

Термоупругая контактная задача для слоя, взаимодействующего с жестким основанием при нестационарном фрикционном тепловыделении

П. П. Краснюк

Львовский банковский институт НБУ, Львов, Украина

Решена термоупругая задача взаимодействия упругого слоя с жестким основанием, от которого тело может отделиться под действием локализованной прижимающей нагрузки. Исследовано влияние нестационарного фрикционного тепловыделения, сопровождающего перемещение слоя по поверхности теплоизолированного основания, и функциональной зависимости прижимающей нагрузки на этот процесс. Показано, что увеличение интенсивности тепловыделения приводит к уменьшению области контакта, где изменение со временем последнего определяется выбором функции изменения нагрузки и скорости движения: если от времени зависит нагрузка, то область контакта не изменяется, если изменяется скорость движения, то наблюдается монотонное ее уменьшение.

Ключевые слова: контактное взаимодействие, слой, фрикционное тепловыделение, нестационарная температура, отрыв контактирующих поверхностей.

Обозначения

x, y, z	–	декартовы координаты
τ	–	время
h	–	толщина слоя
Δ	–	оператор Лапласа в декартовой системе координат (двухмерный случай), $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$
$q(x, \tau)$	–	прижимающая нагрузка
$v(\tau)$	–	скорость перемещения
$q_*(x, Fo), v_*(Fo)$	–	безразмерные функции прижимающей нагрузки и скорости движения
$p(x, \tau)$	–	контактное давление
T	–	температура
u_x, u_y	–	компоненты вектора перемещений
$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$	–	компоненты тензора напряжений
χ	–	параметр, определяющий интенсивность тепловыделения
E	–	модуль Юнга
$\nu, \lambda, k, \alpha, \bar{\alpha}, f$	–	соответственно коэффициенты Пуассона, теплопроводности, температуропроводности, линейного теплового расширения, теплообмена и трения
$a(Fo)$	–	изменяемая со временем полуширина участка контакта
Fo, Bi	–	критерии Фурье и Био
$\operatorname{erfc}(z)$	–	функция ошибок

μ_m	– положительные корни трансцендентного уравнения задачи Штурма–Лиувилля
$Ci(z)$	– интегральный косинус
$E_1(z)$	– интегральная показательная функция
i	– мнимая единица, $i^2 = -1$
$S(z)$	– функция Хевисайда
$\delta(x)$	– δ -функция Дирака
$T_n(t)$	– полином Чебышева первого рода порядка n
$U_n(t)$	– полином Чебышева второго рода порядка n
γ	– константа Эйлера

Введение. Контактное взаимодействие тел с поверхностными слоями, упругие характеристики которых отличаются от свойств основания, часто встречается на практике (например, валки, покрытые резиной, широко используемые в перерабатывающей промышленности). Если толщина слоя больше характерных размеров области контакта, то основное тело не влияет на контактные напряжения, определяемые теорией Герца, если толщина слоя соизмерима с размером области контакта или меньше ее, то контактное взаимодействие зависит от способа крепления слоя к основанию. При этом возможны следующие варианты:

слой может постоянно находиться в контакте с основанием во всех точках, но свободно проскальзывать по нему;

слой может быть полностью сцеплен с основанием;

если касательные напряжения на поверхности раздела превышают граничные напряжения трения, то может иметь место проскальзывание;

слой, находящийся изначально в полном контакте с основанием, может частично отделяться от него под воздействием нагрузки.

В частности, в [1, 2] в осесимметричной и плоской постановке рассмотрены упругие контактные задачи для многослойных систем. В предположении полного контакта слоев исследованы случаи гладкого взаимодействия (отсутствие касательных напряжений на границе раздела) и проскальзывания. Гладкий контакт многослойных систем также рассматривался в [3].

Вообще говоря, контакт слоев – это взаимодействие тел хорошо сопряженной формы, которые изначально вступают в контакт по некоторой области, которая после приложения нагрузки может уменьшаться. Поэтому, например, для слоя и основания характерным является контакт с отделением, если слой может свободно отделиться от основания под действием нагрузки.

В [4] при исследовании в осесимметричной постановке контактной задачи о вжатии слоя в упругое полупространство сосредоточенной силой показано, что контакт тела с основанием имеет место только по круговой области. В плоской постановке эта задача рассматривалась в [5]. В [6] получено решение указанных задач с несколько других позиций. А именно: как в осесимметричной, так и в плоской постановке эта задача приведена к однородному интегральному уравнению Фредгольма второго рода относительно некоторой вспомогательной функции – собственной функции инте-

грального оператора. При этом приемлемой собственной функцией является та, что обеспечивает только сжимающие напряжения в зоне контакта.

Ранее [7] исследовано квазистатическое контактное взаимодействие двух слоев, обжатых нагрузкой, изменяющейся вдоль оси, перпендикулярной к направлению движения одного из составляющих трибосистему слоев по поверхности другого. При этом учитывается тепловыделение от действия сил трения. Показано, что в случае взаимодействия тел с одинаковыми геометрическими, механическими и теплофизическими характеристиками и определении обжимающих нагрузок идентичными математическими функциями, задача эквивалентна вжатию слоя в жесткое теплоизолированное основание. В этом случае исследуемая проблема приведена к одному интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода относительно функции, пропорциональной трансформанте Фурье [8] теплового потока на поверхности взаимодействия. На основании аналитико-численных исследований установлено, что даже непрерывная, но локализованная на небольшом участке нагрузка является причиной образования зон положительных контактных напряжений – зон отрыва, имеющих тенденцию к росту с увеличением интенсивности тепловыделения. При этом односвязность области приложения прижимающей нагрузки обеспечивает односвязность зоны нагруженного контакта, а тепловыделение не нарушает сплошности контакта, что характерно при чисто силовом взаимодействии.

Условие существования зон отрыва требует уточнить постановку задачи [7]. Ниже рассматривается контактная задача о слое, изначально находящемся в полном контакте с основанием, который может отделяться от него под воздействием нагрузки. Исследуется влияние нестационарного процесса тепловыделения от действия сил трения, возникающих при перемещении упругого слоя по поверхности жесткого теплоизолированного основания, на механизм отрыва.

Математическая постановка задачи и построение решения. Рассмотрим упругий теплопроводный слой толщиной h , прижатый к жесткому теплонепроницаемому основанию нагрузкой $q(x, \tau)$, являющейся функцией координаты x и времени τ (рис. 1). В предположении локализованной нагрузки имеют место отделение слоя от основания и одна область контакта при односвязной области приложения нагрузки [7].

Слой в направлении оси z перемещается по поверхности основания с изменяющейся со временем малой скоростью $v(\tau)$. В результате действия сил трения τ_{yz} , возникающих на контактирующей поверхности и подчиненных закону Амонтона ($\tau_{yz} = f\sigma_y$), в плоскости контакта происходит тепловыделение. При этом все тепло, сгенерированное на контакте, вследствие теплоизоляции основания распространяется внутрь слоя, вызывая тем самым выпучивание контактной поверхности и изменение со временем границ участка взаимодействия. Теплоотдачей с поверхности $y = 0$ в зоне отрыва пренебрегаем, а между верхней плоскостью слоя и окружающей средой с нулевой температурой предполагаем теплообмен по закону Ньютона.

Поведение такой трибосистемы исследуем в квазистатической постановке, т.е. пренебрегаем динамическими эффектами, которые могут возникнуть при действии нагрузки.

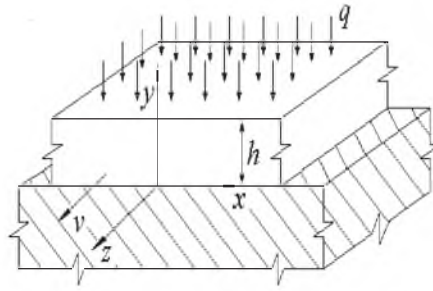


Рис. 1. Схема контактного взаимодействия упругого слоя с основанием.

