснение вполне логично, так как значения постоянной составляющей A_0 и амплитуды A_2 второй гармоники в спектре свободных колебаний получены [3] асимптотическим методом нелинейной механики, предполагающим малое значение параметра α.

Для оценки изменения характера зависимости относительной амплитуды $\bar{A}_{1/2}$ при переходе от параметра α к относительной глубине трещины γ на рис. 6 в качестве примера для случая $\delta = 0{,}00503$ приведены зависимости $\bar{A}_{1/2}$ от α и γ. Исходную расчетную кривую *1* определяли по формуле (13) с использованием (14), кривую *2* – по данным численного решения. Для кривых *3*, *4* данные о соотношении α и γ взяты для случая продольных колебаний стержня прямоугольного поперечного сечения, $h/l = 0{,}13333$ и $x_т/l = 0{,}2$ [8].

Анализ данных численного решения при других значениях логарифмического декремента колебаний δ показывает, что для области стабильных значений относительной амплитуды $\bar{A}_{1/2}$, больших единицы, также подтверждаются результаты представленного приближенного расчета при отношении $\alpha/\delta < 20$. Амплитуда $\bar{A}_{1/2}$ прямо пропорциональна значению α при данной величине δ и обратно пропорциональна ей при данном значении α. Более того, численное решение удовлетворительно описывается единой зависимостью $\bar{A}_{1/2} = K\alpha/\delta$ с коэффициентом пропорциональности $K \cong 1{,}34$, что на 14,7% меньше расчетного.

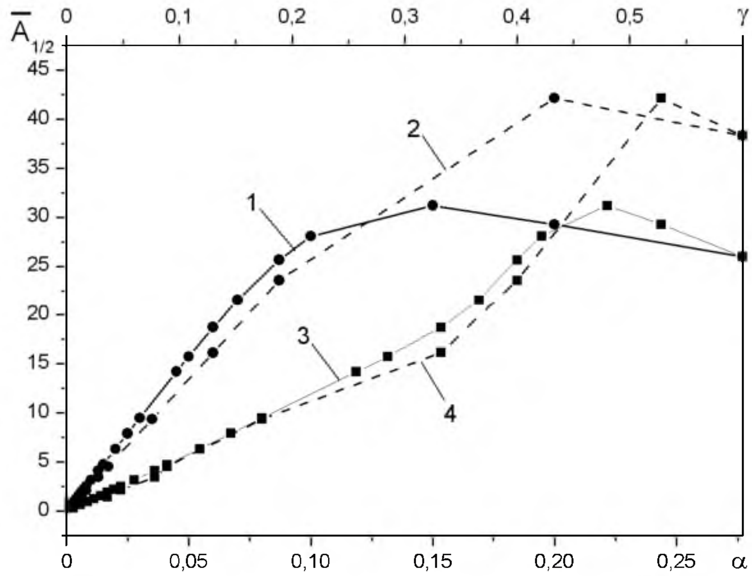

Рис. 6. Зависимость относительной амплитуды низшей гармоники $\bar{A}_{1/2}$ при субгармоническом резонансе от параметра α (*1*, *2*) и относительной глубины трещины γ (*3*, *4*), полученная путем расчета (*1*, *3*) и по данным численного решения (*2*, *4*).

Определение абсолютных значений амплитуды и сдвига фаз отдельных гармоник. Как и ранее [1, 2], полагаем, что амплитуда основной гармоники $A_1 \sin(\nu t - \gamma_1)$ соответствует решению вынужденных колебаний линейной системы с собственной частотой тела с закрывающейся трещиной (3):

$$\frac{A_i}{q_0} = \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{\left[1 - \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^2\right]^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\delta}{\pi}\right)^2 \left(\frac{\nu}{\omega_0}\right)^2}}, \tag{16}$$

а сдвиг фазы γ_1 определяется из баланса подводимой ΔW_q и поглощаемой ΔW_h энергий за цикл колебаний с периодом $2\pi/\omega_0$.

