УДК 539.3

Применение смешанных вариационных формулировок метода конечных элементов к решению задач о собственных колебаниях упругих тел

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассматриваются смешанные вариационные постановки и применение смешанных аппроксимаций метода конечных элементов к решению задач о собственных колебаниях упругих тел. Для решения обобщенной спектральной задачи предложены три формы смешанных вариационных формулировок метода конечных элементов. Исследованы корректность и устойчивость смешанных аппроксимаций для перемещений, деформаций и напряжений. Приведены матричные уравнения смешанного метода, решение которых осуществляется с помощью модифицированного алгоритма метода наискорейшего спуска. Представлены результаты расчетов собственных частот свободных колебаний прямого и кругового брусьев, полученные при решении задачи в двухмерной постановке на основе классического и смешанного подходов метода конечных элементов.

Ключевые слова: собственные частоты и формы, метод конечных элементов, метод наискорейшего спуска.

Введение. Исследование свободных колебаний имеет большое значение при анализе чувствительности конструкции к периодическим воздействиям и отстройки ее от резонансных колебаний. Для решения этой задачи необходимо оценить собственные частоты проектируемой конструкции и проверить их на возможное совпадение или близость к ожидаемым частотам возбуждения.

Во многих практически важных случаях наиболее опасными являются несколько наименьших собственных частот конструкции, для которых влияние внутреннего трения и вязкости материала не столь существенно, как для высоких частот. В расчетах на собственные колебания влияние демпфирующих факторов, как правило, не учитывается, т.е. предполагается, что при приближении частоты возбуждения к одной из собственных частот амплитуды колебаний тела неограниченно возрастают.

Задачи о свободных колебаниях упругих тел конечных размеров относятся к классу так называемых краевых задач на собственные значения. Поскольку задачи о спектре – задачи нелинейные, методы их решения для тел произвольной конфигурации достаточно сложны и требуют применения численных подходов, в частности метода конечных элементов (МКЭ). К настоящему времени наиболее исследованы и широко применяемы классические схемы МКЭ в перемещениях, что отражено во многих публикациях отечественных и зарубежных авторов. Приложение и обоснование схем МКЭ для расчетов колебаний упругих тел содержатся в работах [1–10] и др.

Отмечая достоинства классического МКЭ, следует учитывать его недостатки. К наиболее существенным относятся разрывная аппроксимация напряжений и деформаций, а также более низкий порядок сходимости аппроксимации для напряжений и деформаций по сравнению с таковым для перемещений. Традиционные пути повышения точности путем увеличения густоты разбиений или перехода к более сложным аппроксимациям не всегда приемлемы, поскольку увеличение размерности дискретной задачи приводит к значительным вычислительным затратам.

Перспективным в численном анализе задач механики о собственных колебаниях упругих тел представляется применение смешанных вариационных формулировок МКЭ, в которых напряжения и (или) деформации входят в разрешающие уравнения наряду с перемещениями как равноправные неизвестные. Основной выигрыш при использовании смешанных формулировок МКЭ состоит в уменьшении погрешности аппроксимации для напряжений и деформаций, что приводит к более точным значениям определения собственных частот по сравнению с классическим подходом МКЭ в форме метода перемещений. Кроме того, смешанные схемы МКЭ позволяют обеспечить непрерывность аппроксимации не только для перемещений, но и для напряжений и деформаций. Именно такие алгоритмы МКЭ рассматриваются в настоящей работе.

Отметим, что число публикаций, посвященных математическому анализу и применению смешанного метода к задачам на собственные значения, весьма ограничено. Основные результаты, касающиеся устойчивости и сходимости метода, изложены в работах [11–14].

Несмотря на то что смешанные схемы МКЭ имеют преимущества в точности, на практике применение их к расчету колебаний упругих тел не получило широкого распространения. Это объясняется трудностями практического конструирования смешанных аппроксимаций, удовлетворяемых условиям устойчивости и сходимости метода. К настоящему времени не существует пригодной для всех классов задач механики единой методики построения наилучших аппроксимаций для напряжений, деформаций и перемещений. В каждом конкретном случае необходимы тщательная проверка правильности построения аппроксимирующих функций и анализ сходимости при их использовании. К тому же остается важная для практики задача фактического нахождения дискретного решения обобщенной проблемы собственных значений, порождаемой смешанным методом, что сопряжено с трудностями вычислительного характера. Актуальность решения этих задач и определила цель данной работы.

Обобщенная постановка задачи о свободных колебаниях упругих тел. Пусть рассматриваемое тело занимает область $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ ($n = 2, 3$) и имеет регулярную границу. Тогда задача о собственных частотах и формах колебаний упругих тел состоит в нахождении таких действительных чисел p^2 и перемещений $\mathbf{u} \neq 0$, для которых выполняется уравнение

$$(B\mathbf{u}, B\mathbf{v})_D = p^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_L, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in U, \tag{1}$$

где U – множество допустимых перемещений $\mathbf{v}$; B – непрерывный линейный дифференциальный оператор, действующий из U в X, т.е. оператор вычисления малых деформаций по заданным перемещениям; D – линейный самосопряженный положительно определенный ограниченный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями.

Полагаем, что L, U, X – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot;\cdot)_L$, $(\cdot;\cdot)_U$, $(\cdot;\cdot)_X$ соответственно. Тогда соотношения

$$(\eta, \chi)_D = (D\eta, \chi)_X, \qquad ||\eta||_D = (\eta, \eta)_D^{1/2}, \qquad \forall\, \eta, \chi \in X$$

индуцируют скалярное произведение и норму в пространстве X, эквивалентную основной норме этого пространства, т.е. норме $||\cdot||_X$. При этом существуют два вещественных положительных числа m и M такие, что

$$\sqrt{m}\,||\eta||_X \le ||\eta||_D \le \sqrt{M}\,||\eta||_X, \qquad \forall\, \eta \in X. \tag{2}$$

Уравнение (1) определяет обобщенную постановку задачи о собственных колебаниях упругих тел, сформулированную относительно перемещений.