При этих предположениях слой находится в условиях плоской и антиплоской деформации. Влиянием антиплоской деформации на вертикальные перемещения контактирующей поверхности слоя и наличием касательных напряжений τ_{yx} на поверхности $y = 0$ пренебрегаем. Отметим, что это не является ограничением, поскольку в классической теории упругости плоская деформация рассматривается отдельно от антиплоской.

В математическом плане задача приводится к построению решения системы дифференциальных уравнений теплопроводности

$$\Delta T = k^{-1} \partial_{\tau} T \quad (1)$$

и термоупругости

$$\begin{aligned} (1-2\nu)\Delta u_x + \partial_x(\partial_x u_x + \partial_y u_y) &= 2\alpha(1+\nu)\partial_x T; \\ (1-2\nu)\Delta u_y + \partial_y(\partial_x u_x + \partial_y u_y) &= 2\alpha(1+\nu)\partial_y T \end{aligned} \quad (2)$$

при начальном

$$T(x, y, 0) = 0, \quad (3)$$

граничных и контактных условиях:

$$\begin{aligned} y = 0: \quad \partial_y T &= -fv(\tau)\lambda^{-1}p(x, \tau), \quad u_y = 0, \quad x \in \Omega(\tau), \\ \partial_y T &= 0, \quad \sigma_y = 0, \quad x \notin \Omega(\tau), \quad \tau_{yx} = 0, \quad |x| < \infty; \end{aligned} \quad (4)$$

$$y = h: \quad \partial_y T = -\gamma T, \quad \sigma_y = -q(x, \tau), \quad \tau_{yx} = 0, \quad |x| < \infty, \quad (5)$$

где напряжения определяются по формулам:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\partial_x u_x + \frac{\nu}{1-\nu} \partial_y u_y - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T \right); \\ \sigma_y &= \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left(\partial_y u_y + \frac{\nu}{1-\nu} \partial_x u_x - \alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} T \right); \end{aligned}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} (\partial_y u_x + \partial_x u_y).$$

Кроме того, в каждый момент времени должны выполняться условия равновесия:

$$\int_{\Omega(\tau)} p(x, \tau) dx = \int_{-\infty}^{\infty} q(x, \tau) dx; \quad \int_{\Omega(\tau)} xp(x, \tau) dx = \int_{-\infty}^{\infty} xq(x, \tau) dx \quad (6)$$

– равенство нулю главного вектора и главного момента всех внешних усилий, приложенных к слою, при выходе трибосистемы на установившийся режим – условия теплового баланса:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{\Omega(\tau)} \partial_y T(x, 0, \tau) dx = -\gamma \lim_{\tau \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, h, \tau) dx.$$

Здесь и ниже: x, y, z – декартовы координаты; τ – время; $\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ – оператор Лапласа в декартовой системе координат (двухмерный случай); $p(x, \tau)$ – контактное давление; T – температура; u_x, u_y – компоненты вектора перемещений; $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ – компоненты тензора напряжений; E – модуль Юнга; ν, λ, k, α – соответственно коэффициенты Пуассона, теплопроводности, температуропроводности и линейного теплового расширения; $\gamma = \bar{\alpha}/\lambda$; $\bar{\alpha}$ – коэффициент теплообмена; f – коэффициент трения; $\Omega(\tau)$ – неизвестная изменяемая со временем односвязная область контакта.

Не ограничивая общность постановки задачи, предположим, что нагрузка на поверхности $y = h$ слоя распределена симметрично относительно оси $x = 0$. Тогда справедливо соотношение $p(x, \tau) = p(-x, \tau)$, и в качестве области контакта $\Omega(\tau)$ можно взять отрезок $[-a(\tau), a(\tau)]$, где $a(\tau)$ – неизвестная изменяемая со временем полуширина участка взаимодействия. Второе условие равновесия из (6) автоматически выполняется, поскольку момент такой нагрузки равен нулю. Кроме того, поведение на бесконечности функции $q(x)$ предполагаем таким, что допускает применение интегрального преобразования Фурье.

Используя при решении задачи теплопроводности уравнения (1), (3), (5₁) и

$$\partial_y T(x, 0, \tau) = -fv(\tau)\lambda^{-1} p(x, \tau)S(\Omega(\tau)),$$

где $S(\Omega(\tau))$ – функция Хевисайда [9], равная единице при $x \in \Omega(\tau)$ и нулю при $x \notin \Omega(\tau)$, а также решения соответствующей ей задачи термоупругости (2), (5₂), (5₃) и

$$y = 0: \quad \sigma_y = -p(x, \tau)S(\Omega(\tau)); \quad \tau_{yx} = 0; \quad |x| < \infty,$$

интегральное cos-преобразование Фурье по координате x и Лапласа по времени τ [8], можно записать интегральные изображения для температуры, перемещений и напряжений в слое через неизвестную функцию $p(x, \tau)$ (детальные выкладки приведены ранее [7]), для определения которой используется последнее граничное условие – кинематическое условие контакта (4₂):

равенство нулю нормальных перемещений поверхности $y = 0$ в зоне контакта. Удовлетворив это условие, получим интегральное уравнение, которое приведем в безразмерном виде. А именно: отнесем линейные размеры тела к толщине слоя h , напряжения – к величине интенсивности нагрузки q_0 , температуру – к комбинации параметров $\alpha E(2q_0(1-\nu))^{-1}$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \int_{-a(\text{Fo})}^{a(\text{Fo})} p(t, \text{Fo}) \Delta_0(t-x) dt - \\ & - \frac{\chi}{\pi} \partial_{\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} v_*(\eta) \int_{-a(\eta)}^{a(\eta)} p(t, \eta) H(t-x, \text{Fo}-\eta) dt d\eta = I(x, \text{Fo}), \end{aligned} \quad (7)$$

$$|x| \leq a(\text{Fo}).$$

Уравнение (7) с условием равновесия

$$\int_{-a(\text{Fo})}^{a(\text{Fo})} p(t, \text{Fo}) dt = \int_{-\infty}^{\infty} q_*(t, \text{Fo}) dt \quad (8)$$

и с соотношениями ограниченности контактных напряжений

$$p(\pm a(\text{Fo}), \text{Fo}) = 0, \quad (9)$$

используемых для определения неизвестной границы участка контакта, дают полную систему уравнений поставленной задачи. Для температуры слоя имеем интегральное выражение

$$T = (x, y, \text{Fo}) = \frac{\chi}{\pi} \partial_{\text{Fo}} \int_0^{\text{Fo}} v_*(\eta) \int_{-a(\eta)}^{a(\eta)} p(t, \eta) \Phi(t-x, y, \text{Fo}-\eta) dt d\eta.$$