Для рассматриваемого случая моногармонического возбуждения и вязкого трения имеем

$$\Delta W_q = \pi q_0 \left(\sin\gamma_1 - \frac{2\alpha}{9\pi} \bar{A}_{1/2} \cos 2\gamma_{1/2} \right) A_1; \tag{17}$$

$$\Delta W_h \approx 2\pi h \nu \left\{ 1 + \frac{1}{4}[1 + 0{,}02\alpha^2]\overline{A}_{1/2}^2 \right\} A_1^2 . \tag{18}$$

В выражении (18) в отличие от случая слабого резонанса, когда $A_{1/2} < A_1$, учитывается также вторая гармоника спектра свободных колебаний $2\alpha A_{1/2}\cos(\nu t - 2\gamma_{1/2})/9\pi$, обусловливая появление слагаемого $0{,}02\alpha^2$.

Из условия $\Delta W_q = \Delta W_h$ при учете (16) и (8), (14) получаем уравнение для определения γ_1:

$$(1 - 0{,}07074\alpha \sin\Delta\gamma)\sin\gamma_1 - 0{,}07074\alpha\cos\Delta\gamma\cos\gamma_1 =$$

$$= 2h\nu\left[1 + \frac{(1 + 0{,}02\alpha^2)\overline{A}_{1/2}^2}{4}\right]\frac{A_1}{q_0},$$

где A_1/q_0 вычисляем из формулы (16). Зная $\Delta\gamma$ и γ_1 согласно (8) определяем значение $\gamma_{1/2} = (\Delta\gamma + \gamma_1)/2$.

Выводы

1. Рассмотрен приближенный метод расчета параметров колебательного процесса упругого тела с закрывающейся трещиной, моделируемого одномассовой системой с несимметричной билинейной характеристикой восстанавливающей силы, в области сильного субгармонического резонанса порядка 1/2.

2. Получены аналитические выражения для определения в области субгармонического резонанса основного вибродиагностического параметра наличия трещины – относительной амплитуды низшей гармоники $\overline{A}_{1/2}$ спектра колебаний.

3. Результаты расчета вибродиагностического параметра $\overline{A}_{1/2}$ удовлетворительно согласуются с данными численного решения для значений $\alpha/\delta < 20$.

4. Установлено, что для отношения $\alpha/\delta \le 10$ относительная амплитуда низшей гармоники $\overline{A}_{1/2}$ прямо пропорциональна параметру нелинейности колебательной системы α и обратно пропорциональна логарифмическому декременту колебаний системы δ.

5. С достаточной для практики точностью зависимость $\overline{A}_{1/2}(\alpha, \delta)$ удовлетворительно описывается единой формулой $\overline{A}_{1/2} = \dfrac{\pi}{2}\dfrac{\alpha}{\delta}$.

Резюме

Із використанням запропонованого в повідомленні 1 підходу розглядається наближений розрахунок параметрів коливального процесу пружного тіла з тріщиною, що закривається, в області сильного субгармонічного резонансу порядку 1/2, коли амплітуда нижчої гармоніки спектра вільних коливань більша за основну амплітуду вимушених коливань.

1. *Матвеев В. В.*, *Бовсуновский О. А.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров упругого тела с трещиной при субгармоническом резонансе. Сообщ. 1. Слабый резонанс // Пробл. прочности. – 2008. – № 2. – С. 26 – 40.
2. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленных наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 1. Существующие и предлагаемые методы решения // Там же. – 2004. – № 4. – С. 5 – 20.
3. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Там же. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
4. *Матвеев В. В.*, *Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 3. Аналитическое и численное определение собственных частот продольных и изгибных колебаний стержней с поперечными трещинами // Там же. – 1999. – № 4. – С. 19 – 31.
5. *Справочник* по коэффициентам интенсивности напряжений: В 2 т. / Пер. с англ. под ред. Ю. Мураками. – М.: Мир, 1990. – 488 с.
6. *Бовсуновский А. П.*, *Матвеев В. В.* Особенности колебаний упругих тел, обусловленные наличием локальных повреждений типа усталостных трещин // Надежность и долговечность машин и сооружений. – 2006. – Вып. 26. – С. 26 – 30.
7. *Бовсуновский А. П.* Сравнительный анализ нелинейных резонансов механической системы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы // Пробл. прочности. – 2007. – № 2. – С. 72 – 87.
8. *Матвеев В. В.*, *Бовсуновский А. П.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 4. Анализ искажения гармоничности цикла колебаний стержневых элементов при наличии закрывающихся поперечных трещин // Там же. – 2000. – № 1. – С. 5 – 12.

Поступила 24. 11. 2006