УДК 539.3

О напряженном состоянии трансверсально-изотропного пьезокерамического материала с произвольно ориентированной сфероидальной неоднородностью

В. С. Кирилюк, О. И. Левчук

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена задача о напряженном состоянии пьезоэлектрической среды, содержащей произвольно ориентированное сфероидальное включение, при однородных силовых и электрических нагрузках. Решение задачи получено с помощью использования обобщенного метода эквивалентного включения Эшелби на случай пьезокерамического материала. Тестирование подхода на случае сфероидальной полости (при совпадении оси вращения полости с осью поляризации материала), для которой существует точное решение задачи, подтверждает высокую его эффективность. Проведены числовые исследования и изучено распределение напряжений вдоль поверхности произвольно ориентированной сфероидальной полости.

Ключевые слова: пьезокерамический материал, сфероидальное включение, произвольная ориентация, обобщенный метод эквивалентного включения, распределение напряжений, электрические перемещения.

Введение. Напряженное состояние двухмерных и трехмерных анизотропных упругих тел с полостями и включениями рассматривалось в работах [1–6]. В последнее время интерес к исследованиям связанных полей в пьезоэлектрических телах значительно возрос. Определению электрического и напряженного состояния электроупругих тел с концентраторами напряжений посвящены работы [7–14]. Для сфероидальной полости или включения, расположенных в пьезоэлектрической среде, точное решение задачи получено только для случая, когда ось вращения неоднородности ориентирована вдоль оси поляризации материала [8, 12–14].

В данной работе рассмотрен случай трансверсально-изотропной пьезоэлектрической среды, содержащей произвольно ориентированное сфероидальное включение. Задача решается с помощью подхода, основанного на применении обобщенного метода эквивалентного включения Эшелби. Вычисление контурных интегралов, полученных при решении задачи, проводится по квадратурным формулам Гаусса. В частных случаях (при совпадении направлений оси поляризации и оси вращения полости) результаты числовых исследований соответствовали данным других авторов. Изучено распределение напряжений вдоль поверхности сфероидальной полости при различных ее ориентациях.

Основные уравнения и постановка задачи. Пусть электроупругая трансверсально-изотропная среда с осью транстропии, совпадающей с осью Oz, содержит сфероидальное включение с полуосями $a_1 = a_2$, a_3. При этом ось вращения включения образует угол поворота α с осью Oz. Полагаем, что среда находится под действием однородных полей напряжений и электрической индукции. Наличие включения в среде как концентратора приводит к возникновению возмущения электрического и напряженного состояния.

© В. С. КИРИЛЮК, О. И. ЛЕВЧУК, 2008

Полная система уравнений принимает следующий вид:
уравнения равновесия при отсутствии объемных сил:

$$\sigma_{ij,j} = 0; \tag{1}$$

уравнения вынужденной электростатики:

$$D_{i,i} = 0; \qquad E_i = -\Psi_{,i}; \tag{2}$$

соотношения Коши:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i});$$

уравнения состояния:

$$\sigma_{ij} = C_{ijmn}\varepsilon_{mn} + e_{nij}\Psi_{,n}; \qquad D_i = e_{imn}\varepsilon_{mn} - k_{in}\Psi_{,n}, \tag{3}$$

где σ_{ij}, ε_{ij}, u_i, D_i, E_i, Ψ – компоненты напряжений, деформаций, перемещений, электрических перемещений (индукции), электрического поля и электрический потенциал соответственно. Введем обозначения тензоров: C_{ijmn}, e_{imn}, k_{ij} – упругие модули, пьезомодули, диэлектрические проницаемости соответственно. Первый из тензоров измеряется при постоянном электрическом поле, два последних – при постоянной деформации. Для пьезокерамических тел, которые являются трансверсально-изотропными по упругим и электрическим свойствам, упругие свойства описываются пятью независимыми постоянными: c_{11}, c_{12}, c_{13}, c_{33}, c_{44}; пьезомодули – тремя величинами: e_{31}, e_{15}, e_{33}; диэлектрические проницаемости – двумя независимыми постоянными: k_{11}, k_{33}. Компоненты записанных тензоров связаны с соответствующими независимыми постоянными следующим образом:

