

Об одном подходе к численному решению задач о напряженно-деформированном состоянии нетонких пластин и оболочек

Е. А. Гоцуляк^а, Д. И. Чернопиский^б

^а Киевский национальный университет строительства и архитектуры, Киев, Украина

^б Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Численное решение задач об упругом равновесии нетонких пластин и оболочек постоянной и переменной толщины базируется на использовании метода криволинейных сеток в сочетании с методом Векуа (редукция трехмерных уравнений теории упругости к рекуррентной последовательности граничных задач в двухмерной области). Для вычисления коэффициентов первой и второй квадратичных форм условной срединной поверхности используется метрика граничных лицевых поверхностей без производных от их локальных базисов. На конкретных численных примерах решения тестовых задач об изгибе толстых плит, допускающих точное или приближенное решения другими методами, показана эффективность (быстрая сходимость и точность) предложенного численного подхода. Получено численное решение задач об изгибе нетонкой пластины постоянной и переменной толщины из ортотропного материала и оболочки с кольцевой выемкой при осевом сжатии.

Ключевые слова: нетонкая пластина и оболочка, постоянная и переменная толщина, локальная выточка, изгиб, осевое сжатие, численное решение.

Введение. Для решения задач об упругом деформировании тонких пластин и оболочек используются как точные, так и приближенные аналитические методы [1] и др. К численным методам, применяемым к решению задач о напряженно-деформированном состоянии (НДС) пластин и оболочек, следует отнести метод дискретной ортогонализации [2, 3], конечноразностный [4]. В случае применения конечноразностной или конечноэлементной схем аппроксимации основных соотношений теории упругости для достижения приемлемых результатов при определении НДС необходимо решать алгебраические системы с большим числом неизвестных путем увеличения числа узловых точек в зонах концентрации напряжений. Это сопряжено со слабой сходимостью, поскольку такие схемы аппроксимации дифференциальных соотношений теории пластин и оболочек не учитывают “жесткие смещения” вектора перемещений. Ранее [5, 6] в рамках конечноразностного метода и метода конечных элементов с учетом жестких смещений предложен подход с использованием криволинейных сеток аппроксимации разрешающих уравнений, что позволило эффективно решить ряд задач в рамках теории тонких оболочек. На конкретных примерах [5, 6], допускающих точное решение, показана быстрая сходимость численных решений с учетом жестких смещений вектора перемещений. В данной работе на основе [5] предложен эффективный численный алгоритм для решения задач об упругом деформировании нетонких пластин и оболочек [7, 8].

Отнесем область Ω , занятую упругой оболочкой, к криволинейной системе координат $0x^1x^2x^3$. Радиус-вектор произвольной точки области оболочки представим в виде [7]

$$\mathbf{R} = \mathbf{r}(x^1, x^2) + x^3 \mathbf{n}(x^1, x^2), \quad (1)$$

где x^1, x^2 – гауссовы координаты срединной поверхности S оболочки; \mathbf{r} , \mathbf{n} – соответственно радиус-вектор и орт-нормали в точке $x^1, x^2 \in S$.

Граничные поверхности оболочки S^+ и S^- описываются функциями соответственно $h^+(x^1, x^2)$ и $h^-(x^1, x^2)$, которые характеризуют толщину оболочки и отсчитываются в направлении нормали \mathbf{n} . При этом $-h^-(x^1, x^2) \leq x^3 \leq h^+(x^1, x^2)$.

Для каждой из поверхностей S^+, S^-, S путем дифференцирования по переменным x^1, x^2, x^3 , фиксируя значение $x^3 = h^+, h^-, x^3 = 0$, получаем локальный базис вектор-функций [7]:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} \pm \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} \mathbf{n} \pm h \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^\alpha}; \quad \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x^3} = \mathbf{n}, \quad \alpha = 1, 2. \quad (2)$$

Локальный базис вектор-функций для каждой из поверхностей обозначим соответственно

$$\begin{aligned} S^\pm &\sim \frac{\partial \mathbf{R}^\pm}{\partial x^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha^\pm, & \mathbf{e}_3^\pm &= \frac{\mathbf{e}_1^\pm \times \mathbf{e}_2^\pm}{|\mathbf{e}_1^\pm \times \mathbf{e}_2^\pm|} = \mathbf{n}^\pm, \\ S &\sim \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^\alpha} = \mathbf{e}_\alpha, & \mathbf{e}_3 &= \frac{\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2}{|\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2|} = \mathbf{n}. \end{aligned} \quad (3)$$

При этом $|\mathbf{e}_\alpha^\pm|, |\mathbf{e}_\alpha| \neq 1, |\mathbf{e}_3^\pm| = |\mathbf{e}_3| = 1$.

Заметим, что введенные выше локальные базисы вектор-функций для каждой из поверхностей необходимы в дальнейшем для получения коэффициентов первой и второй квадратичных форм, которые входят в состав выражений для компонент, характеризующих напряженно-деформированное состояние оболочки. С этой целью воспользуемся формулой Вайнгартена для производной от нормали (2):

$$\frac{\partial \mathbf{n}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \mathbf{e}_3}{\partial x^3} = b_\alpha^y \mathbf{e}_y = -b_\alpha^1 \mathbf{e}_1 - b_\alpha^2 \mathbf{e}_2, \quad (4)$$

откуда получим связь между локальными базисами вектор-функций для поверхностей S^+ и S^- и базисом для поверхности параметризации S в виде соотношений

$$\mathbf{e}_\alpha^\pm = \mathbf{e}_\alpha \pm \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} \mathbf{e}_3 + h^\pm (-b_\alpha^1 \mathbf{e}_1 - b_\alpha^2 \mathbf{e}_2). \quad (5)$$

В (4), (5) b_α^1, b_α^2 – коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S .