При этом

$$\Delta_0(x) = \int_0^{\infty} \bar{\Delta}_1(\xi) \cos(\xi x) d\xi; \quad H(x, \text{Fo}) = \int_0^{\infty} \bar{H}(\xi, \text{Fo}) \cos(\xi x) d\xi;$$

$$I(x, \text{Fo}) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \bar{\Delta}_2(\xi) \int_0^{\infty} q_*(t, \text{Fo}) \cos(t\xi) dt \cos(\xi x) d\xi;$$

$$\chi = \frac{fv_0 \alpha E h}{2\lambda(1-\nu)}; \quad \bar{\Delta}_1(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{\text{ch}(\xi) \text{sh}(\xi) + \xi}{\text{sh}^2(\xi) - \xi^2}; \quad \bar{\Delta}_2(\xi) = \frac{1}{\xi} \frac{\xi \text{ch}(\xi) + \text{sh}(\xi)}{\text{sh}^2(\xi) - \xi^2};$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(\xi, \text{Fo}) = & \frac{1}{\xi^2} - 4\xi \frac{\text{sh}(\xi) \text{ch}(\xi) + \xi}{\text{sh}^2(\xi) - \xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-(\xi^2 + \mu_m^2) \text{Fo})}{(\xi^2 + \mu_m^2)^2 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} + \\ & + 4\xi \frac{\text{sh}(\xi)(1 + \text{Bi}) + \xi \text{ch}(\xi)}{\text{sh}^2(\xi) - \xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_m) \exp(-(\xi^2 + \mu_m^2) \text{Fo})}{(\xi^2 + \mu_m^2)^2 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})}; \end{aligned}$$

$$\Phi(x, y, \tau) = \Phi_{st}(x, y) - \frac{\pi}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_m y)}{\mu_m (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} \times \\ \times \sum_{k=1}^2 \exp((-1)^k \mu_m x) \text{erfc} \left(\mu_m \sqrt{\text{Fo}} + (-1)^k \frac{x}{2\sqrt{\text{Fo}}} \right);$$

$$\Phi_{st}(x, y) = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_{st}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi;$$

$$\bar{\Phi}_{st}(\xi, y) = \frac{1}{\xi} \frac{\xi \text{ch}(\xi(1-y)) + \text{Bish}(\xi(1-y))}{\xi \text{sh}(\xi) + \text{Bich}(\xi)},$$

где v_0 – масштаб изменения скорости; $q_*(x, \text{Fo})$, $v_*(\text{Fo})$ – безразмерные функции прижимающей силы и скорости движения; $\text{Fo} = \tau kh^{-2}$, $\text{Bi} = \gamma h$ – критерии Фурье и Био [10]; $\text{erfc}(z)$ – функция ошибок [9]; μ_m – положительные корни трансцендентного уравнения задачи Штурма–Лиувилля [8],

$$\mu \sin(\mu) - \text{Bi} \cos(\mu) = 0 \quad (\mu \neq 0).$$

Координата y изменяется в пределах $0 \leq y \leq 1$. В приведенных выше формулах не вводились новые переменные для отнесенных к толщине слоя h координат x , y и полуширины участка взаимодействия $a(\text{Fo})$, а также для функций контактного давления $p(x, \text{Fo})$ и температуры T , отнесенных соответственно к интенсивности нагрузки q_0 и комбинации параметров $\alpha E(2q_0(1-\nu))^{-1}$.

Определение и построение численного алгоритма. На основе метода трапеций [9] и с использованием результатов работы [11] проведем дискретизацию по времени интегрального уравнения (7) при условиях (8), (9) в часовом промежутке $[0, \text{Fo}_*]$, на котором исследуется поведение трибосистемы (этот интервал разбиваем на N отрезков времени $\text{Fo}_k = k\text{Fo}_1$ ($k = 0, \dots, N$), где $\text{Fo}_N = \text{Fo}_*$). Тогда в каждый момент времени Fo_k получим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi} \int_{-a(\text{Fo}_k)}^{a(\text{Fo}_k)} p(t, \text{Fo}_k) (\Delta_0(t-x) - 0,5\chi v_*(\text{Fo}_k) H(t-x, \text{Fo}_1)) dt = \\ = I(x, \text{Fo}_k) + \chi R(x, \text{Fo}_k); \quad |x| \leq a(\text{Fo}_k)$$

при условиях

$$p(\pm a(\text{Fo}_k), \text{Fo}_k) = 0; \quad \int_{-a(\text{Fo}_k)}^{a(\text{Fo}_k)} p(x, \text{Fo}_k) dx = \int_{-\infty}^{\infty} q_*(t, \text{Fo}_k) dt,$$

где

$$R(x, 0) = 0; \quad R(x, \text{Fo}_1) = 0,25 G_1(x, \text{Fo}_{0,2});$$

$$R(x, Fo_2) = 0,5G_2(x, Fo_{1,2}) + 0,25(G_2(x, Fo_{0,3}) - G_2(x, Fo_{0,1}));$$

$$R(x, Fo_n) = 0,5G_n(x, Fo_{n-1,2}) + 0,5 \sum_{k=1}^{n-2} (G_n(x, Fo_{k,n+1-k}) -$$

$$- G_n(x, Fo_{k,n-1-k})) + 0,25(G_n(x, Fo_{0,n+1}) - G_n(x, Fo_{0,n-1})) \quad (n \geq 3);$$

$$G_m(x, Fo_{i,j}) = \frac{1}{\pi} v_*(Fo_i) \int_{-a(Fo_i)}^{a(Fo_i)} p(t, Fo_i) H(t-x, Fo_j) dt, \quad |x| \leq a(Fo_m).$$

Исследуем свойства ядер $\Delta_0(x)$, $H(x, Fo)$, $\Phi(x, y, Fo)$ и функции $I(x, Fo)$. Поскольку

$$\bar{\Phi}(0, y, Fo) = 1 - y + Bi^{-1} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_m y) \exp(-\mu_m^2 Fo)}{\mu_m^2 (1 + Bi(\mu_m^2 + Bi^2)^{-1})}$$

и при $\xi \rightarrow \infty$: $\bar{\Phi}(\xi, y, Fo) \sim \bar{\Phi}_{st}(\xi, y) \sim \xi^{-1} \exp(-\xi y)$ ($Fo > 0$), на основании результатов работы [12] можно утверждать, что при условии $y > 0$ ядро $\Phi(x, y, Fo)$ является регулярным, при $y = 0$ оно имеет логарифмическую особенность. Тогда получим

$$\Phi_{st}(x, y) = \int_0^{\infty} \bar{\Phi}_{st}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi = \int_0^{\lambda_1} \bar{\Phi}_{st}(\xi, y) \cos(\xi x) d\xi +$$

$$+ \begin{cases} -\ln|x| - \{(\ln(\lambda_1) + \gamma), & x = 0; \quad y = 0; \\ (Ci(\lambda_1|x|) - \ln|x|), & x \neq 0, \quad y = 0; \\ 0,5[E_1(\lambda_1(y - ix)) + E_1(\lambda_1(y + ix))], & y \neq 0, \end{cases}$$

где $Ci(z)$, $E_1(z)$ – интегральный косинус и интегральная показательная функция; i ($i^2 = -1$) – мнимая единица; γ – константа Эйлера [9].

Несколько сложнее ситуация с другими ядрами. В частности, при $\xi \rightarrow 0$ имеем

$$\bar{\Delta}_1(\xi) \sim \bar{\Delta}_2(\xi) \sim 6\xi^{-4};$$

$$\bar{H}(\xi, Fo) \sim \frac{1}{\xi^2} \left(1 - 24 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu_m^2 Fo)}{\mu_m^4 (1 + Bi(\mu_m^2 + Bi^2)^{-1})} + \right.$$

$$\left. + 12(2 + Bi) \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_m) \exp(-\mu_m^2 Fo)}{\mu_m^4 (1 + Bi(\mu_m^2 + Bi^2)^{-1})} \right),$$

при $\xi \rightarrow \infty$: $\bar{\Delta}_1(\xi) \sim \xi^{-1}$; $\bar{\Delta}_2(\xi) \sim 2 \exp(-\xi)$; $\bar{H}(\xi, Fo) \sim \xi^{-2}$ ($Fo > 0$).

Поскольку на бесконечности функция $\bar{\Delta}_1(\xi)$ убывает как $1/\xi$, ядро $\Delta_0(x)$ обладает логарифмической особенностью [12]:

$$\Delta_0(x) = -\ln|x| + \Delta_*(x) = -\ln|x| + \int_0^\infty \frac{[\bar{\xi}\bar{\Delta}_1(\bar{\xi}) - 1]\cos(\bar{\xi}x) + \exp(-\bar{\xi})}{\bar{\xi}} d\bar{\xi}.$$

Ядра $\Delta_*(x)$, $H(x, Fo)$ и функция $I(x, Fo)$ выражаются расходящимися в $x = 0$ интегралами. В классе обобщенных функций эти интегралы допускают регуляризацию [5, 13].