$$\begin{cases} C_{1111} = c_{11}; \quad C_{2222} = c_{11}; \quad C_{3333} = c_{33}; \\ C_{1122} = C_{2211} = c_{12}; \quad C_{1133} = C_{3311} = C_{2233} = C_{3322} = c_{13}; \\ C_{2323} = C_{2332} = C_{3232} = C_{3223} = c_{44}; \\ C_{1313} = C_{1331} = C_{3131} = C_{3113} = c_{44}; \\ C_{1212} = C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} = 0{,}5(c_{11} - c_{12}); \\ e_{113} = e_{131} = e_{223} = e_{232} = e_{15}; \quad e_{311} = e_{322} = e_{31}; \quad e_{333} = e_{33}; \\ k_{22} = k_{11}; \; k_{33}. \end{cases} \tag{4}$$

Не приведенные компоненты трех тензоров равны нулю.

При рассмотрении поставленной задачи удобно ввести новую систему координат, одна из осей которой (ось Oz^1) совпадает с осью вращения сфероида. Предположим, что исходная система координат $Oxyz$ связана с новой (локальной) системой $Ox^1y^1z^1$ таким образом, что получается из исходной системы поворотом вокруг оси Ox на угол поворота α. Тогда тензоры упругих модулей, пьезомодулей и диэлектрических постоянных

$C_{ijkl}^{(\alpha)}$, $e_{ijk}^{(\alpha)}$, $k_{ij}^{(\alpha)}$ в новой системе координат получим с помощью преобразований тензоров соответствующих порядков следующим образом:

$$C_{ijkl}^{(\alpha)} = C_{mnpq}\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}\alpha_{lq}, \qquad e_{ijk}^{(\alpha)} = e_{mnp}\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}, \qquad k_{ij}^{(\alpha)} = k_{mn}\alpha_{im}\alpha_{jn},$$

где α_{ij} – матрица преобразования вида

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Отметим, что далее используем обычную тензорную запись выражений, т.е. подразумеваем, что по повторяющимся индексам в выражениях проводится суммирование.

Для описания электронапряженного состояния введем более унифицированные обозначения.

Упругие перемещения и электрический потенциал:

$$U_M = \begin{cases} u_m, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi, & M = 4; \end{cases} \tag{6}$$

упругие деформации или электрическое поле:

$$Z_{Mn} = \begin{cases} \varepsilon_{mn}, & M = 1, 2, 3; \\ \Psi_{,n}, & M = 4; \end{cases} \tag{7}$$

напряжения и электрические перемещения:

$$\Sigma_{iJ} = \begin{cases} \sigma_{ij}, & J = 1, 2, 3; \\ D_i, & J = 4; \end{cases} \tag{8}$$

электроупругие модули:

$$E_{iJMn}^{(\alpha)} = \begin{cases} C_{ijmn}^{(\alpha)}, & J, M = 1, 2, 3; \\ e_{nij}^{(\alpha)}, & J = 1, 2, 3;\ M = 4; \\ e_{imn}^{(\alpha)}, & J = 4;\ M = 1, 2, 3; \\ -k_{in}^{(\alpha)}, & J, M = 4. \end{cases} \tag{9}$$

С помощью этих обозначений уравнения состояния (3) можно записать в виде

$$\Sigma_{iJ} = E_{ijMn}^{(\alpha)} Z_{Mn}. \tag{10}$$

Метод решения. Электрическое и напряженное состояние в среде представим суперпозицией основного поля и возмущения, вызванного наличием полости. Для нахождения возмущенного состояния используем схему метода эквивалентного включения, обобщенную на случай электроупругости [11]. Уравнения эквивалентности в области включения (неоднородности) принимают вид

$$E^{1}_{iJKl}(Z^{0}_{Kl}+Z_{Kl})=E^{(\alpha)}_{iJKl}(Z^{0}_{Kl}+Z_{Kl}-Z^{*}_{Kl}), \qquad \vec{x}\in\Omega, \tag{11}$$