Если на поверхности S ввести локальный базис, то из условий биортогональности

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}^j = \delta_i^j \quad (\delta_i^j = 1, i = j; \quad \delta_i^j = 0, i \neq j; \quad i, j = 1, 2, 3) \quad (6)$$

для вектор-функции \mathbf{e}^i получим соотношения

$$\mathbf{e}^i = a^{ik} \mathbf{e}_k; \quad \mathbf{e}^3 = \mathbf{e}_3; \quad a^{ik} = \mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}^k,$$

где

$$\begin{aligned} a^{11} &= a_{22}/a; & a^{22} &= a_{11}/a; & a^{12} &= a^{21} = -a_{12}/a; \\ a^{i3} &= a^{3i} = \delta_3^i; & a &= a_{11}a_{12} - a_{12}^2. \end{aligned} \quad (7)$$

Коэффициенты a_{ij} первой квадратичной формы поверхности S определим из соотношений

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{e}_\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta; \quad a_\beta^\alpha = \mathbf{e}^\alpha \cdot \mathbf{e}_\beta. \quad (8)$$

Опуская промежуточные выкладки, из комбинации выражений (4), (5) путем скалярного умножения левых и правых частей соответствующих соотношений на \mathbf{e}^β ($\beta = 1, 2$) получаем выражения для коэффициентов второй квадратичной формы в виде

$$\begin{pmatrix} b_\alpha^1 \\ b_\alpha^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2h} (\mathbf{e}_\alpha^+ - \mathbf{e}_\alpha^-) \begin{pmatrix} \mathbf{e}^1 \\ \mathbf{e}^2 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2 \quad (9)$$

или

$$\begin{pmatrix} b_\alpha^1 \\ b_\alpha^2 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2ha} (\mathbf{e}_\alpha^+ - \mathbf{e}_\alpha^-) \begin{pmatrix} a_{22} - a_{12} \\ a_{11} - a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Таким образом, для определения коэффициентов второй квадратичной формы получены выражения (9) или (10), которые в отличие от (4) не содержат производных по координате и являются важными при применении численных методов для решения граничных задач.

Для дальнейших выкладок введем вспомогательные выражения для функций

$$\begin{aligned} h(x^1, x^2) &= \frac{1}{2} \left[h^+(x^1, x^2) \pm h^-(x^1, x^2) \right], \\ \hat{h}(x^1, x^2) &= \frac{1}{2} \left[h^+(x^1, x^2) \pm h^-(x^1, x^2) \right]. \end{aligned} \quad (11)$$

В теории нетонких оболочек [8] вектор перемещений \mathbf{u} и напряжений \mathbf{P}^i представляются в виде разложений

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x^1, x^2, x^3) &= \sum_{k=0}^N \mathbf{u}^k(x^1, x^2) P_k(\zeta); \\ \mathbf{P}^i(x^1, x^2, x^3) &= \sum_{k=0}^N \sqrt{\frac{a}{g}}^k \mathbf{P}^i(x^1, x^2) P_k(\zeta). \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{u}^k, \mathbf{P}^i$ – моменты разложений,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^k(x^1, x^2) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \int_{\frac{-}{h}}^{\frac{+}{h}} \mathbf{u}(x^1, x^2, x^3) P_k(\zeta) dx^3; \\ \mathbf{P}^i(x^1, x^2) &= \left(k + \frac{1}{2}\right) \frac{1}{h} \int_{\frac{-}{h}}^{\frac{+}{h}} \sqrt{\frac{g}{a}} \mathbf{P}^i(x^1, x^2, x^3) P_k(\zeta) dx^3, \end{aligned} \quad (13)$$

где g – дискриминант квадратичной формы; $P_k(\zeta)$ – полином Лежандра; $\zeta = h^{-1}(x^3 - \bar{h})$.

Система уравнений равновесия в моментах имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \left(g \mathbf{P}^\alpha \right)}{\partial x^\alpha} - \frac{g}{h} \mathbf{P}^3 + \frac{g}{h} \left[\frac{\partial h}{\partial x^\alpha} \mathbf{P}^\alpha + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\alpha} \mathbf{P}^\alpha \right] + \\ + (2k+1) \sqrt{a} \left[\sqrt{\frac{a^+}{a}} \mathbf{P}_{(e_3^+)} + (-1)^k \sqrt{\frac{a^-}{a}} \mathbf{P}_{(e_3^-)} \right] = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где $g = 2h\sqrt{a}$; a^+, a^- – соответственно дискриминанты первой квадратичной формы поверхностей S^+ и S^- ; $\mathbf{P}_{(e_3^+)}, \mathbf{P}_{(e_3^-)}$ – векторы усилий, которые заданы на лицевых поверхностях.