В соответствии со спектральной теорией компактных самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве [15] получим следующий результат, касающийся существования и свойств решений спектральной задачи (1). Существует возрастающая последовательность строго положительных вещественных собственных значений

$$0 < p_1^2 \le p_2^2 \le \ldots \le p_n^2 \le p_{n+1}^2 \le \ldots \lim_{n\to\infty} p_n^2 = \infty,$$

соответствующих собственным формам $\mathbf{u}_n (n \ge 1)$, которые могут быть ортонормированы в том смысле, что

$$(B\mathbf{u}_n, B\mathbf{u}_m)_D = p_n^2 \delta_{nm}; \qquad (\mathbf{u}_n, \mathbf{u}_m)_L = \delta_{nm}, \qquad n, m \ge 1.$$

Если, кроме того ввести отношение Рэлея

$$\Re : \mathbf{v} \to \Re(\mathbf{v}) = \frac{||B\mathbf{v}||_D^2}{||\mathbf{v}||_L^2}, \qquad \forall\, \mathbf{v} \in U,$$

то собственные значения характеризуются соотношениями:

$$p_n^2 = \inf\{\Re(\mathbf{v});\ \mathbf{v} \in U, (\mathbf{v}, \mathbf{u}_m)_L = 0, 1 \le m \le n-1\} = \Re(\mathbf{u}_n), \qquad n \ge 1.$$

Смешанные вариационные формулировки задачи на собственные значения. Использование уравнения (1) для построения сеточных схем приводит к классической формулировке МКЭ в форме метода перемещений. Альтернативный подход состоит в изменении обобщенной постановки спектральной задачи (1) таким образом, чтобы деформации ε и напряжения σ являлись ее непосредственными аргументами.

Представив спектральную задачу системой уравнений

$$\begin{cases}(\varepsilon, \chi)_X = (B\mathbf{u}, \chi)_X, & \forall \chi \in X; \\ (\sigma, \eta)_X = (\varepsilon, \eta)_D, & \forall \eta \in X; \\ (\sigma, B\mathbf{v})_X = p^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_L, & \forall \mathbf{v} \in U,\end{cases} \tag{3}$$

получим обобщенную постановку задачи о собственных колебаниях упругих тел относительно перемещений, деформаций и напряжений.

Уравнения (3) можно получить с использованием вариационного принципа, согласно которому истинные перемещения $\mathbf{u}$, деформации ε и напряжения σ сообщают стационарное значение функционалу:

$$\Re_1(\chi, \eta, \mathbf{v}) = \frac{2(\chi, B\mathbf{v} - \eta)_X + \|\eta\|_D^2}{\|\mathbf{v}\|_L^2}, \qquad \forall \chi, \eta \in X, \qquad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Заметим, что если в уравнениях (3) положить $\chi = D\eta$ и $\eta = B\mathbf{v}$, то приходим к спектральной задаче для перемещений (1). Таким образом, для континуальных задач обобщенная постановка в перемещениях (1) и смешанная формулировка (3) эквивалентны, однако смешанная постановка оказывается более гибкой при построении сеточных схем МКЭ.

Форма перемещения–напряжения. Из свойств оператора D следует существование линейного самосопряженного положительно определенного ограниченного оператора $Q = D^{-1}$, действующего в пространстве X и соответствующего матрице коэффициентов податливости. Тогда соотношения

$$(\eta, \chi)_Q = (Q\eta, \chi)_X, \qquad \|\eta\|_Q = (\eta, \eta)_Q^{1/2}, \qquad \forall \eta, \chi \in X$$

индуцируют скалярное произведение и норму в пространстве X, причем

$$\frac{1}{\sqrt{M}}\|\eta\|_X \le \|\eta\|_Q \le \frac{1}{\sqrt{m}}\|\eta\|_X, \qquad \forall \eta \in X. \tag{4}$$

Если исключить первое уравнение системы (3) для деформаций, то приходим к обобщенной постановке спектральной задачи относительно перемещений и напряжений. Действительно, принимая во втором уравнении (3) $\eta = Q\chi$, с учетом первого имеем

$$\begin{aligned}&(\sigma, \chi)_Q = (B\mathbf{u}, \chi)_X, && \forall \chi \in X; \\ &(\sigma, B\mathbf{v})_X = p^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_L, && \forall \mathbf{v} \in U.\end{aligned} \tag{5}$$

Отметим, что уравнения (5) могут быть получены, если использовать вариационный принцип стационарности функционала:

$$\Re_2(\chi, \mathbf{v}) = \frac{2(\chi, B\mathbf{v})_X - ||\chi||_Q^2}{||\mathbf{v}||_L^2}, \qquad \forall \chi \in X, \qquad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Форма перемещения–деформации. Если исключить второе уравнение системы (3) для напряжений, то приходим к смешанной формулировке спектральной задачи для перемещений и деформаций. Действительно, полагая в первом уравнении $\chi = D\eta$, во втором – $\eta = B\mathbf{v}$, с учетом третьего уравнения (3) получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} (\varepsilon, \eta)_D &= (B\mathbf{u}, \eta)_D, \qquad \forall \eta \in X; \\ (\varepsilon, B\mathbf{v})_D &= p^2(\mathbf{u}, \mathbf{v})_L, \quad \forall \mathbf{v} \in U. \end{aligned} \tag{6}$$

Заметим, что уравнения (6) можно получить на основании вариационного принципа, согласно которому истинные перемещения $\mathbf{u}$ и деформации ε сообщают стационарное значение функционалу

$$\Re_3(\eta, \mathbf{v}) = \frac{2(\eta, B\mathbf{v})_D - ||\eta||_D^2}{||\mathbf{v}||_L^2}, \qquad \forall \eta \in X, \qquad \forall \mathbf{v} \in U.$$

Формулировки конечномерной задачи. Приведем классическую постановку конечномерной задачи, в которой в качестве неизвестных выступают перемещения. Сведение задачи (1) к некоторой конечномерной задаче составляет суть метода Рэлея–Ритца.

Построение проекционно-сеточной схемы базируется на дискретизации исходной континуальной задачи, описываемой уравнением (1). Бесконечномерное пространство допустимых перемещений U аппроксимируется конечномерным пространством U_h, где h – определяющий параметр семейства конечномерных пространств, стремящийся в пределе к нулю.

Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств U_h, удовлетворяющее включению $U_h \subset U$. Тогда по аналогии с уравнением (1) определим дискретную задачу следующим образом.

Найти пару $(\overline{p}_h^2, \overline{\mathbf{u}}_h) \in \mathbf{R} \times U_h$ такую, что

$$(B\overline{\mathbf{u}}_h, B\mathbf{v}_h)_D = \overline{p}_h^2 (\overline{\mathbf{u}}_h, \mathbf{v}_h)_L, \qquad \forall \mathbf{v}_h \in U_h. \tag{7}$$

Уравнение (7) определяет проекционно-сеточную постановку задачи о собственных колебаниях упругих тел, сформулированную в перемещениях.