где E^{1}_{iJKl}, $E^{(\alpha)}_{iJKl}$ – электроупругие модели неоднородности и матрицы соответственно (далее для случая полости E^{1}_{iJKl} устремим к нулю); Z^{*}_{Mn} – фиктивные значения "свободных" деформаций и значений электрического поля, которые определяются из условий эквивалентности включения; Z^{0}_{Kl} получаем по значениям напряжений, заданных в среде напряжений и электрической индукции (электрических перемещений), с помощью соотношений $\Sigma^{0}_{iJ}=E^{(\alpha)}_{iJKl}Z^{0}_{Kl}$.

Аналогично упругому случаю имеем

$$Z_{Mn}=S^{(\alpha)}_{MnAb}Z^{*}_{Ab}, \tag{12}$$

где $S^{(\alpha)}_{MnAb}$ – пьезоэлектрический аналог "тензора" Эшелби, который зависит от геометрической формы включения и электроупругих свойств матрицы.

Воспользовавшись Фурье-образом функции Грина для бесконечной электроупругой среды, на основе преобразований [12] получаем тензор Эшелби в виде

$$S^{(\alpha)}_{MnAb}=\frac{E^{(\alpha)}_{iJAb}}{4\pi}\begin{cases}\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}[I_{mJin}(\vec{z})+I_{nJim}(\vec{z})]d\theta d\eta_3, & m=M=1,2,3;\\ \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{0}^{2\pi}[I_{4Jin}(\vec{z})]d\theta d\eta_3, & M=4,\end{cases} \tag{13}$$

где $z_i=\eta_i/a_i$; $\eta_1=\sqrt{1-\eta_3^2}\cos\theta$; $\eta_2=\sqrt{1-\eta_3^2}\sin\theta$. Кроме того, имеем $I_{MJin}=z_i z_n K^{-1}_{MJ}(\vec{z})$, где K^{-1}_{MJ} – обратная к матрице $K_{MJ}=z_i z_n E^{(\alpha)}_{iMJn}$.

Для определения неизвестных значений Z^{*}_{Kl} с помощью соотношений (11)–(13) имеем систему линейных алгебраических уравнений. Коэффициенты этой системы зависят от двойных интегралов типа (13) без каких-либо особенностей в области интегрирования.

Чтобы найти распределение напряжений в электроупругой среде с эллипсоидальным включением, необходимо вначале по формулам (13) вычислить аналог тензора Эшелби $S^{(\alpha)}_{MnAb}$, затем из уравнений эквивалентности (11) – значения Z^{*}_{Kl}. В данной работе вычисление компонент $S^{(\alpha)}_{MnAb}$ проводилось по формулам квадратур Гаусса. После установления неизвестных значений Z^*_{Kl} определялось электрическое и напряженное состояние внутри включения. Для вычисления значений напряжений и характеристик электрического поля в точках среды, примыкающих к эллипсоидальной границе включения, использовались формулы скачка напряжений при переходе через границу включения [11]:

$$[\Sigma_{iJ}] = \Sigma^{out}_{iJ} - \Sigma^{in}_{iJ} = E^{(\alpha)}_{iJKl}\{-E^{(\alpha)}_{pQMn} Z^*_{Mn} n_p n_l K^{-1}_{QK}(\vec{n}) + Z^*_{Kl}\}, \qquad (14)$$

где n_i – компоненты нормали поверхности.

Анализ результатов численных исследований. В качестве тестовой задачи рассмотрим случай сфероидальной полости, содержащейся в пьезоэлектрической среде. Полагаем, что ось вращения сфероида совпадает с осью поляризации пьезокерамического материала. Пусть основное электрическое и напряженное состояния в среде имеют вид [13]

$$\begin{gathered} \sigma_x = \sigma^0_x; \quad \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0; \\ \Psi^{(0)} = 0; \quad D^{(0)}_x = D^{(0)}_y = 0; \quad D^{(0)}_z = d_{31}\sigma^0_x, \end{gathered} \qquad (15)$$

где d_{31} – пьезоэлектрическая постоянная.