Моменты напряжений в (14) определяются так:

$$\mathbf{P}^\alpha = k \mathbf{P}^\alpha + (2k+1) \sum_{s=1}^{\left[\frac{k}{2} \right]} \mathbf{P}^\alpha; \quad \mathbf{P}^i = (2k+1) \sum_{s=0}^{\left[\frac{k-1}{2} \right]} \mathbf{P}^i. \quad (15)$$

Связь между вектором напряжений (12) и деформациями запишем в виде [8]

$$\mathbf{P}^i = \sum_{n=0}^N c^{ijlm} A_j^j A_m^{m'} a_{j'm'}^k \mathbf{u}_l P_k(\zeta), \quad (16)$$

где c^{ijlm} – упругие постоянные среды; остальные постоянные определяются из соотношений

$$A_j^j = a_j^{j'} - x^3 b_j^{j'}; \quad \mathbf{u}_\alpha^k = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^\alpha} \mathbf{u}'' - \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^\alpha} \mathbf{u}'; \quad \mathbf{u}_3^k = \frac{1}{h} \mathbf{u}'. \quad (17)$$

Выражения для коэффициентов первой $a_j^{j'}$ и второй $b_j^{j'}$ квадратичных форм имеют вид (8), (9) или (10). Другие составляющие выражения (17) определяются из формул

$$\begin{aligned} \mathbf{u}'^k &= (2k+1)(\mathbf{u}^{k+1} + \mathbf{u}^{k+3} + \dots); & \mathbf{u}''^k &= k \mathbf{u}^k + (2k+1)(\mathbf{u}^{k+2} + \mathbf{u}^{k+4} + \dots); \\ \mathbf{u} &= u_1 \mathbf{e}^1 + u_2 \mathbf{e}^2 + u_3 \mathbf{e}^3. \end{aligned} \quad (18)$$

Согласно (16) для моментов вектора напряжений получим

$$\begin{aligned} \mathbf{P}^i{}^k &= \sum_{n=0}^N \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\mathbf{u}_l}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \vartheta(x^3) A_j^j A_m^{m'} a_{j'm'} c^{ijlm} P_k(\xi) P_n(\xi) dx^3; \\ \vartheta(x^3) &= \sqrt{\frac{g}{a}} = a^* - x^3 H^* + (x^3)^2 K^*, \end{aligned} \quad (19)$$

где $a^* = a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2$; $H^* = a_1^1 b_2^2 + a_2^2 b_1^1 - a_2^1 b_1^2 - a_1^2 b_2^1$; $K^* = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2$.

Заменив $x^3 = \bar{h} + \zeta h$ и сохранив в выражениях (19) члены не выше ζ^2 , получим равенство

$$\mathbf{P}^i{}^k = \tilde{c}^{ij'm'} a_{j'm'} (\tilde{a}^* \tilde{a}_i^i \tilde{a}_l^l \mathbf{u}_l + \bar{D}_i^i \bar{D}_l^l \mathbf{u}_l + D_i^i D_l^l \mathbf{u}_l). \quad (20)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\tilde{a}^* = a^* - \bar{h} H^* + \bar{h}^2 K^*; \quad \tilde{H}^* = h(H^* - 2\bar{h} K^*); \quad \tilde{K}^* = h^2 K^*;$$

$$\tilde{a}_i^i = a_i^i + \bar{h} b_i^i + \bar{h}^2 b_i^i b_i^i; \quad \tilde{b}_i^i = h(b_i^i + 2\bar{h} b_i^i b_i^i);$$

$$\bar{D}_i^i \bar{D}_l^l = \tilde{a}^* (\tilde{a}_i^i \tilde{b}_l^l + \tilde{a}_l^l \tilde{b}_i^i) - \tilde{H}^* \tilde{a}_i^i \tilde{a}_l^l;$$

$$\overline{\overline{D}_i^i D_l^l} = \tilde{a}^* [h^2 (\tilde{a}_i^i b_i^i b_l^i b_l^i + \tilde{a}_l^l b_l^i b_i^i b_i^i) + \tilde{b}_i^i \tilde{b}_l^l] - \tilde{H}^* (\tilde{a}_i^i \tilde{b}_l^l + \tilde{a}_l^l \tilde{b}_i^i) + \tilde{K}^* \tilde{a}_i^i \tilde{a}_l^l;$$

$$\mathbf{u}_l^{k\pm 1} = \frac{k+1}{2k+1} \mathbf{u}_l^{k+1} + \frac{k}{2k+1} \mathbf{u}_l^{k-1};$$

$$\mathbf{u}_l^{k\pm 2} = \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+1)(2k+3)} \mathbf{u}_l^{k+2} + \frac{1}{2k+1} \left[\frac{k^2}{2k-1} \mathbf{u}_l^k + \frac{(k+1)^2}{2k+3} \mathbf{u}_l^k + \frac{k(k-1)}{(2k-1)(2k+1)} \mathbf{u}_l^{k-2} \right].$$

Составляющие вектора напряжений находим из (20):

$$\mathbf{P}_{.s}^i = \mathbf{P}_{.s}^i \mathbf{e}_s = \tilde{c}^{ijlm'} a_{j'm'} (\tilde{a}^* \tilde{a}_i^l \tilde{a}_r^l \varepsilon^k + \overline{D}_i^l \overline{D}_r^l \varepsilon_{ls}^{k\pm 1} + \overline{\overline{D}}_r^l \overline{\overline{D}}_i^l \varepsilon_{ls}^{k\pm 2}), \quad (21)$$

где $\varepsilon_{ls}^k = \mathbf{u}^k \mathbf{e}_s$.