Пусть функция $\varphi(\xi)$ в нуле ведет себя как ξ^{-4} , а на бесконечности убывает не медленнее $\xi^{-1-\eta}$, где $\eta > 0$. Представим подынтегральное выражение так:

$$\int_0^\infty \varphi(\xi)\cos(\xi x)d\xi = \int_0^\infty \xi^{-4}\psi(\xi, x)d\xi,$$

где $\psi(\xi, x)$ принадлежит пространству неограниченно дифференцируемых функций, которые при $\xi \rightarrow \infty$ убывают быстрее любой степени $1/\xi$ вместе со своими производными.

Обобщенная функция ξ^{-4} действует на $\psi(\xi, x)$ согласно формуле [13]

$$\int_0^\infty \xi^{-4}\psi(\xi, x)d\xi = \int_0^\infty \xi^{-4} \left[\psi(\xi, x) - \psi(0, x) - x\psi'_{,\xi}(0, x) - \frac{x^2}{2!}\psi''_{,\xi}(0, x) - \frac{x^3}{3!}\psi'''_{,\xi}(0, x)S(1-\xi) \right] d\xi,$$

где $S(z)$ – функция Хевисайда [9].

Таким образом, ядрам $\Delta_*(x)$ и $H(x, Fo)$ поставим в соответствие непрерывные функции:

$$\begin{aligned} \Delta_*(x) &= \int_0^\infty \left(\frac{[\bar{\xi}\bar{\Delta}_1(\bar{\xi}) - 1]\cos(\bar{\xi}x) + \exp(-\bar{\xi})}{\bar{\xi}} - \frac{6}{\bar{\xi}^4} + \frac{3x^2 - 1,2}{\bar{\xi}^2} \right) d\bar{\xi}; \\ H(x, Fo) &= -0,5\pi|x| + \int_0^\infty \left(\frac{24}{\bar{\xi}^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{\exp(-\mu_m^2 Fo)}{\mu_m^4 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{12(2 + \text{Bi})}{\bar{\xi}^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{\cos(\mu_m)\exp(-\mu_m^2 Fo)}{\mu_m^4 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} + \right. \\ &\quad \left. + \left[4\bar{\xi} \frac{\text{sh}(\bar{\xi})(1 + \text{Bi}) + \bar{\xi}\text{ch}(\bar{\xi})}{\text{sh}^2(\bar{\xi}) - \bar{\xi}^2} \sum_{m=1}^\infty \frac{\cos(\mu_m)\exp(-(\bar{\xi}^2 + \mu_m^2)Fo)}{(\bar{\xi}^2 + \mu_m^2)^2 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} - \right. \right. \end{aligned}$$

$$- 4\xi \frac{\operatorname{sh}(\xi)\operatorname{ch}(\xi) + \xi}{\operatorname{sh}^2(\xi) - \xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-(\xi^2 + \mu_m^2)\operatorname{Fo})}{(\xi^2 + \mu_m^2)^2 (1 + \operatorname{Bi}(\mu_m^2 + \operatorname{Bi}^2)^{-1})} \left. \cos(\xi x) \right] d\xi.$$

Регуляризация функции $I(x, \operatorname{Fo})$ зависит от вида прижимающей нагрузки. Если $q(x, \operatorname{Fo}) = S(L-|x|)q_*(\operatorname{Fo})$, то имеем

$$\bar{q}(\xi, \operatorname{Fo}) = q_*(\operatorname{Fo}) \frac{\sin(\xi L)}{\xi}; \quad I(x, \operatorname{Fo}) = \frac{1}{\pi} q_*(\operatorname{Fo})(I_0(L+x) + I_0(L-x));$$

$$I_0(x, \operatorname{Fo}) = \int_0^{\infty} \left(\bar{\Delta}_2(\xi) \frac{\sin(\xi x)}{\xi} - \frac{6x}{\xi^4} + \frac{x^3 - 1,2x}{\xi^2} \right) d\xi,$$

если $q(x, \operatorname{Fo}) = \delta(x)q_*(\operatorname{Fo})$ ($\delta(x)$ – δ -функция Дирака [13], рассматривается случай действия сосредоточенной силы), то

$$\bar{q}(\xi, \operatorname{Fo}) = q_*(\operatorname{Fo}); \quad I(x, \operatorname{Fo}) = \frac{2}{\pi} q_*(\operatorname{Fo})I_0(x);$$

$$I_0(x) = \int_0^{\infty} \left(\bar{\Delta}_2(\xi) \cos(\xi x) - \frac{6}{\xi^4} + \frac{3x^2 - 1,2}{\xi^2} \right) d\xi.$$

На основании этого подхода перемещениям формально придается некоторое значение, зависящее от способа регуляризации ядер. Однако при вычислении относительных перемещений и при выполнении условий равновесия слоя в целом

$$\int_{-a(\operatorname{Fo}_k)}^{a(\operatorname{Fo}_k)} p(x, \operatorname{Fo}_k) dx = \begin{cases} 2Lq_*(\operatorname{Fo}_k), & q(x, \operatorname{Fo}) = S(L-|x|)q_*(\operatorname{Fo}); \\ q_*(\operatorname{Fo}_k), & q(x, \operatorname{Fo}) = \delta(x)q_*(\operatorname{Fo}) \end{cases}$$

по этим регуляризованным формулам получены вполне определенные значения, не зависящие от способа регуляризации.

При численных расчетах регуляризованных ядер используются следующие формулы:

$$\Delta_0(x) = -\ln|x| + \left[\left(\frac{x^4}{4} - \frac{3x^2}{5} + \frac{32}{175} \right) \rho_2 + \dots \right] + \int_{\rho_2}^{\lambda_2} \bar{\Delta}_1(\xi) \cos(\xi x) d\xi -$$

$$-\frac{2}{\rho_2^3} + \frac{3x^2 - 1,2}{\rho_2} - \begin{cases} (\ln(\lambda_2) + \gamma), & x = 0; \\ (\operatorname{Ci}(\lambda_2|x|) - \ln|x|), & x \neq 0; \end{cases}$$

$$H(x, \operatorname{Fo}) = -0,5\pi|x| + \left[\rho_3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_m) \exp(-\mu_m^2 \operatorname{Fo})}{\mu_m^4 (1 + \operatorname{Bi}(\mu_m^2 + \operatorname{Bi}^2)^{-1})} \times \right.$$

$$\begin{aligned}
 & \times (0,4(12 + \text{Bi}) - 12(2 + \text{Bi})(\text{Fo} + 0,5x^2 + 2\mu_m^{-2})) + \dots] + \\
 & + 4 \int_{\rho_3}^{\lambda_3} \xi \frac{\text{sh}(\xi)(1 + \text{Bi}) + \xi \text{ch}(\xi)}{\text{sh}^2(\xi) - \xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_m) \exp(-(\xi^2 + \mu_m^2)\text{Fo})}{(\xi^2 + \mu_m^2)^2 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} \cos(\xi x) d\xi - \\
 & - \frac{12(2 + \text{Bi})}{\rho_3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(\mu_m) \exp(-\mu_m^2 \text{Fo})}{\mu_m^4 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} - \\
 & - \left[24\rho_3 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu_m^2 \text{Fo})}{(1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} (0,2 - \text{Fo} - 0,5x^2 - 2\mu_m^{-2}) + \dots \right] - \\
 & - 4 \int_{\rho_3}^{\lambda_3} \xi \frac{\text{sh}(\xi)\text{ch}(\xi) + \xi}{\text{sh}^2(\xi) - \xi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-(\xi^2 + \mu_m^2)\text{Fo})}{(\xi^2 + \mu_m^2)^2 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})} \cos(\xi x) d\xi + \\
 & + \frac{24}{\rho_3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\exp(-\mu_m^2 \text{Fo})}{\mu_m^4 (1 + \text{Bi}(\mu_m^2 + \text{Bi}^2)^{-1})};
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_0(x) = & \left[\rho_4 \left(\frac{x^5}{20} - \frac{x^3}{5} - \frac{47}{700}x \right) + \dots \right] + \int_{\rho_4}^{\lambda_4} \bar{\Delta}_2(\xi) \frac{\sin(\xi x)}{\xi} d\xi + \\
 & + \frac{1}{i} (E_1(\lambda_4(1 - ix)) - E_1(\lambda_4(1 + ix))) - \frac{2x}{\rho_4^3} + \frac{x^3 - 1,2x}{\rho_4}
 \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}
 I_0(x) = & \left[\rho_4 \left(\frac{x^4}{4} - \frac{3}{5}x^2 - \frac{47}{700} \right) + \dots \right] + \int_{\rho_4}^{\lambda_4} \bar{\Delta}_2(\xi) \cos(\xi x) d\xi + \\
 & + \frac{2 \exp(-\lambda_4)}{1 + x^2} (\cos(\lambda_4 x) - x \sin(\lambda_4 x)) - \frac{2}{\rho_4^3} + \frac{3x^2 - 1,2}{\rho_4},
 \end{aligned}$$