Рассмотрим пьезокерамические материалы PXE-5 и ЦТС-19, свойства которых приведены в [7]. Сравним результаты вычислений для сжатых сфероидальных полостей с данными работы [13]. Для диапазона отношений полуосей сфероида $c/a = 0{,}2...0{,}9$ использовались квадратурные формулы Гаусса по 48 узлам (по каждой из переменных) при отношениях $c/a = 0{,}1...$ $...0{,}2$ – по 96 узлам. Значения напряжений полностью совпали с данными [13]. Так, например, для пьезокерамики ЦТС-19 на поверхности полости при заданном электроупругом поле (15) и отношении $c/a = 0{,}5$ концентрация напряжений σ_x/σ^0_x достигает 1,418 (1,42) в вершине на оси Oy и 1,887 (1,89) в вершине на оси Oz (в скобках приведены соответствующие значения из [13]). Следовательно, апробация подхода на тестовой задаче для трансверсально-изотропной пьезоэлектрической среды со сфероидальной полостью, имеющей точное решение, показала его высокую эффективность.

Изучим напряженное состояние в среде со сфероидальной полостью при одноосном растяжении вдоль оси вращения (при отсутствии электрического потенциала), т.е. для основного состояния вида

$$\begin{gathered} \sigma_{z'} = \sigma^0_{z'}; \quad \sigma_{x'} = \sigma_{y'} = \tau_{x'y'} = \tau_{x'z'} = \tau_{y'z'} = 0; \\ \Psi^{(0)} = 0; \quad D^{(0)}_{x'} = d^{(\alpha)}_{133}\sigma^0_{z'}; \quad D^{(0)}_{y'} = d^{(\alpha)}_{233}\sigma^0_{z'}; \quad D^{(0)}_{z'} = d^{(\alpha)}_{333}\sigma^0_{z'}, \end{gathered} \qquad (16)$$

где $d^{(\alpha)}_{ijk}$ – пьезоэлектрические постоянные в системе координат, связанной со сфероидом, вычисляемые по правилам преобразования тензора третьего порядка $d^{(\alpha)}_{ijk} = d_{mnp}\alpha_{im}\alpha_{jn}\alpha_{kp}$. Компоненты d_{mnp} находим с помощью величин d_{31}, d_{15}, d_{33}. Так, имеем $d_{113} = d_{223} = d_{131} = d_{232} = d_{15}/2$; $d_{333} = d_{33}$; $d_{322} = d_{311} = d_{31}$. Не приведенные значения компонент тензора d_{ijk} равны нулю.

Пусть в электроупругой среде со сфероидальной полостью имеет место одноосное растяжение пространства (вдоль оси вращения сфероида). В качестве материала среды используем PZT-4, свойства которого приведены в [7]. Полуоси сфероида положим такими: $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = 0{,}5$. На рис. 1,*а* показано распределение напряжений вдоль поверхности полости в сечении $X'Y'$ (от вершины сфероида на оси Ox' до его вершины на оси Oy'). Рис. 1,*б* иллюстрирует изменение напряжений вдоль поверхности полости в сечении $Z'Y'$ (от вершины сфероида на оси Oz' до его вершины на оси Oy'). Видно, что при $\alpha = 90°$ (ось вращения перпендикулярна к оси поляризации) концентрация напряжений превышает соответствующее значение при $\alpha = 0$ (ось вращения совпадает с осью поляризации) примерно на 29,26%. Сравним концентрацию напряжений в пьезокерамическом материале и упругом материале с теми же упругими свойствами, но при отсутствии электрических свойств при $a_1 = a_2 = 1$; $a_3 = 0{,}5$ и одинаковых углах поворота α. В результате получим, что при $\alpha = 0$ в пьезокерамическом материале концентрация напряжений меньше, чем в упругом, примерно на 4,66%. Заметим, что эффект уменьшения концентрации напряжений при растяжении вдоль оси поляризации за счет связанности силового и электрического полей в плоской задаче отмечен в работе [10]. В то же время при $\alpha = 30$; 60 и 90° максимальные значения напряжений в пьезокерамическом материале выше соответствующих величин в упругой среде примерно на 1,9; 12,13 и 14,85%.