Заметим, что в случае конкретизации ортотропии материала (прямоугольная, цилиндрическая или сферическая) и системы координат, к которой отнесены пластина или оболочка, выражения (21) для моментов составляющих вектора напряжений приобретают конкретный вид:

$$\begin{cases} P_1^1 = c_{11} a^{11} \left(\begin{matrix} k & k & k+1 & k+1 & k-1 & k-1 & k+2 & k+2 & k-2 & k-2 \end{matrix} \right) + \\ + c_{12} a^{22} \varepsilon_{22}^k + c_{13} \left(\begin{matrix} k & k & k+1 & k+1 & k-1 & k-1 \end{matrix} \right); \\ P_2^2 = c_{12} a^{11} \varepsilon_{11}^k + \\ + c_{22} a^{22} \left(\begin{matrix} k & k & k+1 & k+1 & k-1 & k-1 & k+2 & k+2 & k-2 & k-2 \end{matrix} \right) + \\ + c_{23} \left(\begin{matrix} k & k & k+1 & k+1 & k-1 & k-1 \end{matrix} \right); \\ P_3^3 = c_{13} a^{11} \left(\begin{matrix} k & k & k+1 & k+1 & k-1 & k-1 \end{matrix} \right) + \\ + c_{23} a^{22} \left(\begin{matrix} k & k & k+1 & k+1 & k-1 & k-1 \end{matrix} \right) + \\ + c_{33} \left(\begin{matrix} k & k & k+1 & k+1 & k-1 & k-1 & k+2 & k+2 & k-2 & k-2 \end{matrix} \right). \end{cases} \quad (22)$$

Моменты деформаций $\varepsilon_{11}^k, \varepsilon_{22}^k, \dots, \varepsilon_{23}^k, \varepsilon_{33}^k$ определяются так:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11}^k &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^1} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^1} \mathbf{u}'' - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x^1} \mathbf{u}' \right) \mathbf{e}_1; & \varepsilon_{22}^k &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^2} \mathbf{u}'' - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x^2} \mathbf{u}' \right) \mathbf{e}_2; \\ \varepsilon_{31}^k &= \frac{1}{h} \mathbf{u}' \mathbf{e}_1; & \varepsilon_{23}^k &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^2} \mathbf{u}'' - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x^2} \mathbf{u}' \right) \mathbf{e}_3; & \varepsilon_{33}^k &= \frac{1}{h} \mathbf{u}' \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Выражения для $B_{11}^k, B_{11}^{k+1}, B_{11}^{k-1}, B_{11}^{k+2}, B_{11}^{k-2}, B_{13}^k, \dots, B_{33}^{k-2}$ имеют вид, например:

$$B_{11}^{k-2} = \frac{k(k-1)}{(2k-1)(2k-3)} h^2 k_1 (k_1 - k_2); \quad B_{11}^{k-1} = \frac{k}{2k-1} h (k_1 - k_2) (1 + 2\hat{h}k_1);$$

$$B_{11}^k = 1 + \hat{h}(k_1 - k_2) + h^2 k_1 (k_1 - k_2) \left[\frac{(k+1)^2}{(2k+1)(2k+3)} + \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)} \right];$$

$$B_{11}^{k+1} = \frac{k+1}{2k+3} h (k_1 - k_2) (1 + 2\hat{h}k_1); \quad B_{11}^{k+2} = \frac{(k+1)(k+2)}{(2k+3)(2k+5)} h^2 k_1 (k_1 - k_2),$$

где $k_1 = b_1^1, k_2 = b_2^2$ – главные кривизны срединной поверхности S (в случае пластины $k_1 = k_2 = 0$); $c_{11}, c_{12}, \dots, c_{66}$ – упругие постоянные ортотропного материала согласно (22).

Таким образом, выражения для кривизн (9) или (10) полностью определяют составляющие вектора напряжений (22) для случаев изотропных и анизотропных нетонких пластин и оболочек с неканоническими граничными поверхностями произвольной формы [8].

После редукции трехмерных уравнений равновесия для решения системы дифференциальных уравнений относительно моментов перемещений $u_\alpha^k(x^1, x^2)$ используем численный алгоритм [5]. Заменим векторно-дифференциальные соотношения относительно вектора перемещений $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$

и моментов вектора напряжений $\mathbf{P}(\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2, \mathbf{p}^3)$ в уравнениях равновесия

(14) конечноразностными аналогами в соответствующих узлах сеточной области $\omega(0 \leq d_{x^1}(i-1) \leq l_1; 0 \leq d_{x^2}(j-1) \leq l_2; 0 \leq x^1 \leq l_1; 0 \leq x^2 \leq l_2)$, где l_1, l_2 – размеры области, занятой поверхностью $S(Ox^1, Ox^2)$ пластины или оболочки; i, j – номера узлов сеточной области; d_{x^1}, d_{x^2} – соответственно шаг сетки вдоль осей Ox^1, Ox^2 . Обозначим через MO количество узлов вдоль координаты x^1 , через NO – вдоль координаты x^2 . Количество членов разложения вектора перемещений и напряжений в формулах (20) примем равным N .