где тремя точками в квадратных скобках обозначены члены порядка ρ_k^3 и выше.

Границы интегрирования ρ_k и λ_k выбирали такими, чтобы в регуляризованных соотношениях на интервалах $[0, \rho_k)$ и (λ_k, ∞) подынтегральные функции $\bar{\Delta}_1(\xi)$ и $\bar{\Delta}_2(\xi)$ можно было заменить их асимптотическими выражениями. Подынтегральные функции в формулах для $H(x, \text{Fo})$ также заменили асимптотическими выражениями на промежутке $[0, \rho_3)$, а интегралами на (λ_3, ∞) пренебрегали. Значения интегралов на интервале $[\rho_k, \lambda_k]$ получали путем численного интегрирования с использованием квадратурных формул метода Филона [14].

Переход к симметричному промежутку $[-1, 1]$ позволяет представить контактное давление задачи

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} a(\text{Fo}_k) \int_{-1}^1 p(t, \text{Fo}_k) (\Delta_0(a(\text{Fo}_k)(t-x)) - \\ & - 0,5 \chi v_*(\text{Fo}_k) H(a(\text{Fo}_k)(t-x), \text{Fo}_1)) dt = \\ & = I(a(\text{Fo}_k)x, \text{Fo}_k) + \chi R(a(\text{Fo}_k)x, \text{Fo}_k) \quad (|x| \leq 1) \end{aligned} \quad (10)$$

при условиях

$$\begin{aligned} & p(\pm 1, \text{Fo}_k) = 0; \\ & a(\text{Fo}_k) \int_{-1}^1 p(t, \text{Fo}_k) dt = \begin{cases} 2Lq_*(\text{Fo}_k), & q(x, \text{Fo}) = S(L-|x|)q_*(\text{Fo}); \\ q_*(\text{Fo}_k), & q(x, \text{Fo}) = \delta(x)q_*(\text{Fo}) \end{cases} \end{aligned} \quad (11)$$

в виде

$$p(t, \text{Fo}_k) = \frac{\psi(t, \text{Fo}_k)}{\sqrt{1-t^2}}. \quad (12)$$

Здесь $\psi(t, \text{Fo}_k)$ – непрерывно-дифференцируемая и ограниченная функция, для которой выбирается представление в виде парного интерполяционного полинома Лагранжа степени $2n+1$ [15] по полиномам Чебышева первого рода $T_m(t)$ [9]:

$$\psi(t, \text{Fo}_k) = \frac{1}{n+0,5} \sum_{j=1}^{n+1} \psi(t_j, \text{Fo}_k) \delta_j \left(1 + 2 \sum_{m=1}^n T_{2m}(t_j) T_{2m}(t) \right), \quad (13)$$

где $t_j = \cos((\pi(2j-1))/(2(2n+1)))$, $j=1, \dots, n+1$ – нули полинома Чебышева первого рода порядка $2n+1$ [9]; δ_j равно единице при $j \neq n+1$ и $0,5$ при $j = n+1$.

Подставив в интегральное уравнение (10) выражение для контактного давления (12) через интерполяционный полином Лагранжа (13), интегралы с логарифмами вычислим точно по известным формулам [16], а значения регулярных интегралов определим приближенно с использованием квадратурных формул Гаусса [9]. Полагая $x = t_j$, $j=1, \dots, n+1$, уравнение (10) приведем в каждый момент времени Fo_k к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения в интерполяционном полиноме $\psi(t_j, \text{Fo}_k)$, которые полностью определяют изменение контактного давления в этот момент времени.

Условие ограниченности контактных напряжений из (11), используемое для определения полуширины промежутка контакта, эквивалентно выполнению соотношения $\psi(\pm 1, \text{Fo}_k) = 0$ [17]. Путем подбора значения $a(\text{Fo}_k)$ приходим к выполнению приближенного условия, обусловленного численным подходом к решению системы уравнений $|\psi(1, \text{Fo}_k)| < \varepsilon$, где ε – некото-

рое число, определяющее погрешность вычислений, как правило, $\varepsilon \approx 10^{-5}$. Выполнение этого условия позволяет выбрать функцию контактного давления в виде [17]

$$p(t, Fo_k) = \psi_1(t, Fo_k) \sqrt{1 - t^2}. \quad (14)$$

Здесь $\psi_1(t, Fo_k)$ – непрерывно-дифференцируемая и ограниченная функция, для которой аналогично (13) строится парный интерполяционный полином Лагранжа степени $2n + 1$ [15] по полиномам Чебышева второго рода $U_m(t)$ [9]:

$$\psi_1(t, Fo_k) = \frac{2}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \psi_1(t_j, Fo_k) \delta_j (1 - t_j^2) \left(1 + \sum_{m=1}^n U_{2m}(t_j) U_{2m}(t) \right), \quad (15)$$

где $t_j = \cos((\pi j)/(2(n+1)))$, $j = 1, \dots, n+1$ – нули полинома Чебышева второго рода порядка $2n + 1$ [9].

Использование формулы (14) через интерполяционный полином Лагранжа (15) позволяет после применения описанной выше процедуры определить реальное распределение контактного давления при найденном значении $a(Fo_k)$. При расчетах достаточно взять шаг разбиения по времени $Fo_1 = 0,05$, степень интерполяционного полинома Лагранжа – $n = 10$. Тогда относительная погрешность вычислений не превышает 5%.

Отметим, что процедура регуляризации неявно обеспечивает выполнение условий равновесия из (11₂). Это наиболее точно можно проследить в случае вжатия слоя в основание сосредоточенной силой. Погрешность выполнения этого условия не превышает 0,05%. Вообще говоря, решение регуляризованного интегрального уравнения является задачей на собственные значения, поскольку, опираясь на результаты работы [6], интегральное уравнение (7) при условии равновесия (8) можно привести к однородному интегральному уравнению Вольтерра–Фредгольма второго рода относительно некоторой вспомогательной функции – собственной функции этого интегрального оператора. Контактное давление представляется квадратурой от соответствующей собственной функции. Соотношение $\psi(\pm 1, Fo_k) = 0$ эквивалентно $\det|A - \mu I| = 0$ – условию поиска собственных значений оператора A [9], из которых приемлемым является то, что обеспечивает только сжимающие напряжения в зоне контакта.

Анализ результатов. При численных расчетах нагрузка и скорость перемещения изменялись по законам:

$$1) q_*(x, Fo) = q_{st}(x)(1 - \exp(-\beta Fo)); v_*(Fo) = 1;$$

$$2) q_*(x, Fo) = q_{st}(x); v_*(Fo) = 1 - \exp(-\beta Fo),$$

где $\beta = 1$; $q_{st}(x)$ выбиралось таким: $S(L - |x|)$ (равномерно распределенная на промежутке $[-L, L]$ нагрузка) или $\delta(x)$ (сосредоточенная сила).