На основании неравенств (2) имеем

$$\sqrt{m}\,||\mathbf{v}_h||_U \le ||B\mathbf{v}_h||_D \le \sqrt{M}\,||\mathbf{v}_h||_U, \qquad \forall \mathbf{v}_h \in U_h,$$

и, значит, применение спектральной теории самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве приводит к следующему результату о существовании и свойствах решений конечномерной задачи (7). При любом h существует $N(h)$ строго положительных приближенных собственных значений

$$0<\bar{p}_{1h}^2 \le \bar{p}_{2h}^2 \le \ldots \le \bar{p}_{nh}^2 \le \ldots \le \bar{p}_{N(h)}^2 <\infty,$$

соответствующих приближенным собственным формам $\bar{\mathbf{u}}_{nh}$ $(1\le n\le N(h))$, которые могут быть ортонормированы в том смысле, что

$$(B\bar{\mathbf{u}}_{nh}, B\bar{\mathbf{u}}_{mh})_D = \bar{p}_{nh}^2\delta_{nm}, \qquad (\bar{\mathbf{u}}_{nh}, \bar{\mathbf{u}}_{mh})_L = \delta_{nm}, \qquad n, m\ge 1.$$

Собственные значения характеризуются соотношениями:

$$\bar{p}_{nh}^2 = \inf\{\Re(\mathbf{v}_h), \mathbf{v}_h \in U_h, (\mathbf{v}_h, \bar{\mathbf{u}}_{mh})_L = 0, 1\le m\le n-1\} = \Re(\bar{\mathbf{u}}_{nh}), \qquad n\ge 1.$$

Пусть p_n^2 и $\bar{p}_{nh}^2$ – суть n-е в порядке возрастания положительные собственные значения задач (1) и (7) соответственно. Тогда с использованием минимаксного принципа Куранта–Фишера [16] получаем

$$p_n^2 \le \bar{p}_{nh}^2 \qquad \text{для всех } n.$$

Форма перемещения–деформации–напряжения. Построение проекционно-сеточной схемы базируется на дискретизации континуальной задачи, описываемой системой уравнений (3). Бесконечномерное пространство допустимых перемещений–деформаций–напряжений $U\times X\times X$ аппроксимируется конечномерным пространством $U_h\times X_h\times X_h$.

Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств $U_h\times X_h\times X_h$, удовлетворяющее включению $U_h\times X_h\times X_h \subset U\times X\times X$. Тогда по аналогии с уравнениями (3) определим дискретную задачу следующим образом.

Найти четверку $(p_h^2, \mathbf{u}_h, \varepsilon_h, \sigma_h)\in \mathbf{R}\times U_h\times X_h\times X_h$ такую, что

$$\begin{cases} (\varepsilon_h, \chi_h)_X = (B\mathbf{u}_h, \chi_h)_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (\sigma_h, \eta_h)_X = (\varepsilon_h, \eta_h)_D, & \forall \eta_h \in X_h; \\ (\sigma_h, B\mathbf{v}_h)_X = p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, & \forall \mathbf{v}_h \in U_h. \end{cases} \tag{8}$$

Система уравнений (8) определяет смешанную проекционно-сеточную постановку задачи о собственных колебаниях упругих тел, сформулированную в перемещениях, деформациях и напряжениях.

Для формулировки условий устойчивости и разрешимости дискретной задачи (8) установим соответствие между элементами подпространств $X_h\subset X$ и $Y_h\subset Y$. Заметим, что Y_h – множество значений оператора B, действующего на замкнутом подпространстве $U_h\subset U$, т.е. $Y_h = BU_h$. Следовательно, Y_h – аппроксимирующее подпространство для пространства Y. Оба пространства X_h и Y_h являются конечномерными замкнутыми линейными подпространствами гильбертова пространства X. Однако ни одно из них, вообще говоря, не является подмножеством другого.

Введем в рассмотрение проектирующий оператор I_{1h}, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его проекцию в X_h. Оператор I_{1h}: $Y_h \to X_h$, ассоциируемый со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_X$, определим на основании равенства

$$(I_{1h}\bar{\tau}_h, \chi_h)_X = (\bar{\tau}_h, \chi_h)_X, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall \chi_h \in X_h. \tag{9}$$

Тогда элемент $I_h\bar{\tau}_h$ – суть ортогональная проекция $\bar{\tau}_h \in Y_h$ на пространство X_h, и, следовательно, для любого $\bar{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$\| \bar{\tau}_h - I_{1h}\bar{\tau}_h \|_X = \inf_{\eta_h \in X_h} \| \bar{\tau}_h - \eta_h \|_X .$$

С использованием ортопроектора I_{1h}: $Y_h \to X_h$ систему уравнений (8) запишем в эквивалентном виде

$$\begin{cases} (\varepsilon_h, \chi_h)_X = (I_{1h}B\mathbf{u}_h, \chi_h)_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (\sigma_h, \eta_h)_X = (\varepsilon_h, \eta_h)_D, & \forall \eta_h \in X_h; \\ (\sigma_h, I_{1h}B\mathbf{v}_h)_X = p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, & \forall \mathbf{v}_h \in U_h. \end{cases} \tag{10}$$

На основании (9) и первого уравнения системы (10) заключаем, что элемент $\varepsilon_h = I_{1h}B\mathbf{u}_h$ – суть ортогональная проекция $B\mathbf{u}_h \in Y_h$ на пространство X_h относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$. Более того, если во втором уравнении системы (10) элемент $\eta_h \in X_h$ положить равным $\eta_h = I_{1h}B\mathbf{v}_h \in X_h$, где $\mathbf{v}_h \in U_h$, то с учетом первого и третьего уравнений (10) получим уравнение для перемещений:

$$(I_{1h}B\mathbf{u}_h, I_{1h}B\mathbf{v}_h)_D = p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, \qquad \forall \mathbf{v}_h \in U_h.$$

Условие устойчивости. Пусть для всякого h и любого $\bar{\tau}_h \in Y_h$ справедлива оценка

$$d_1 \| \bar{\tau}_h \|_X \le \| I_{1h}\bar{\tau}_h \|_X, \qquad 0 < d_1 \le 1, \tag{11}$$

где постоянная d_1 не зависит от h.

Тогда на основании неравенств (2), (11) получим

$$d_1\sqrt{m} \| \mathbf{v}_h \|_U \le \| I_{1h}B\mathbf{v}_h \|_D \le \sqrt{M} \| \mathbf{v}_h \|_U, \qquad \forall \mathbf{v}_h \in U_h.$$

Следовательно, применение спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве [15] приводит к следующему результату о существовании и свойствах решений конечномерной задачи (8). При любом h существует $N(h)$ строго положительных приближенных собственных значений

$$0 < p_{1h}^2 \le p_{2h}^2 \le \ldots \le p_{nh}^2 \le \ldots \le p_{N(h)}^2 < \infty,$$

соответствующих приближенным собственным формам u_{nh} $(1 \le n \le N(h))$, которые могут быть ортонормированы в том смысле, что

$$(I_{1h} B\mathbf{u}_{nh}, I_{1h} B\mathbf{u}_{mh})_D = p_{nh}^2 \delta_{nm}; \qquad (\mathbf{u}_{nh}, \mathbf{u}_{mh})_L = \delta_{nm}, \qquad n, m \ge 1.$$

Более того, если определить функционал $\widetilde{\Re}_1$ с помощью отображения

$$\widetilde{\Re}_1 : \mathbf{v}_h \to \widetilde{\Re}_1(\mathbf{v}_h) = \frac{\| I_{1h} B\mathbf{v}_h \|_D^2}{\| \mathbf{v}_h \|_L^2} = \Re_1(\chi_h, I_{1h} B\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h),$$
$$\forall \chi_h \in X_h, \qquad \forall \mathbf{v}_h \in U_h,$$

то собственные значения характеризуются соотношениями:

$$p_{nh}^2 = \inf \{\widetilde{\Re}_1(\mathbf{v}_h), \mathbf{v}_h \in U_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_{mh})_L = 0, 1 \le m \le n-1\} = \widetilde{\Re}_1(\mathbf{u}_{nh}), \quad n \ge 1.$$

Приведем две другие смешанные формулировки дискретной задачи о собственных колебаниях упругих тел.