Компоненты вектора перемещений $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ определяем в основных узлах i, j области ω , векторы напряжений $\mathbf{p}^1, \mathbf{p}^2$ согласно разностной схеме (рис. 1) – во вспомогательных узлах, т.е. $\mathbf{p}_{i\pm 0,5, j}^1, \mathbf{p}_{i, j\pm 0,5}^2$, а вектор $\mathbf{p}_{i, j}^3$ – в узле i, j путем суммирования его значений в соседних узлах

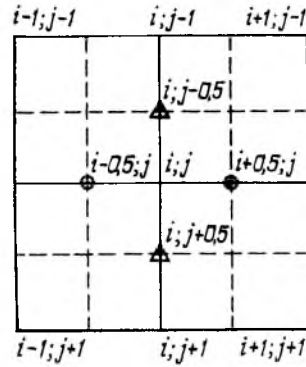


Рис. 1. Схема аппроксимации перемещений и моментов усилий в узлах сеточной области.

вспомогательного шаблона. В результате конечноразностной аппроксимации уравнения равновесия (14) согласно вышеизложенной схеме (рис. 1) для сеточной области имеют вид

$$\begin{aligned}
 & \left(\sqrt{g} \underline{P}^1 \right)_{i+0,5;j} - \left(\sqrt{g} \underline{P}^1 \right)_{i-0,5;j} + \left[\frac{g}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x^1} \underline{P}^1 + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^1} \underline{P}^1 \right) \right]_{i,j} + \left(\sqrt{g} \underline{P}^2 \right)_{i;j+0,5} - \\
 & - \left(\sqrt{g} \underline{P}^2 \right)_{i;j-0,5} + \left[\frac{g}{h} \left(\frac{\partial h}{\partial x^2} \underline{P}^2 + \frac{\partial \bar{h}}{\partial x^2} \underline{P}^2 \right) \right]_{i,j} - \left(\frac{g}{h} \underline{P}^3 \right)_{i,j} + \\
 & + \left[(2k+1)\sqrt{a} \left(\sqrt{\frac{a^+}{a}} \underline{P}_{(e_3^+)} + (-1)^k \sqrt{\frac{a^-}{a}} \underline{P}_{(e_3^-)} \right) \right]_{i,j} = 0. \quad (24)
 \end{aligned}$$

Векторы напряжений $\underline{P}^{\alpha}, \underline{P}^{\alpha}, \alpha=1, 2$ (24), не содержащие производные по переменным x^1, x^2 в узле i, j , заменяем выражениями

$$\underline{P}_{i,j}^1 = 0,5 \left(\underline{P}_{i+0,5;j}^1 + \underline{P}_{i-0,5;j}^1 \right); \quad \underline{P}_{i,j}^2 = 0,5 \left(\underline{P}_{i;j+0,5}^2 + \underline{P}_{i;j-0,5}^2 \right). \quad (25)$$

Другие составляющие компоненты уравнения равновесия (24) $\underline{P}_{(e_3^+)}^3, \underline{P}_{(e_3^-)}$, $\underline{P}_{(e_3^-)}$ в узле i, j аппроксимируем согласно разностной схеме (рис. 1):

$$\underline{P}_{i,j}^3 = 0,25 \left(\underline{P}_{i+0,5,j}^3 + \underline{P}_{i-0,5,j}^3 + \underline{P}_{i,j+0,5}^3 + \underline{P}_{i,j-0,5}^3 \right); \quad (26)$$

$$\underline{P}_{(e_3^+),i,j} = 0,25 \left(\underline{P}_{(e_3^+),i+0,5,j} + \underline{P}_{(e_3^+),i-0,5,j} + \underline{P}_{(e_3^+),i,j+0,5} + \underline{P}_{(e_3^+),i,j-0,5} \right). \quad (27)$$

Следовательно, схемы аппроксимации (24)–(27) для моментов деформаций (28) в соответствующих узлах шаблона (рис. 1) имеют вид

$$\begin{aligned} \left(\varepsilon_{11}^k \right)_{i \pm 0,5,j} &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^1} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^1} \mathbf{u}'' - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x^1} \mathbf{u}' \right)_{i \pm 0,5,j} & (\mathbf{e}_1)_{i \pm 0,5,j}; \\ \left(\varepsilon_{22}^k \right)_{i,j \pm 0,5} &= \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x^2} - \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial x^2} \mathbf{u}'' - \frac{1}{h} \frac{\partial \hat{h}}{\partial x^2} \mathbf{u}' \right)_{i,j \pm 0,5} & (\mathbf{e}_2)_{i,j \pm 0,5}; \\ \left(\varepsilon_{33}^k \right)_{i \pm 0,5,j} &= \left(\frac{1}{h} \mathbf{u}' \right)_{i \pm 0,5,j} & (\mathbf{e}_3)_{i \pm 0,5,j}. \end{aligned} \quad (28)$$

Функции $g, \sqrt{g}, h, \hat{h}, \sqrt{a}, \sqrt{a^\pm}$ и их производные по переменным x^1, x^2 , характеризующие геометрические характеристики пластины или оболочки, определяются в тех же узлах вспомогательного шаблона согласно (24)–(27).

Таким образом, векторы моментов усилий (24), не содержащие производные по x^1, x^2 , а также члены от заданной поверхностной нагрузки $\mathbf{P}_{(e_3^\pm)}$ на лицевых поверхностях S^+, S^- в узле i, j находим как среднеарифметическое от их суммирования во вспомогательных узлах шаблона.

Проектируя последовательно уравнения равновесия (24) на локальный базис $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ и используя соотношения (25)–(27), а также связь (21) между составляющими от моментов векторов напряжений и компонентов тензора деформаций, определяя их через перемещения, получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных моментов вектора перемещений $\left(\mathbf{u}_m^{k-2}, \mathbf{u}_m^{k-1}, \mathbf{u}_m^k, \mathbf{u}_m^{k+1}, \mathbf{u}_m^{k+2} \right) (m=1, 2, 3)$ в основных узлах шаблона (рис. 1).