Некоторые результаты численного анализа этой задачи показаны на рис. 2–6. На рис. 2 приведено распределение стационарного контактного давления для случая изменения нагрузки соответственно по законам $q_{st}(x) = S(5 - |x|)$ или $q_{st}(x) = \delta(x)$. Кривые 1–3 получены соответственно при

значениях $\chi = 0,5, 1,0$ и $1,5$, определяющих интенсивность тепловыделения. Видно, что повышение интенсивности тепловыделения приводит к уменьшению участка контакта, однако при этом увеличивается максимальное значение контактного давления и несколько изменяется его распределение по отношению к распределению контактных напряжений в упругой задаче. Диапазон изменения параметра $0 \leq \chi$ ограничивается величиной $\chi_{kr} \approx 3,26$ [7, 11], позволяющей получить решение задачи при стационарном тепловыделении в условиях полного контакта слоя и основания.

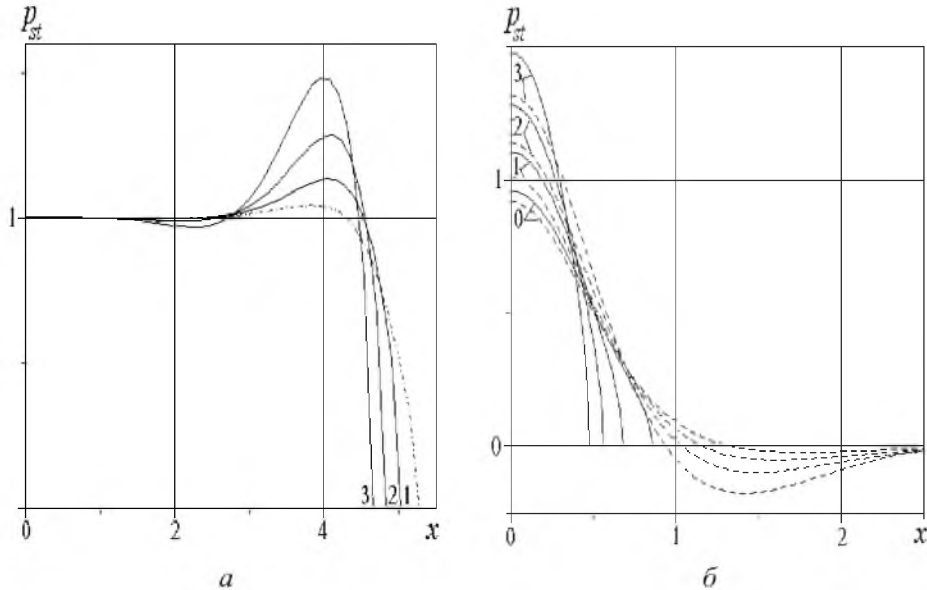


Рис. 2. Распределение стационарного контактного давления при изменении нагрузки по законам $q_{st}(x) = S(5-|x|)$ – а и $q_{st}(x) = \delta(x)$ – б: 1 – $\chi = 0,5$; 2 – $\chi = 1,0$; 3 – $\chi = 1,5$. (Штрихпунктирная линия и кривые 0 определяют контактное давление для упругой задачи; штриховые линии – контактное давление, полученное в предположении полного контакта слоя и основания [7].)

Распределение стационарной температуры на поверхности $y = 0$ при условии стационарного тепловыделения, вызванного прижимающей нагрузкой $q_{st}(x) = S(5-|x|)$, приведено на рис. 3.

Исследования решения квазистатической задачи показывают, что при выполнении условия $\chi < \chi_{kr}$ контактные напряжения монотонно приближаются к соответствующему стационарному значению, поскольку при указанном выше выборе прижимающей нагрузки и скорости движения существуют стационарные значения, а характер их изменения определяется выбором зависимостей изменения со временем нагрузки и скорости перемещения. В частности, при выборе первой закономерности (изменение со временем нагрузки) величина области контакта за время переходного процесса не изменяется, что согласуется с общими свойствами “гладкого уменьшающегося контакта” [6, 18]:

область контакта изменяется скачкообразно от начальной формы и размера при приложении первого прироста нагрузки;

если величина нагрузки увеличивается, а ее геометрия не изменяется, то форма или размеры области контакта не изменяются;

перемещения, деформации и напряжения увеличиваются прямо пропорционально нагрузке.

На рис. 4 показано распределение квазистационарного контактного давления, вызванного нагрузкой $q(x, Fo) = S(5-|x|)(1 - \exp(-Fo))$ ($Bi = 2,0$, $\chi = 1,0$) для значений $Fo = 1, 2$ и 4 .

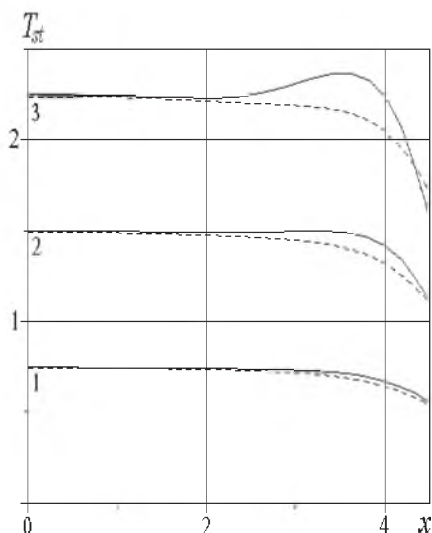


Рис. 3

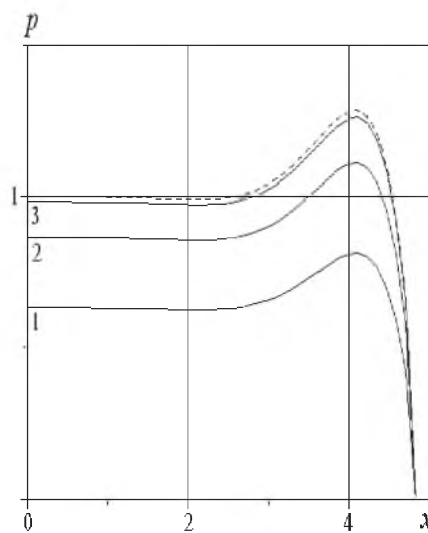


Рис. 4

Рис. 3. Распределение стационарной температуры на поверхности $y = 0$ при прижимающей нагрузке $q_{st}(x) = S(5-|x|)$, $Bi = 2,0$. (Обозначения те же, что и на рис. 2.)

Рис. 4. Распределение квазистационарного контактного давления, вызванного нагрузкой $q(x, Fo) = S(5-|x|)(1 - \exp(-Fo))$ ($Bi = 2,0$, $\chi = 1,0$) для разных значений Fo : 1 – $Fo = 1$; 2 – $Fo = 2$; 3 – $Fo = 4$. (Штриховая линия соответствует давлению для стационарной задачи.)

При выборе второй закономерности изменения со временем нагрузки и скорости перемещения наблюдается монотонное уменьшение участка контакта (рис. 5). Кроме того, определенные выше нагрузка и скорость перемещения, принимающие стационарные значения при $4,5 Fo$, определяют продолжительность переходных процессов для контактных напряжений в границе $6Fo$.

Температура на поверхности контакта, распределение которой приведено на рис. 6, несколько медленнее выходит на стационарное значение ($Fo \approx 7,5$), а некоторое различие в характере распределения и значениях температуры, полученных при первой и второй закономерностях изменения нагрузки и скорости перемещения, обусловлено влиянием величины участка контакта.