Форма перемещения–напряжения. Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств перемещений–напряжений $U_h \times X_h$, удовлетворяющее включению $U_h \times X_h \subset U \times X$. Тогда по аналогии с уравнениями (5) определим дискретную задачу следующим образом.

Найти тройку $(p_h^2, \mathbf{u}_h, \sigma_h) \in \mathbf{R} \times U_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{aligned} &(\sigma_h, \chi_h)_Q = (B\mathbf{u}_h, \chi_h)_X, \qquad \forall \chi_h \in X_h; \\ &(\sigma_h, B\mathbf{v}_h)_X = p_h^2 (\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h. \end{aligned} \tag{12}$$

Для формулировки условий устойчивости и разрешимости дискретной задачи (12) введем в рассмотрение проектирующий оператор I_{2h}, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его проекцию в X_h. Оператор I_{2h}: $Y_h \to X_h$ определим на основании равенства

$$(I_{2h} \bar{\tau}_h, \chi_h)_Q = (\bar{\tau}_h, \chi_h)_X, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall \chi_h \in X_h. \tag{13}$$

Тогда для произвольного $\bar{\tau}_h \in Y_h$ элемент $I_{2h} \bar{\tau}_h \in X_h$ характеризуется свойством:

$$\| \bar{\tau}_h - Q I_{2h} \bar{\tau}_h \|_D = \inf_{\chi_h \in X_h} \| \bar{\tau}_h - Q \chi_h \|_D .$$

Кроме того, с помощью (13) получим

$$\| I_{2h} \bar{\tau}_h \|_Q \le \| \bar{\tau}_h \|_D , \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{14}$$

С использованием оператора I_{2h}: $Y_h \to X_h$ систему разрешающих уравнений (12) запишем в эквивалентном виде

 ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2008, № 2

$$
\begin{aligned}
&(\sigma_h, \chi_h)_Q = (I_{2h} B\mathbf{u}_h, \chi_h)_Q, \qquad \forall \chi_h \in X_h; \\
&(\sigma_h, I_{2h} B\mathbf{v}_h)_Q = p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h.
\end{aligned} \tag{15}
$$

На основании первого уравнения (15) заключаем, что элемент $\sigma_h \in X_h$ определяется с помощью выражения $\sigma_h = I_{2h} B\mathbf{u}_h \in X_h$. Кроме того, если в первом уравнении системы (15) элемент $\chi_h \in X_h$ положить равным $\chi_h = I_{2h} B\mathbf{v}_h \in X_h$, где $\mathbf{v}_h \in U_h$, то с учетом второго уравнения (15) получим уравнение относительно перемещений:

$$
(I_{2h} B\mathbf{u}_h, I_{2h} B\mathbf{v}_h)_Q = p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, \quad \forall \mathbf{v}_h \in U_h.
$$

Условие устойчивости. При выполнении условия устойчивости (11) дискретная задача (12) однозначно разрешима при любом h.

Действительно, с помощью формул (9) и (13) устанавливаем взаимосвязь между операторами I_{1h} и I_{2h}:

$$
(I_{1h}\overline{\tau}_h, \chi_h)_X = (I_{2h}\overline{\tau}_h, \chi_h)_Q, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{16}
$$

Принимая в равенствах (16) элемент $\eta_h \in X_h$ в виде $\eta_h = I_{1h}\overline{\tau}_h \in X_h$, с использованием неравенства Коши–Буняковского–Шварца [17] имеем

$$
\|I_{1h}\overline{\tau}_h\|_X^2 = (I_{1h}\overline{\tau}_h, I_{2h}\overline{\tau}_h)_Q \le \|I_{1h}\overline{\tau}_h\|_Q \, \|I_{2h}\overline{\tau}_h\|_Q, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h,
$$

откуда с учетом правого неравенства (4) получаем

$$
\|I_{1h}\overline{\tau}_h\|_X \le \frac{1}{\sqrt{m}} \|I_{2h}\overline{\tau}_h\|_Q, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{17}
$$

Если в равенствах (16) положить $\eta_h = I_{2h}\overline{\tau}_h \in X_h$, то в соответствии с указанным неравенством запишем

$$
\|I_{2h}\overline{\tau}_h\|_Q^2 = (I_{2h}\overline{\tau}_h, I_{1h}\overline{\tau}_h)_X \le \|I_{2h}\overline{\tau}_h\|_X \, \|I_{1h}\overline{\tau}_h\|_X, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h,
$$

откуда с помощью левого неравенства (4) находим

$$
\|I_{2h}\overline{\tau}_h\|_Q \le \sqrt{M} \, \|I_{1h}\overline{\tau}_h\|_X, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{18}
$$

Согласно неравенствам (17) и (18), для любого $\overline{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$
\sqrt{m} \, \|I_{1h}\overline{\tau}_h\|_X \le \|I_{2h}\overline{\tau}_h\|_Q \le \sqrt{M} \, \|I_{1h}\overline{\tau}_h\|_X,
$$

откуда с использованием условия устойчивости (11) и свойства $\|I_{1h}\|_X = 1$ определим

$$
d_1\sqrt{m} \, \|\overline{\tau}_h\|_X \le \|I_{2h}\overline{\tau}_h\|_Q \le \sqrt{M} \, \|\overline{\tau}_h\|_X, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{19}
$$

На основании неравенств (19) получим

$$d_1\sqrt{m}\,||\mathbf{v}_h||_U \le ||I_{2h}B\mathbf{v}_h||_Q \le \sqrt{M}\,||\mathbf{v}_h||_U, \qquad \forall\,\mathbf{v}_h \in U_h.$$

Следовательно, при любом h существует $N(h)$ строго положительных приближенных собственных значений

$$0 < p_{1h}^2 \le p_{2h}^2 \le \ldots \le p_{nh}^2 \le \ldots \le p_{N(h)}^2 < \infty,$$

соответствующих приближенным собственным формам $\mathbf{u}_{nh}$ $(1 \le n \le N(h))$, которые могут быть ортонормированы в том смысле, что

$$(I_{2h}B\mathbf{u}_{nh}, I_{2h}B\mathbf{u}_{mh})_Q = p_{nh}^2\delta_{nm}; \qquad (\mathbf{u}_{nh}, \mathbf{u}_{mh})_L = \delta_{nm}, \qquad n, m \ge 1. \qquad (20)$$