Для определения неизвестных моментов вектора перемещений $\mathbf{u}^k \left(u_1, u_2, u_3 \right)$ в узловых точках имеем алгебраическую систему в блочном виде

$$Q_{i,j}^{k-2} \mathbf{U}_{i,j}^{k-2} + Q_{i,j}^{k-1} \mathbf{U}_{i,j}^{k-1} + Q_{i,j}^k \mathbf{U}_{i,j}^k + Q_{i,j}^{k+1} \mathbf{U}_{i,j}^{k+1} + Q_{i,j}^{k+2} \mathbf{U}_{i,j}^{k+2} = \mathbf{F}_{i,j}^k, \quad (29)$$

для решения которой можно использовать модифицированный метод Зейделя блочных итераций. При этом коэффициенты при неизвестных моментах перемещений в матрицах алгебраической системы $Q_{i,j}^k, Q_{i,j}^{k\pm 1}, Q_{i,j}^{k\pm 2}$ в (29) зависят от упругих свойств, значений в узле i, j коэффициентов (7) первой и (9) или (10) второй квадратичных форм, а также значений функций и их

производных, характеризующих переменную толщину пластины или оболочки. Здесь вектор-столбцы $U_{i,j}^k = \begin{pmatrix} k & k & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix}_{i,j}^{-1}$, $F_{i,j}^k = \begin{pmatrix} k & k & k \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{pmatrix}_{i,j}^{-1}$.

Правая часть $F_{i,j}^k$ системы алгебраических уравнений (29) определяется в узловых точках значениями перемещений или усилий на боковых либо лицевых поверхностях упругого тела, в других случаях – зависит от объемных сил, определяемых потенциальными или температурными, электромагнитными полями.

Порядок алгебраической системы (29) определяется количеством узловых точек сеточной области MO , NO ($MO \sim x^1$, $NO \sim x^2$), которая покрывает срединную поверхность S , и зависит от числа N полиномов Лежандра, удерживаемых в (12). Ее решение осуществляем модифицированным методом Зейделя, задавая при этом погрешность решения ε и количество итераций s , т.е. искомое решение должно удовлетворять условию $\left| u_{i,j}^{(s)} - u_{i,j}^{(s-1)} \right| \leq \varepsilon$. Определив перемещения согласно (21), находим компоненты тензора напряжений.

На основе вышеизложенного подхода выполнено численное решение задачи, допускающей точное решение [9] о НДС квадратной изотропной плиты при изгибе нагрузкой $\pm \frac{1}{2} q \sin \frac{\pi x^1}{l_1} \sin \frac{\pi x^2}{l_2}$ и удовлетворении на боковых поверхностях $x^1 = 0, l_1$; $x^2 = 0, l_2$ (l_1, l_2 – размеры плиты) граничных условий свободного опирания.

В табл. 1 приведены значения нормального прогиба в центре плиты из изотропного материала при ее изгибе на верхней, срединной и нижней поверхностях. Геометрические размеры плиты следующие: $l_1 = l_2 = 30$ см, $2h = 10$ см; упругие постоянные: модуль упругости $E = 9,81 \cdot 10^7$ Па; коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$. В расчетах варьировалось количество полиномов Лежандра N , число узлов сеточной области $MO \times NO$ и количество итераций s для решения алгебраических систем относительно неизвестных моментов перемещений в узловых точках. В табл. 1 в квадратных скобках приведено значение прогиба для срединной поверхности в центре плиты, которое отвечает точному решению [9], в круглых – процентное отклонение численного решения от точного, в угловых – значение прогиба, полученное экстраполированием числовых значений прогиба на двух последовательных сетках ω_{h_1} и ω_{h_2} согласно [10] с шагом h_1 и h_2 , имеющих общие узлы, множество которых обозначим $\bar{\omega}_h$. Там же представлены числовые результаты для плиты из ортотропного материала при ее изгибе. Размеры плиты такие же, как и в случае изотропного материала. Ее упругие характеристики следующие: $c_{ij} = \tilde{c}_{ij} \cdot 9,81 \cdot 10^7$; $\tilde{c}_{11} = 5,97$; $\tilde{c}_{12} = \tilde{c}_{13} = 1,26$; $\tilde{c}_{23} = 1,30$; $\tilde{c}_{22} = \tilde{c}_{33} = 3,36$; $\tilde{c}_{44} = 1,20$; $\tilde{c}_{55} = 1,13$; $\tilde{c}_{66} = \tilde{c}_{44}$.