Методы, используемые при исследовании задачи с отрывом, позволяют рассмотреть взаимодействие упругого слоя с жестким основанием, когда начальный контакт происходит по ограниченной поверхности или по линии. Это возможно, если, согласно теории Герца [19], вертикальные перемещения поверхности $y = 0$ тела от силовых и тепловых факторов с достаточной

точностью можно аппроксимировать вертикальными перемещениями от этих же факторов поверхности $y = 0$ плоскопараллельного слоя. В первом случае получим задачу с фиксированным участком контактного взаимодействия (граничное условие (4₂) оставляем без изменения), во втором – с неизвестной ($u_{y,y}(x, 0, Fo) = 0 \Rightarrow u_{y,y}(x, 0, Fo) + Ax^{2n} = 0$), определяемой из условия ограниченности контактных напряжений (параметром n задаем плотность контакта [19], коэффициентом A – кривизну поверхности тела в области взаимодействия). В обоих случаях перейдем к аналогичному (7) интегральному уравнению с заменой во втором случае $I(x, Fo)$ на $I(x, Fo) - Ax^{2n}$.

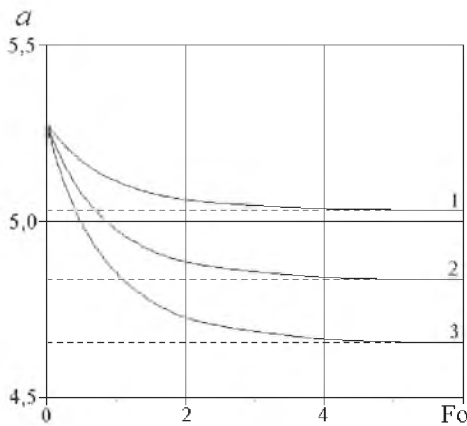


Рис. 5

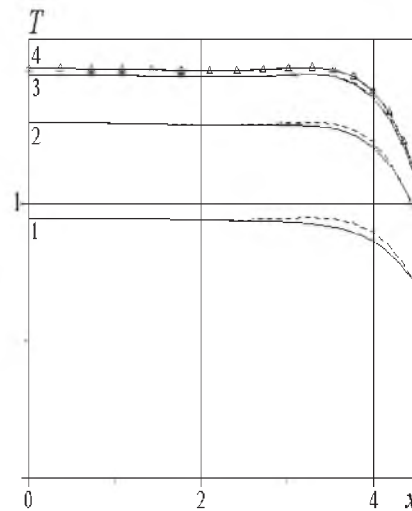


Рис. 6

Рис. 5. Кинетика изменения полуширины участка контакта $a(Fo)$, $Vi = 2,0$. (Обозначения те же, что и на рис. 2,б.)

Рис. 6. Распределение температуры на поверхности контакта: 1–4 построены при $\chi = 1,0$, $Vi = 2,0$ и соответствуют значениям $Fo = 1,0, 2,0, 4,0$ и $6,0$; точками обозначена стационарная температура. (Сплошные линии – изменение со временем v_* , штриховые – q_*).

Если участок контакта фиксирован, то контактные напряжения неограниченно возрастают при приближении к границе (корневая особенность). Однако очевидным является то, что сингулярность контактного давления будет иметь место только при условии $a < a_{ef}$, где a_{ef} – полуширина участка контакта, по которой слой взаимодействует с основанием при отрыве, например, если $q_{st}(x) = \delta(x)$ и $\chi = 0$, то $a_{ef} \approx 0,857$. Как показывают численные расчеты, для определенных нагрузок можно так подобрать параметры их распределения, что контакт тела с основанием будет происходить на участке, меньшем начального. В частности, если при некотором значении L_0 контактные напряжения, вызванные нагрузкой $q_{st}(x) = S(L_0 - |x|)$, будут сингулярными, то, уменьшая интервал приложения равномерно распределенной нагрузки, получаем регулярное распределение контактных напряжений. Кроме того, тепловыделение, даже если нагрузка обеспечивает контакт по фиксированной площадке, может быть причиной отрыва тела от основания на краях участка контактного взаимодействия.

Эти выводы иллюстрируют рис. 7 и 8, где приведено распределение стационарного и квазистационарного контактного давления при прижатии тела к основанию сосредоточенной силой. Увеличение интенсивности теплообразования приводит к уменьшению коэффициента при сингулярности в выражении для контактного давления, пока он не станет меньше нуля, что свидетельствует об отрыве тела от основания на краю фиксированного участка контакта. С дальнейшим ростом интенсивности теплообразования площадка взаимодействия уменьшается.

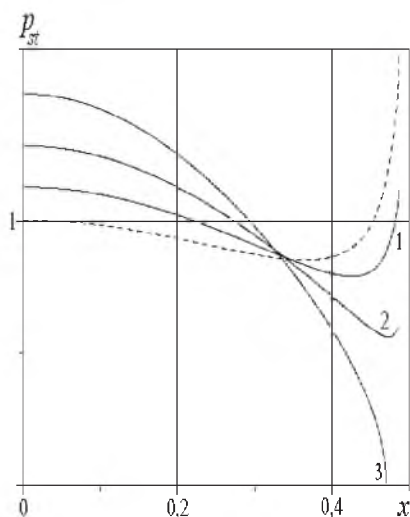


Рис. 7

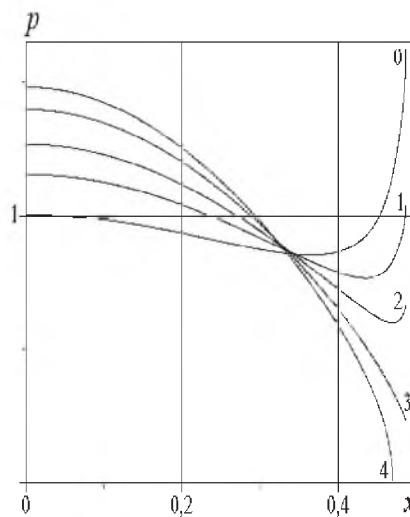


Рис. 8

Рис. 7. Распределение стационарного контактного давления при вжатии тела в основание сосредоточенной силой: 1 – $\chi = 0,5$; 2 – $\chi = 1,0$; 3 – $\chi = 1,5$. (Штриховая линия соответствует давлению для упругой задачи.)

Рис. 8. Распределение квазистационарного контактного давления при прижатии тела к основанию сосредоточенной силой с изменением скорости перемещения $v_*(Fo) = 1 - \exp(-Fo)$: 0 – безразмерное время $Fo = 0$; 1 – $Fo = 0,5$; 2 – $Fo = 1,0$; 3 – $Fo = 2,0$; 4 – $Fo = 4,0$ ($\chi = 1,5$, $Bi = 2,0$).

Результаты вычислений квазистатических контактных напряжений для случая, когда ненагруженный контакт между телом и основанием происходит вдоль прямой линии (точечный контакт), приведены на рис. 9. Видно, что при первой закономерности изменения нагрузки и скорости перемещения (рис. 1) основную роль играют упругие деформации, при второй – закономерности тепловые (рис. 2). Отсюда следует, что со временем в первом случае величина промежутка контакта увеличивается, во втором – уменьшается.

На рис. 10 показано изменение со временем величины полуширины участка контакта для различных значений параметра χ ($Bi = 2,0$, $A = 0,5$ и $n = 1$).

Кривые для нестационарной температуры на поверхности контакта приведены на рис. 11. Как и следовало ожидать, величина участка контакта существенно влияет на распределение температуры: в одинаковые моменты времени максимальное значение температуры при большем участке контак-

та является меньшим, при меньшем участке контакта температура снижается быстрее.

Рост плотности контакта $n = 2, 3, \dots$ приводит к увеличению полуширины участка контакта, что, в отличие от задачи Герца [19], ограничивается величиной a_{ef} .