Более того, если ввести функционал $\tilde{\mathfrak{R}}_2$ с помощью отображения

$$\tilde{\mathfrak{R}}_2 : \mathbf{v}_h \to \tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{v}_h) = \frac{||I_{2h}B\mathbf{v}_h||_Q^2}{||\mathbf{v}_h||_L^2} = \mathfrak{R}_2(I_{2h}B\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h), \qquad \forall\,\mathbf{v}_h \in U_h,$$

то собственные значения характеризуются соотношениями:

$$p_{nh}^2 = \inf\{\tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{v}_h), \mathbf{v}_h \in U_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_{mh})_L = 0, 1 \le m \le n-1\} = \tilde{\mathfrak{R}}_2(\mathbf{u}_{nh}), \quad n \ge 1.$$

Пусть $\bar{p}_{nh}^2$ и p_{nh}^2 – суть n-е в порядке возрастания положительные собственные значения задач (7) и (12) соответственно. Тогда на основании теоремы Куранта–Фишера [16] и свойства (14) получим

$$p_{nh}^2 \le \bar{p}_{nh}^2 \qquad \text{для всех } n.$$

Таким образом, собственные значения конечномерной задачи, сформулированной в перемещениях и напряжениях (12), не превышают собственных значений дискретной задачи, сформулированной в перемещениях (7).

Форма перемещения–деформации. Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств перемещений-деформаций $U_h \times X_h$, удовлетворяющее включению $U_h \times X_h \subset U \times X$. Тогда по аналогии с уравнениями (6) определим дискретную задачу следующим образом.

Найти тройку $(p_h^2, \mathbf{u}_h, \varepsilon_h) \in \mathbf{R} \times U_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{aligned} (\varepsilon_h, \eta_h)_D &= (B\mathbf{u}_h, \eta_h)_D, & \forall\,\eta_h \in X_h; \\ (\varepsilon_h, B\mathbf{v}_h)_D &= p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, & \forall\,\mathbf{v}_h \in U_h. \end{aligned} \qquad (21)$$

Введем в рассмотрение проектирующий оператор I_{3h}, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его ортогональную проекцию в X_h. Оператор I_{3h}: $Y_h \to X_h$, ассоциируемый со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_D$, определим на основании равенства

$$(I_{3h}\bar{\tau}_h, \eta_h)_D = (\bar{\tau}_h, \eta_h)_D, \qquad \forall\, \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall\, \eta_h \in X_h. \tag{22}$$

Тогда элемент $I_{3h}\bar{\tau}_h$ – суть ортогональная проекция $\bar{\tau}_h \in Y_h$ на пространство X_h, и, следовательно, для любого $\bar{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$||\bar{\tau}_h - I_{3h}\bar{\tau}_h||_D = \inf_{\eta_h \in X_h} ||\bar{\tau}_h - \eta_h||_D .$$

С использованием ортопроектора I_{3h}: $Y_h \to X_h$ систему уравнений (21) запишем в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} &(\varepsilon_h, \eta_h)_D = (I_{3h}B\mathbf{u}_h, \eta_h)_D, && \forall\, \eta_h \in X_h; \\ &(\varepsilon_h, I_{3h}B\mathbf{v}_h)_D = p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, && \forall\, \mathbf{v}_h \in U_h. \end{aligned} \tag{23}$$

На основании (22) и первого уравнения системы (23) заключаем, что элемент $\varepsilon_h = I_{3h}\mathbf{B}u_h$ – суть ортогональная проекция $B\mathbf{u}_h \in Y_h$ на пространство X_h относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_D$. Кроме того, если во втором уравнении системы (23) элемент $\eta_h \in X_h$ положить равным $\eta_h = I_{3h}B\mathbf{v}_h \in X_h$, где $\mathbf{v}_h \in U_h$, то с учетом второго уравнения (23) получим уравнение для перемещений:

$$(I_{3h}B\mathbf{u}_h, I_{3h}B\mathbf{v}_h)_D = p_h^2(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_L, \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in U_h.$$

Условие устойчивости. Пусть для всякого h и любого $\bar{\tau}_h \in Y_h$ справедлива оценка

$$d_3||\bar{\tau}_h||_D \le ||I_{3h}\bar{\tau}_h||_D, \qquad 0 < d_3 \le 1, \tag{24}$$

где постоянная d_3 не зависит от h. Тогда на основании неравенств (2) и (24) получим

$$d_3\sqrt{m}\,||\mathbf{v}_h||_U \le ||I_{3h}B\mathbf{v}_h||_D \le \sqrt{M}\,||\mathbf{v}_h||_U, \qquad \forall\, \mathbf{v}_h \in U_h.$$

Следовательно, при любом h существует $N(h)$ строго положительных приближенных собственных значений

$$0 < p_{1h}^2 \le p_{2h}^2 \le \ldots \le p_{nh}^2 \le \ldots \le p_{N(h)}^2 < \infty,$$

соответствующих приближенным собственным формам $\mathbf{u}_{nh}$ $(1 \le n \le N(h))$, которые могут быть ортонормированы в том смысле, что

$$(I_{3h}B\mathbf{u}_{nh}, I_{3h}B\mathbf{u}_{mh})_D = p_{nh}^2\delta_{nm}; \qquad (\mathbf{u}_{nh}, \mathbf{u}_{mh})_L = \delta_{nm}, \qquad n, m \ge 1.$$

Если определить функционал $\tilde{\mathfrak{R}}_3$ с помощью отображения

$$\tilde{\mathfrak{R}}_3 : \mathbf{v}_h \to \tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{v}_h) = \frac{\| I_{3h} B \mathbf{v}_h \|_D^2}{\| \mathbf{v}_h \|_L^2} = \mathfrak{R}_3 (I_{3h} B \mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h), \qquad \forall \mathbf{v}_h \in U_h,$$

то собственные значения характеризуются соотношениями:

$$p_{nh}^2 = \inf \{ \tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{v}_h), \mathbf{v}_h \in U_h, (\mathbf{v}_h, \mathbf{u}_{mh})_L = 0, 1 \le m \le n-1 \} = \tilde{\mathfrak{R}}_3(\mathbf{u}_{nh}), \quad n \ge 1.$$

Пусть $\bar{p}_{nh}^2$ и p_{nh}^2 – суть n-е в порядке возрастания положительные собственные значения спектральных задач (7) и (21) соответственно. Тогда с использованием минимаксного принципа Куранта–Фишера и свойства $\| I_{3h} \|_D = 1$ получим

$$p_{nh}^2 \le \bar{p}_{nh}^2 \qquad \text{для всех } n.$$

Таким образом, собственные значения конечномерной задачи, сформулированной в перемещениях и деформациях (21), не превышают собственных значений дискретной задачи, сформулированной относительно перемещений (7).