Т а б л и ц а 1

Сравнение точного решения [9] с приближенными

N	MO × NO	s	i, j	x ³ /h		
				-1	0	1
Изотропный материал						
1	17 × 17	1	9, 9	0,03021	0,03021 (13,5%)	0,03021
3	5 × 5	2	3, 3	0,03116	0,03143 (10%)	0,03116
3	17 × 17	2	9, 9	0,03187	0,03305 [0,03492] (5,3%) <0,033158> (5,1%)	0,03187
Ортотропный материал						
1	9 × 9	1	5, 5	0,01009	0,01009	0,01009
3	9 × 9	2	5, 5	0,01033	0,01049	0,01033

В соответствии с [10], опустив промежуточные выкладки применительно к числовым значениям табл. 1, полученным для прогиба срединной поверхности в центре плиты на двух последовательных сетках 5 × 5 и 17 × 17 при N = 3; h₁ = 7,5; h₂ = ξ; h₁ = 1,875 (ξ = 0,25), экстраполированное значение прогиба в центре плиты отклоняется от точного решения на 5,1% и равно

$$u_3 = -\frac{1}{15}0,03143 + \frac{16}{15}0,03305 = 0,033152.$$

Данные, приведенные в табл. 1, показывают достаточно высокую сходимость применяемого выше численного алгоритма для решения пространственных задач теории упругости, основанного на использовании метода криволинейных сеток [5] с учетом жестких смещений.

В качестве другой тестовой задачи выполнено численное решение задачи об изгибе жестко защемленной по контуру плиты, находящейся под действием постоянной нагрузки интенсивности q, приложенной к верхней лицевой поверхности (нижняя поверхность свободна от усилий). Расчеты выполнены (N = 3; MO × NO = 5 × 5, 9 × 9; s = 3) для изотропной плиты (l₁ = l₂ = 30 см, 2h = 6 см) при E = 9,81 · 10⁷ Па, ν = 0,25. В табл. 2 приведены значения прогиба в центре плиты, полученные с помощью предложенного алгоритма и метода определяющих состояний [11].

Сравнение числовых значений прогиба, полученных при изгибе плиты методом определяющих состояний [11] и на основе предлагаемого подхода, показывает, что отклонение между ними составляет 3,8%.

Рассмотрим решение задачи об изгибе шарнирно опертой и жестко защемленной плиты переменной толщины, ограниченной лицевой поверхностью S⁺ ~ h⁺(x¹, x²) = h + αx¹ (h, α = const), S⁻ ~ h⁻(x¹, x²) = h. Распределение прогибов в срединной поверхности плиты показано на рис. 2 (линия AB).

Т а б л и ц а 2

Значения прогиба для жестко защемленной плиты

$MO \times NO$ (i, j)	x^3/h	u_3			$p_1^1/q = \sigma_{xx}/q$		
		Алгоритм	[11]	$\Delta, \%$	Алгоритм	[11]	$\Delta, \%$
5 × 5 (3, 3)	1	-0,0731	-0,0858	14,80	-3,591	-4,150	13,5
	0	-0,0739	-0,0859	14,00	0	-0,048	
	-1	-0,0731	-0,0812	10,00	3,591	3,825	6,1
9 × 9 (5, 5)	1	-0,0812	-0,0858	5,40	-3,670	-4,150	11,6
	0	-0,0827	-0,0859	3,70	0	-0,048	
	-1	-0,08119	-0,0812	0,02	3,670	3,825	4,0

При изгибе плиты переменной толщины из изотропного или ортотропного материала (рис. 2) установлено, что существенное изменение ее толщины значительно влияет на величину прогиба. Видно, что ортотропия материала и условия опирания плиты влияют на величину ее прогиба при изгибе.

Рассмотрим численное решение задачи о НДС цилиндрической толсто-стенной оболочки с кольцевой выточкой на внешней поверхности изотропного материала при осевом сжатии на торцах $x^3 = \pm l$ усилием интенсивности p (рис. 3). Внешняя поверхность оболочки задана уравнением

$$h(x^1) = h_0[1 - \varepsilon H(x^1)], \quad |x^1| \leq a; \quad \bar{h}(x^1) = h_0, \quad a < |x^1| \leq l.$$

Внутренняя поверхность оболочки гладкая, т.е. $\bar{h}(x^3) = h_0, a \leq |x^1| \leq l$. При этом введены обозначения: εh_0 – глубина выточки ($x^1 = 0$); $2a$ – ее ширина; $2l$ – длина оболочки; ε – безразмерный параметр. Уравнение поверхности выточки $H(x^1)$ описывается функцией $H(x^1) = \frac{1}{2} \left(1 + \cos \frac{\pi x^1}{a} \right)$.

Числовые результаты расчетов НДС оболочки представлены для 1/8 ее фрагмента при сетке $MO \times NO = 21 \times 5$. Распределение перемещений и напряжений в осевом направлении (1/2 длины оболочки; на линии $j = 3; i = 1 \dots 21$) на внешней поверхности $x^3/h = 1$ оболочки с учетом симметрии геометрических размеров и силовой нагрузки показано на рис. 3. При этом графики для распределения “физических” напряжений $\sigma_{x^1 x^1}/p$ – осевые в точке $(i + 0,5; j)$; $\sigma_{x^2 x^2}/p$ – окружные ($i; j + 0,5$); $\sigma_{x^3 x^3}/p$ – радиальные (i, j) относятся к левой шкале, в случае перемещений в точке i, j (u_1 – осевые; u_3 – радиальные) – к правой шкале.

В случае оболочки [12] с кольцевыми выточками числовые результаты сравниваются с данными, определенными экспериментально методом фотоупругости [13] и по теории Нейбера. Получено удовлетворительное их совпадение.