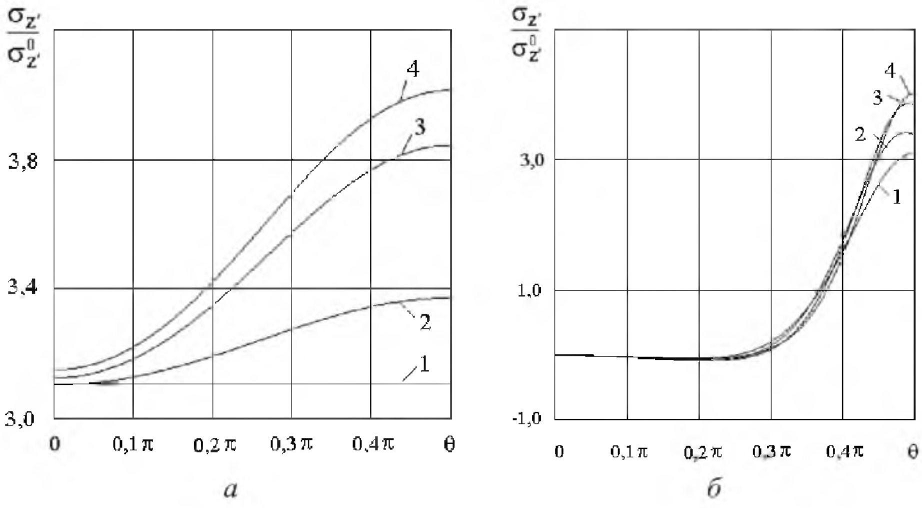

Рис. 1. Распределение напряжений вдоль поверхности полости в сечении $X'Y'$ (*а*) и $Z'Y'$ (*б*): *1* – $\alpha = 0$; *2* – $\alpha = 30°$; *3* – $\alpha = 60°$; *4* – $\alpha = 90°$.

Рис. 2 иллюстрирует влияние связанности электрического и силового полей на напряженное состояние при состоянии (16) в пьезокерамическом материале (сплошные линии) и упругом с теми же упругими свойствами (штриховые линии). На рис. 2,*а* приведены данные при $\alpha = 0$ (ось вращения совпадает с осью поляризации), напряжения изменяются вдоль поверхности