Матричные уравнения смешанного метода. В качестве примера рассмотрим систему матричных уравнений смешанного метода в форме перемещения–деформации–напряжения. В соответствии с уравнениями (8) получим

$$\begin{cases} [\mathbf{M}_h]\{\varepsilon_h\} = [\mathbf{H}_h]\{\mathbf{u}_h\}; \\ \{\sigma_h\} = [\mathbf{D}_h]\{\varepsilon_h\}; \\ [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_h\} = p_h^2 [\mathbf{G}_h]\{\mathbf{u}_h\}, \end{cases} \tag{25}$$

где p_h^2 – собственное значение,

$$p_h^2 = \frac{\{\varepsilon_h\}^T [\mathbf{M}_h]\{\sigma_h\}}{\{\mathbf{u}_h\}^T [\mathbf{G}_h]\{\mathbf{u}_h\}}. \tag{26}$$

Система уравнений (25), (26) определяет матричную формулировку смешанного метода для решения задач о собственных колебаниях упругих тел.

Построение смешанной аппроксимации для двухмерных задач теории колебаний осуществлялось по аналогии с задачей теории упругости [18]. Квадратурные схемы и выражения, с помощью которых определяются матрицы $[\mathbf{D}_h]$, $[\mathbf{M}_h]$ и $[\mathbf{H}_h]$, приведены ранее [18]. Матрица $[\mathbf{G}_h]$ называется матрицей инерции и легко вычисляется для любых типов конечных элементов [6].

Метод наискорейшего спуска для решения обобщенной задачи собственных значений. В прикладных задачах, как правило, интерес представляют не все, а лишь несколько наименьших собственных значений и соответствующих собственных векторов. Следует учитывать, что для дискретной модели высшие собственные частоты не отражают реальных свойств упругого тела, поскольку они существенно зависят от густоты разбиения и особенностей используемой дискретизации.

Известно большое число итерационных методов решения частичной задачи на собственные значения. К ним относятся различные варианты степенного метода, градиентные методы, метод итераций подпространства, метод Ланцоша [4–9, 16, 19] и др. В этих методах собственные значения вычисляются как пределы числовых последовательностей без определения коэффициентов характеристического многочлена. При этом одновременно находятся также собственные векторы или другие векторы, связанные с собственными векторами простыми соотношениями.

Для решения матричных уравнений смешанного метода (25), (26) рассмотрим модифицированный алгоритм метода наискорейшего спуска, в котором для определения собственного значения p_{nh} $(n \geq 1)$ и собственного вектора $\{\mathbf{u}_{nh}\}$ итерации строятся в виде

$$\begin{cases} [\mathbf{M}_h]\{\varepsilon_{nh}^k\} = [\mathbf{H}_h]\{\mathbf{u}_{nh}^k\}; \\ \{\sigma_{nh}^k\} = [\mathbf{D}_h]\{\varepsilon_{nh}^k\}; \\ (p_{nh}^2)^k = \{\varepsilon_{nh}^k\}^T [\mathbf{M}_h]\{\sigma_{nh}^k\}; \\ \{\mathbf{r}_h^k\} = [\mathbf{H}_h]^T \{\sigma_{nh}^k\} - (p_{nh}^2)^k [\mathbf{G}_h]\{\mathbf{u}_{nh}^k\}; \\ [\Lambda_h]\{\overline{\omega}_h^k\} = \{\mathbf{r}_h^k\}; \\ \{\omega_h^k\} = \{\overline{\omega}_h^k\} - \sum\limits_{m=1}^{n-1} (\{\overline{\omega}_h^k\}^T [\mathbf{G}_h]\{\mathbf{u}_{mh}\})\{\mathbf{u}_{mh}\}; \\ \{\overline{\mathbf{u}}_{nh}^{k+1}\} = \{\mathbf{u}_{nh}^k\} - \alpha_k \{\omega_h^k\}; \\ \{\mathbf{u}_{nh}^{k+1}\} = \dfrac{\{\overline{\mathbf{u}}_{nh}^{k+1}\}}{\sqrt{\{\overline{\mathbf{u}}_{nh}^{k+1}\}^T [\mathbf{G}_h]\{\overline{\mathbf{u}}_{nh}^{k+1}\}}}, \end{cases} \tag{27}$$

где $\{\mathbf{u}_{nh}^k\}$ – приближение к собственному вектору $\{\mathbf{u}_{nh}\}$; $(p_{nh}^2)^k$ – приближение к собственному значению p_{nh}^2; $\{\mathbf{r}_h^k\}$ – вектор невязки; $\{\omega_h^k\}$ – вектор поправки; $[\Lambda_h]$ – переобусловливающая симметричная положительно определенная матрица; α_k – числовой параметр, вводимый для управления сходимостью итерационного процесса.

Параметр $\alpha_k > 0$ определяется из условия $\alpha_k = \min(p_{nh}^2)^{k+1}$,

$$\alpha_k = \frac{2}{\theta_k + \sqrt{\theta_k^2 + 4\mu_k}},$$

где

$$\theta_k = \frac{\{\omega_h^k\}^T \{\chi_h^k\} - (p_{nh}^2)^k \{\omega_h^k\}^T \{\delta_h^k\}}{\{\mathbf{u}_{nh}^k\}^T \{\chi_h^k\} - (p_{nh}^2)^k \{\mathbf{u}_{nh}^k\}^T \{\delta_h^k\}};$$

$$\mu_k = \{\omega_h^k\}^T \{\delta_h^k\} - \theta_k \{\mathbf{u}_{nh}^k\}^T \{\delta_h^k\}.$$

Векторы $\{\chi_h^k\}$ и $\{\delta_h^k\}$ определяются с помощью соотношений:

$$\{\chi_h^k\} = [\mathbf{D}_h]\{\eta_h^k\}; \qquad [\mathbf{M}_h]\{\eta_h^k\} = [\mathbf{H}_h]\{\omega_h^k\}; \qquad \{\delta_h^k\} = [\mathbf{G}_h]\{\omega_h^k\}.$$

Среди допустимого класса матриц $[\Lambda_h]$ выделим $[\Lambda_h] = [\mathbf{K}_h]$, где $[\mathbf{K}_h]$ – симметричная положительно определенная матрица жесткости, соответствующая схеме метода перемещений и построенная на той же сетке, что и смешанная схема. Матрицу жесткости целесообразно представить в виде произведения двух треугольных матриц с помощью факторизации Холецкого [20, 21]. Тогда вычислительный алгоритм, реализующий процедуру (27), оказывается весьма эффективным.