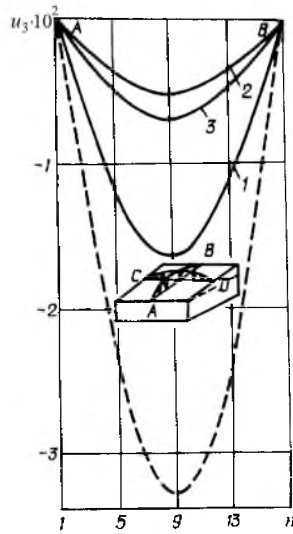


Рис. 2

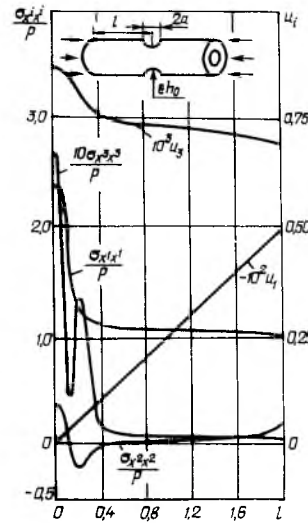


Рис. 3

Рис. 2. Прогибы в плите переменной толщины ($N = 3$; $s = 2$; 17×17): 1, 2 – свободно опертые плиты соответственно из изотропного и ортотропного материала; 3 – защемленная плита из ортотропного материала (штриховая линия – защемленная плита постоянной толщины из изотропного материала).

Рис. 3. Осевое распределение перемещений и напряжений на внешней поверхности цилиндрической оболочки с кольцевой выточкой ($\nu = 0,3$, $E = 4,09 \cdot 10^7$ Па): $l = 2$ см; $h_0 = 0,2$ см; $a = 0,19$ см; $\varepsilon = 0,5$; $R = 0,8$ см; $2h_0/R = 0,5$ (R – радиус срединной поверхности оболочки).

Заключение. На основе редукции трехмерных краевых задач теории упругости к рекуррентной последовательности задач в двухмерной области методом Векуа предложен численный алгоритм решения задач о НДС нетонких пластин и оболочек с использованием конечноразностных аналогов метода криволинейных сеток. На конкретных примерах показано быструю сходимость числового решения по предложенному численному алгоритму при учете небольшого количества узлов конечноразностной сетки и числа полиномов Лежандра в представлении перемещений с точным и приближенным решениями в рамках пространственной теории упругости.

Резюме

Числовий розв'язок задач щодо пружної рівноваги нетонких пластин і оболонок постійної і змінної товщини базується на використанні методу криволинійних сіток у поєднанні з методом Векуа (редукція тривимірних рівнянь теорії пружності до рекуррентної послідовності граничних задач в двовимірній області). Для обчислення коефіцієнтів першої та другої квадратичних форм умовної срединної поверхні використовується метрика граничних лицевих поверхонь без відповідного диференціювання їх локальних базисів. На конкретних числових прикладах розв'язку тестових задач про згин товстих плит, що допускають точний або наближений розв'язок іншими методами, показано ефективність (швидка збіжність і точність)

запропонованого числового підходу. Отримано числовий розв'язок задачі про згин ортотропної нетонкої пластини постійної і змінної товщини та товстої оболонки з кільцевою виїмкою при осьовому стиску.

1. *Методы расчета оболочек: В 5 т. Т. 1. Теория тонких оболочек, ослабленных отверстиями / А. Н. Гузь, И. С. Чернышенко, В. Н. Чехов и др. – Киев: Наук. думка, 1980. – 634 с.*
2. *Григоренко Я. М., Панкратова Н. Д. Обчислювальні методи в задачах прикладної математики. – Київ: Либідь, 1995. – 280 с.*
3. *Grigorenko Ya. M. and Rozok I. S. Solving the problem of stress state of transversally isotropic hollow cylinders with corrugations in a cross section // Int. Appl. Mech. – 2005. – 41, No. 3. – P. 338 – 347.*
4. *Lepikhin P. P., Romashenko V. A., and Beiner O. S. Numerical investigation of the dynamic strength of thick-walled cylindrical shells with cracklike technological defects // Strength Mater. – 2005. – 37, No. 1. – P. 55 – 63.*
5. *Гоцуляк Е. А., Ермишев В. Н., Жадрасинов Н. Т. Сходимость метода криволинейных сеток в задачах теории оболочек // Соппротивление материалов и теория сооружений. – 1981. – Вып. 39. – С. 80 – 84.*
6. *Гоцуляк С. О., Костина О. В. Про особливості застосування методу скінченних елементів до розрахунку оболонок загального типу // Докл. НАН України. – 1998. – № 11. – С. 72 – 75.*
7. *Векуа И. Н. Некоторые общие методы построения различных вариантов теории оболочек. – М.: Наука, 1982. – 285 с.*
8. *Хома И. Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек. – Киев: Наук. думка, 1986. – 170 с.*
9. *Власов Б. Ф. Об одном случае изгиба прямоугольной толстой плиты // Вестн. Моск. ун-та. – 1957. – № 2. – С. 25 – 36.*
10. *Самарский А. А. Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977. – 656 с.*
11. *Лисицын Б. М. Расчет защемленных плит в постановке пространственной задачи теории упругости // Прикл. механика. – 1970. – 6, № 5. – С. 18 – 23.*
12. *Немиш Ю. Н., Хома И. Ю., Зирка А. И., Чернопиский Д. И. Сравнительный анализ пространственного напряженного состояния цилиндрических оболочек с осесимметричными выточками // Там же. – 1991. – 27, № 5. – С. 44 – 50.*
13. *Александров А. Я., Ахметзянов М. Х. Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела. – М.: Наука, 1973. – 576 с.*

Поступила 16. 05. 2007