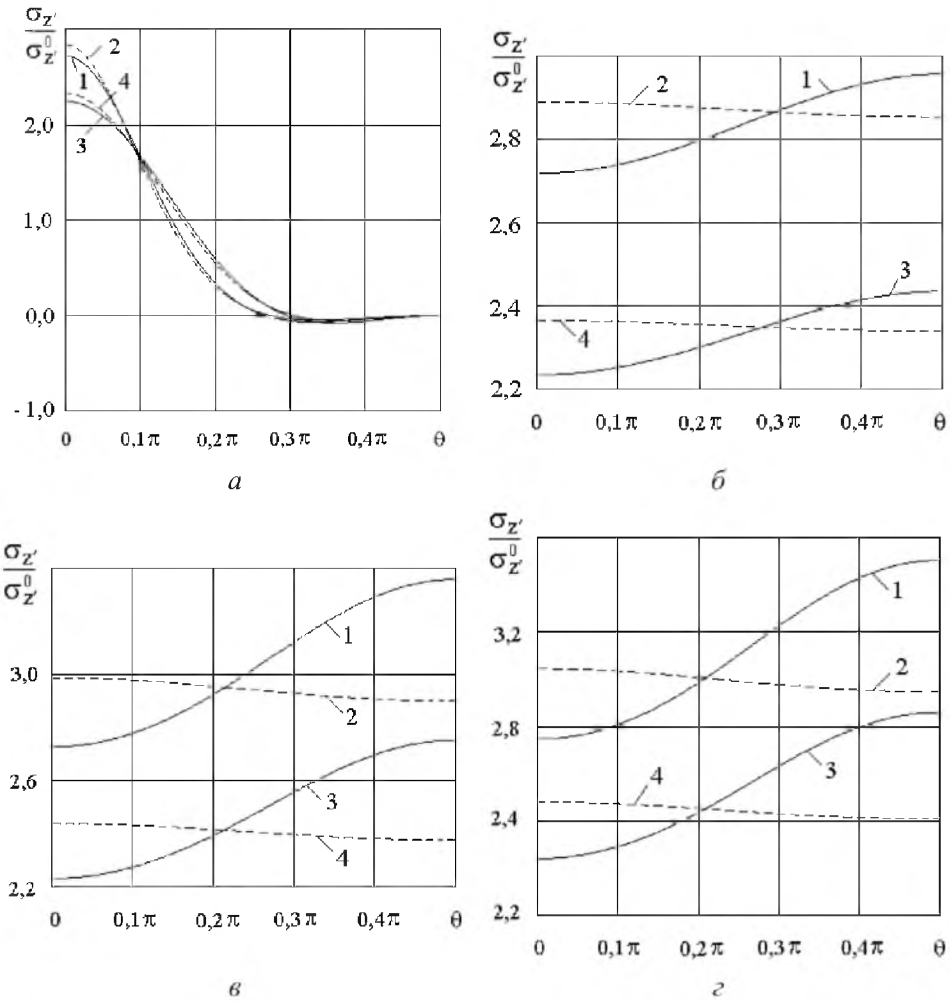

Рис. 2. Изменение напряжений в упругом и пьезокерамическом материале при $\alpha = 0$ (*а*), 30 (*б*), 60 (*в*) и 90° (*г*): *1*, *2* – геометрические параметры сфероидальной полости $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0{,}6$; *3*, *4* – $a_1 = a_2 = 1$, $a_3 = 0{,}8$.

полости в сечении $X'Z'$ (от вершины сфероида на оси Ox' до его вершины на оси Oz'). Изменение напряжений вдоль поверхности полости в сечении $X'Y'$ (между вершинами на этих осях) при $\alpha = 30$; 60 и 90° приведено на рис. 2,*б–г*. Для исследуемых случаев геометрии полости характерно следующее: 1) при $\alpha = 0$ имело место уменьшение напряжений в электроупругом материале по сравнению с упругим; 2) при $\alpha = 30$; 60 и 90° максимальные напряжения в пьезокерамическом материале выше соответствующих значений в упругом, особенно при $\alpha = 90°$; 3) наблюдалось изменение точки максимальных напряжений в пьезокерамическом и упругом материалах (вершина A в пьезокерамическом материале и вершина B в упругом) при $\alpha = 30$; 60 и 90°; 4) наибольшая концентрация напряжений в пьезокерамическом материале достигалась при $\alpha = 90°$ (ось вращения перпендикулярна к оси поляризации), при $\alpha = 0$ ее значение выше на 29,26; 28,47; 27,72 и 27,03% для $a_3/a_1 = 0{,}5$; 0,6; 0,7 и 0,8 соответственно. Заметим, что оценки только случая при $\alpha = 0$ [10, 13] явно недостаточно для анализа напряженного состояния, поскольку эта ориентация наименее опасна. Как и в упругом случае, увеличение кривизны поверхности (уменьшение значения меньшей полуоси сфероида) приводит к росту концентрации напряжений.

Отметим также, что основное электронапряженное состояние (16) несколько отличалось от исследуемого в работе [10] (вместо равенства нулю электрического потенциала при одноосном растяжении рассматривалось равенство нулю вектора электрической индукции). При условиях [10] с использованием данного подхода получим, что для случая $\alpha = 0$ имеет место несколько большая разница в значениях напряжений для пьезоупругого и упругого материалов, чем для состояния (16).