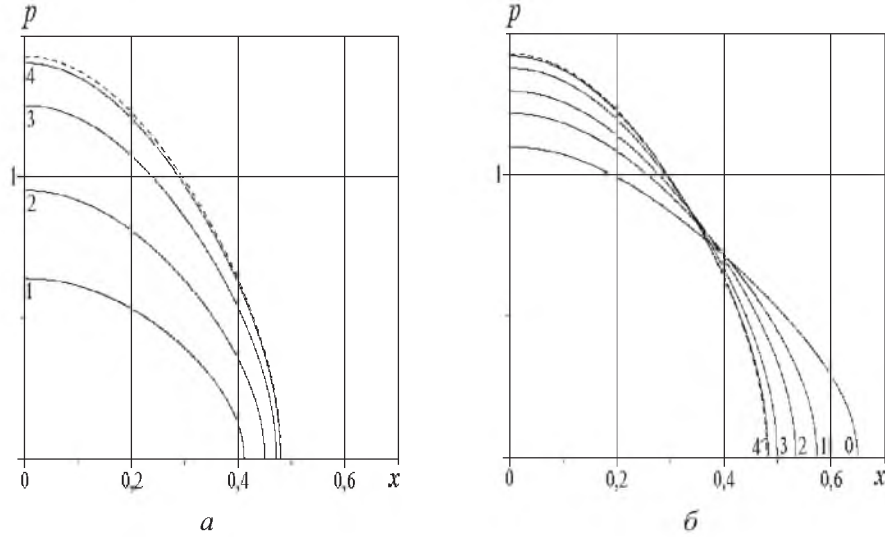


Рис. 9. Распределение давления $p(x, Fo)$ при изменении нагрузки ($q_*(x, Fo) = \delta(x)(1 - \exp(-Fo))$, $v_*(Fo) = 1$) – а и скорости движения ($q_*(x, Fo) = \delta(x)$, $v_*(Fo) = 1 - \exp(-Fo)$) – б: 0 – $Fo = 0$; 1 – $Fo = 0,5$; 2 – $Fo = 1,0$; 3 – $Fo = 2,0$; 4 – $Fo = 4,0$ ($\chi = 1,0$, $Bi = 2,0$, $A = 0,5$, $n = 1$). Штриховые линии построены при давлении для стационарной задачи.

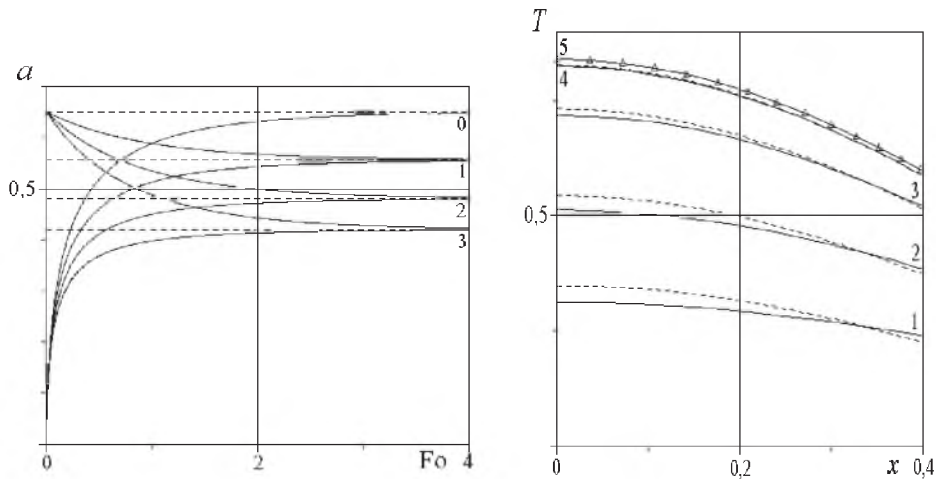


Рис. 10

Рис. 11

Рис. 10. Кинетика изменения полуширины участка контакта $a(Fo)$ для различных значений χ : 0 – $\chi = 0$; 1 – $\chi = 0,5$; 2 – $\chi = 1,0$; 3 – $\chi = 1,5$. (Штриховые линии определяют полуширину промежутка взаимодействия для стационарной (при $\chi = 0$ – для упругой) задачи.)

Рис. 11. Изменение температуры на поверхности контакта при $Bi = 2,0$, $A = 0,5$ и $n = 1$: 0 – $Fo = 0$; 1 – $Fo = 0,5$; 2 – $Fo = 1,0$; 3 – $Fo = 2,0$; 4 – $Fo = 4,0$; 5 – $Fo = 6,0$. (Сплошные линии – изменение скорости движения (при постоянной нагрузке), штриховые – изменение нагрузки (при неизменной скорости); Δ – температура для стационарной задачи.)

Резюме

Розв'язано термопружну задачу взаємодії пружного шару з жорсткою основою, від якої тіло може відділятися під дією локалізованого притискного навантаження. Досліджено вплив нестационарного фрикційного тепловиділення, що супроводжує переміщення шару по поверхні теплоізолюваної основи, та функціональної залежності притискного навантаження на цей процес. Показано, що збільшення інтенсивності тепловиділення призводить до зменшення області контакту, де зміна з часом останнього визначається вибором функції зміни навантаження та швидкості руху: якщо від часу залежить навантаження, то область контакту є незмінною, якщо змінюється швидкість руху, то спостерігається монотонне її зменшення.

1. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Пространственные задачи для многослойных сред: Тр. вычислит. центра АН СССР. – М., 1970. – 260 с.
2. Никишин В. С., Шапиро Г. С. Задачи теории упругости для многослойных сред. – М.: Наука, 1973. – 132 с.
3. Петрушин В. И., Приварников А. К., Шевляков Ю. А. К решению задач для многослойного основания // Изв. АН СССР. Механика. – 1965. – № 2. – С. 138 – 143.
4. Приварников А. К. О контакте слоя с упругим полупространством // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1972. – № 4. – С. 163 – 167.
5. Наумов Ю. А., Никифорова В. Д. Об отставании упругого слоя // Прикл. механика. – 1971. – 7, вып. 11. – С. 33 – 40.
6. Keer L., Dundurs J., and Tsai K. C. Problem involving receding contact between a layer and a half-space // Trans ASME. Ser. E: J. Appl. Mech. – 1972. – 39, No. 6. – P. 1115 – 1121.
7. Краснюк П. П. Квазистатическое контактное взаимодействие двух слоев с фрикционным теплообразованием // Физ.-хим. механика материалов. – 1999. – 35, № 2. – С. 33 – 43.
8. Галицын А. С., Жуковский А. Н. Интегральные преобразования и специальные функции в задачах теплопроводности. – Киев: Наук. думка, 1976. – 282 с.
9. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1977. – 831 с.
10. Лыков А. В. Теория теплопроводности. – М.: Высш. шк., 1967. – 596 с.
11. Краснюк П. П. Исследование отрыва контактирующих поверхностей при термоупругом взаимодействии двух цилиндров с нестационарным фрикционным тепловыделением // Прикл. механика и теорет. физика. – 2004. – 45, № 5. – С. 117 – 130.
12. Александров В. М., Коваленко Е. В. Задачи механики сплошных сред со смешанными граничными условиями. – М.: Наука, 1986. – 336 с.
13. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е. Обобщенные функции и действия над ними. – М.: Физматгиз, 1959. – 472 с.

14. Грантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике. – М.: Гостехтеоретиздат, 1956. – 204 с.
15. Натансон И. П. Конструктивная теория функций. – М.–Л.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 688 с.
16. Попов Г. Я. Концентрация упругих напряжений возле штампов, разрезов, тонких включений и подкреплений. – М.: Наука, 1982. – 344 с.
17. Ворович И. И., Александров В. М., Бабешко В. А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. – М.: Наука, 1974. – 456 с.
18. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия. – М.: Мир, 1989. – 512 с.
19. Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости. – М.: Гостехтеоретиздат, 1949. – 270 с.

Поступила 20. 03. 2006