Возможно также применение двухступенчатого итерационного алгоритма [19], в котором для нахождения вектора поправки $\{\overline{\omega}_h^k\}$ используется итерационный метод с нулевым начальным приближением. Внешние итерации строятся по методу наискорейшего спуска (27), а в качестве внутренних итераций используется метод сопряженных градиентов [22–24]. Нет необходимости решать уравнение относительно поправки с высокой степенью точности. Существует оптимальное число, характеризующее точность нахождения поправки, при котором минимизируются общие вычислительные затраты двухступенчатого алгоритма.

Последующие собственные значения и соответствующие собственные векторы строятся в подпространстве, ортогональном ко всем ранее найденным собственным вектором. Сходимость итерационного процесса контролируется по степени понижения нормы вектора поправки или из условия близости двух приближений к собственному значению.

Численный анализ. Ниже приведено несколько примеров, иллюстрирующих сходимость и точность численных решений, полученных на основе смешанного МКЭ (СМКЭ). При построении треугольной сетки использовалось равномерное разбиение типа “крест”. При сравнении результатов, полученных с помощью классического МКЭ (КМКЭ), использовался линейный треугольный элемент. Результаты расчетов сопоставлялись с известными аналитическими решениями и полученными с помощью КМКЭ на густой сетке, для которой решения СМКЭ и КМКЭ совпадали или были близкими.

Свободные колебания бруса с защемленным торцом. Определялись первые четыре собственные частоты поперечных колебаний бруса прямоугольного поперечного сечения с отношением высоты H к длине L, равным 2/20. Коэффициент Пуассона задавался равным нулю. Аналитическое решение для однородного стержня приведено в [25]:

$$p_k = \frac{\omega_k}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \qquad k = 1, \dots, 4,$$

где ρ – плотность единицы длины стержня; $I = H^3/12 = 2/3$ – момент инерции поперечного сечения бруса.

Результаты расчетов представлены в табл. 1. Там же приведены данные о разбиении бруса по длине L и высоте H. Сравнение погрешностей в определении собственных частот колебаний бруса с помощью КМКЭ и СМКЭ приведено в табл. 2. Видно, что по СМКЭ получены более точные значения частот p_k, чем по КМКЭ.

Таблица 1

Результаты расчетов собственных частот колебаний бруса с защемленным торцом

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
10×1	4,932	3,843	29,82	23,38	79,83	62,93	148,56	117,53
20×2	3,906	3,519	23,67	21,35	63,24	57,09	116,94	105,54
30×3	3,683	3,494	22,28	21,14	59,38	56,29	109,40	103,53
40×4	3,601	3,491	21,77	21,10	57,95	56,11	106,55	103,02
80×8	3,520	3,492	21,27	21,09	56,51	56,01	103,68	102,71
160×16	3,500	3,493	21,14	21,09	56,14	56,01	102,94	102,69
Густая сетка	3,493		21,09		56,02		102,69	
[25]	3,516		22,03		61,70		120,91	

Таблица 2

Погрешность (%) в определении собственных частот колебаний бруса с защемленным торцом

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
10×1	41,20	10,02	41,39	10,38	42,50	12,33	44,67	14,45
20×2	11,82	0,72	12,23	1,23	12,89	1,91	13,88	2,78
30×3	5,44	0,03	5,64	0,23	6,00	0,48	6,53	0,82
40×4	3,09	−0,06	3,22	0,05	3,45	0,16	3,76	0,32
80×8	0,77	−0,03	0,85	0	0,87	−0,02	0,96	0,02
160×16	0,20	0	0,24	0	0,21	−0,02	0,24	0

Свободные колебания бруса, опертого по торцам. Геометрические размеры, механические свойства и сетка задавались такие же, как в задаче о свободных колебаниях бруса с зещемленным торцом. Результаты расчетов представлены в табл. 3, 4. Как и в предыдущей задаче, по СМКЭ получены более точные значения частот p_k, чем по КМКЭ.

Т а б л и ц а 3

Результаты расчетов собственных частот колебаний бруса, свободно опертого по торцам

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
20×2	10,90	9,81	42,16	37,91	90,18	81,09	151,22	135,67
40×4	10,03	9,72	38,60	37,33	82,08	79,17	136,49	131,20
60×6	9,86	9,71	37,88	37,24	80,34	78,79	133,18	130,20
80×8	9,80	9,71	37,60	37,20	79,64	78,60	131,79	129,65
160×16	9,73	9,71	37,28	37,11	78,72	78,17	129,80	128,49
320×32	9,71	9,70	37,13	37,02	78,18	77,76	128,47	127,35
Густая сетка	9,70		36,99		77,64		127,02	
[25]	9,87		39,48		88,83		157,91	

Т а б л и ц а 4

Погрешность (%) в определении собственных частот колебаний бруса, свободно опертого по торцам

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
20×2	12,37	1,13	13,98	2,49	16,15	4,44	19,05	6,81
40×4	3,40	0,21	4,35	0,92	5,72	1,97	7,46	3,29
60×6	1,65	0,10	2,41	0,68	3,48	1,48	4,85	2,50
80×8	1,03	0,10	1,65	0,57	2,58	1,24	3,76	2,07
160×16	0,31	0,10	0,78	0,32	1,39	0,68	2,19	1,16
320×32	0,10	0	0,38	0,08	0,70	0,15	1,14	0,26

Свободные колебания бруса с защемленными торцами. Результаты расчетов собственных частот колебаний бруса представлены в табл. 5, а сравнение погрешностей в их определении с помощью КМКЭ и СМКЭ – в табл. 6. Видно, что при всех разбиениях по СМКЭ получены более точные значения частот p_k, чем по КМКЭ.

Т а б л и ц а 5

Результаты расчетов собственных частот колебаний бруса с защемленными торцами

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
10×1	29,91	23,69	78,05	62,42	144,54	116,38	226,10	182,56
20×2	23,86	21,57	62,33	56,45	114,95	104,16	178,16	161,24
30×3	22,47	21,32	58,53	55,51	107,56	101,88	165,99	156,88
40×4	21,95	21,27	57,10	55,28	104,74	101,28	161,29	155,69
80×8	21,43	21,25	55,65	55,15	101,86	100,89	156,46	154,86
160×16	21,30	21,25	55,28	55,15	101,11	100,86	155,19	154,76
Густая сетка	21,26		55,15		100,86		154,76	

Т а б л и ц а 6

Погрешность (%) в определении собственных частот колебаний бруса с защемленными торцами

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
10× 1	40,57	11,48	41,52	13,18	43,31	15,38	46,10	17,96
20× 2	12,28	1,50	13,02	2,36	13,97	3,27	15,12	4,19
30× 3	5,69	0,28	6,13	0,65	6,64	1,01	7,26	1,37
40× 4	3,29	0,09	3,54	0,23	3,85	0,42	4,22	0,60
80× 8	0,85	0	0,91	0	0,99	0,03	1,10	0,06
160× 16	0,23	0	0,24	0	0,25	0	0,28	0

Свободные колебания кругового бруса с защемленным торцом. Рассматривался брус квадратного поперечного сечения 1×1 в форме кругового кольца с внутренним $R_1 = 1$ и наружным $R_2 = 1{,}1$ радиусом. Коэффициент Пуассона принимался равным нулю. Результаты расчетов представлены в табл. 7–10, где значения ω_k определяются в соответствии с формулой

$$p_k = \frac{\omega_k}{R_1^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}, \qquad k = 1, \ldots, 4.$$

Сравнение погрешностей в определении собственных частот колебаний бруса приведено в табл. 8, 10. Как и в предыдущих задачах, по СМКЭ получены более точные значения частот p_k, чем по КМКЭ.