Заключение. Исследовано влияние ориентации включения в пьезоупругом пространстве на напряженное состояние. Обнаружено, что ориентация сфероидальной полости в пьезокерамическом материале наряду с его свойствами, геометрическими параметрами полости и характером нагрузок существенно влияет на концентрацию напряжений. Благодаря связанности силового и электрического полей может иметь место как уменьшение концентрации напряжений, так и ее увеличение по сравнению с упругим материалом.

Р е з ю м е

Розглянуто задачу про напружений стан п'єзоелектричного середовища, що містить довільно орієнтоване сфероїдальне включення, при однорідних силових і електричних навантаженнях. Розв'язок задачі отримано за допомогою використання узагальненого методу еквівалентного включення Ешелбі на випадок п'єзоелектричного середовища. Тестування підходу для сфероїдальної порожнини (при збігу осі обертання з віссю поляризації матеріалу), для якої існує точний розв'язок задачі, свідчить про високу його ефективність. Виконано числові дослідження і вивчено розподіл напружень вздовж поверхні довільно орієнтованої сфероїдальної порожнини.

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. – М.: Наука, 1977. – 415 с.
2. *Kaloerov S. A. and Antonov Yu. S.* Thermostressed state of an anisotropic plate with holes and cracks // Int. Appl. Mech. – 2005. – **41**, No. 9. – P. 1066 – 1075.
3. *Kirilyuk V. S. and Levchuk O. I.* Stress state of a transversely isotropic medium with arbitrarily orientated spheroidal inclusion // Ibid. – No. 2. – P. 137 – 143.
4. *Kirilyuk V. S.* The stress state of an elastic orthotropic medium with an ellipsoidal cavity // Ibid. – No. 3. – P. 302 – 308.
5. *Кирилюк В. С.*, *Левчук О. И.* О напряженном состоянии трансверсально-изотропной среды с произвольно ориентированной сфероидальной полостью или дискообразной трещиной под внутренним давлением // Пробл. прочности. – 2005. – № 5. – С. 58 – 70.

6. *Кирилюк В. С.* О влиянии ориентации сфероидальных полостей или жестких включений в ортотропной среде на концентрацию напряжений // Там же. – 2006. – № 1. – С. 58 – 68.
7. *Механика* связанных полей в элементах конструкций. В 6 т.; Т. 1. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. – Киев: Наук. думка, 1989. – 279 с.
8. *Podil'chuk Yu. N.* Exact analytical solutions of static electroelastic and thermoelectroelastic problems for a transversely isotropic body in curvilinear coordinate systems // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 2. – P. 132 – 170.
9. *Kaloerov S. A., Baeva A. I., and Glushchenko Yu. A.* Two-dimensional electroelastic problem for a multiply connected piezoelectric body // Ibid. – No. 1. – P. 77 – 84.
10. *Dai L., Guo W., and Wang X.* Stress concentration at an elliptic hole in transversely isotropic piezoelectric solids // Int. J. Solids Struct. – 2006. – **43**, No. 6. – P. 1818 – 1831.
11. *Dunn M. L. and Taya M.* Electroelastic field concentrations in and around inhomogeneities in piezoelectric solids // J. Appl. Mech. – 1994. – **61**, No. 4. – P. 474 – 475.
12. *Mikata Y.* Explicit determination of piezoelectric Eshelby tensors for a spheroidal inclusion // Int. J. Solids Struct. – 2001. – **38**, No. 40-41. – P. 7045 – 7063.
13. *Podil'chuk Yu. N. and Myasoedova I. G.* Stress state of a transversely isotropic piezoceramic body with spheroidal cavity // Int. Appl. Mech. – 2004. – **40**, No. 11. – P. 1269 – 1280.
14. *Chiang C. R. and Weng G. J.* The nature of stress and electric-displacement concentrations around a strongly oblate cavity in a transversely isotropic piezoelectric material // Int. J. Fract. – 2005. – **134**, No. 3-4. – P. 319 – 337.

Поступила 14. 06. 2006