Т а б л и ц а 7

Результаты расчетов собственных частот колебаний кругового бруса в форме четверти кольца с защемленным торцом

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
16× 1	0,1940	0,1503	0,9157	0,7147	2,7660	2,1930	4,3850	4,0504
32× 2	0,1523	0,1368	0,7226	0,6503	2,2101	1,9961	4,0586	3,8102
48× 3	0,1432	0,1357	0,6797	0,6444	2,0808	1,9748	3,9159	3,7735
64× 4	0,1399	0,1355	0,6640	0,6433	2,0328	1,9703	3,8529	3,7648
80× 5	0,1383	0,1355	0,6566	0,6430	2,0100	1,9690	3,8211	3,7620
96× 6	0,1374	0,1355	0,6524	0,6429	1,9971	1,9684	3,8026	3,7607
Густая сетка	0,135516		0,643105		1,968672		3,760338	

Приведенные результаты исследований смешанного метода с равным успехом могут быть применимы к нелинейным задачам теории колебаний и устойчивости элементов конструкций.

Принципиальное отличие смешанных схем МКЭ от традиционных состоит в необходимости построения таких аппроксимирующих функций,

Т а б л и ц а 8

Результаты расчетов собственных частот колебаний кругового бруса в форме разрезанного кольца с защемленным торцом

Разбиение	$\omega_1 \cdot 10^2$		$\omega_2 \cdot 10^2$		$\omega_3 \cdot 10^2$		$\omega_4 \cdot 10^2$	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
64×1	2,4983	1,9883	4,1018	3,2659	9,0736	7,2322	24,308	19,385
128×2	1,9595	1,7788	3,2175	2,9208	7,1208	6,4657	19,084	17,330
192×3	1,8430	1,7462	3,0260	2,8671	6,6971	6,3458	17,948	17,006
256×4	1,8004	1,7440	2,9561	2,8634	6,5424	6,3373	17,532	16,983
320×5	1,7804	1,7436	2,9232	2,8627	6,4695	6,3355	17,337	16,978
Густая сетка	1,74423		2,86375		6,33776		16,983137	

Т а б л и ц а 9

Погрешность (%) в определении собственных частот колебаний кругового бруса в форме четверти кольца с защемленным торцом

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
16×1	43,16	10,91	42,39	11,13	40,50	11,39	16,61	7,71
32×2	12,38	0,95	12,36	1,12	12,26	1,39	7,93	1,33
48×3	5,67	0,14	5,69	0,20	5,70	0,31	4,14	0,35
64×4	3,24	0,01	3,25	0,03	3,26	0,08	2,46	0,12
80×5	2,05	0,01	2,10	−0,02	2,10	0,02	1,62	0,04
96×6	1,39	0,01	1,44	−0,03	1,44	0,01	1,12	0,01

Т а б л и ц а 10

Погрешность (%) в определении собственных частот колебаний кругового бруса в форме разрезанного кольца с защемленным торцом

Разбиение	ω_1		ω_2		ω_3		ω_4	
	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ	КМКЭ	СМКЭ
64×1	43,23	13,99	43,23	14,04	43,17	14,11	43,13	14,14
128×2	12,34	1,98	12,35	1,99	12,36	2,02	12,37	2,04
192×3	5,66	0,11	5,67	0,12	5,67	0,13	5,68	0,13
256×4	3,22	−0,01	3,22	−0,01	3,23	−0,01	3,23	0
320×5	2,07	−0,03	2,12	−0,03	2,08	−0,03	2,08	−0,03

для которых обеспечивается выполнение условий устойчивости, что, в свою очередь, гарантирует сходимость и получение устойчивого решения конечномерной задачи при любом h. Численные расчеты показывают, что попытки игнорирования условий устойчивости при конструировании смешанных аппроксимаций приводят к плохо обусловленным дискретным задачам, решения которых имеют неустойчивый осциллирующий характер.

Выводы

1. Разработаны и реализованы вычислительные алгоритмы смешанного метода решения задач механики о собственных колебаниях упругих тел.

2. Для решения обобщенной спектральной задачи предложены различные варианты смешанных вариационных формулировок МКЭ.

3. Исследована корректность постановок дискретных задач о спектре в смешанной форме и изучены вопросы устойчивости смешанных аппроксимаций для перемещений, деформаций и напряжений.

4. Построены матричные уравнения смешанного метода, для решения которых предложен модифицированный алгоритм метода наискорейшего спуска.

5. Представлены результаты расчетов определения собственных частот свободных колебаний прямого и кругового брусьев, полученные при решении задачи в двухмерной постановке на основе классического и смешанного подходов МКЭ.

Резюме

Розглядаються змішані варіаційні постановки і застосування змішаних апроксимацій методу скінченних елементів до розв’язку задач про власні коливання пружних тіл. Для розв’язання узагальненої спектральної задачі запропоновано три форми змішаних варіаційних формулювань методу скінченних елементів. Досліджено коректність та стійкість змішаних апроксимацій для переміщень, деформацій та напружень. Наведено матричні рівняння змішаного методу, котрі розв’язуються за допомогою модифікованого алгоритму методу найшвидшого спуску. Представлено результати розрахунку власних частот вільних коливань прямого та кругового бруса, що отримані при розв’язанні задачі в двовимірній постановці на основі класичного і змішаного підходів методу скінченних елементів.

1. *Аргирис Дж.* Современные достижения в методах расчета конструкций с применением матриц. – М.: Изд-во иностр. лит., 1968. – 240 с.
2. *Babushka I. and Osborn J.* Numerical treatement of eigenvalue problems for differential equations with discontinuous coefficients // Math. Comp. – 1978. – **32**. – P. 991 – 1023.
3. *Babushka I. and Osborn J.* Handbook of Numerical Analysis. – North-Holland, 1991. – Vol. 2. – P. 641 – 788.
4. *Бате К., Вилсон Р.* Численные методы анализа и метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1982. – 448 с.
5. *Галлагер Р.* Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
6. *Еременко С. Ю.* Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.
7. *Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.* The Finite Element Method. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi: Butterworth-Heinemann, 2000. – Vol. 1–3. – 1482 p.

8. *Постнов В. А., Хархурим И. Я.* Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1974. – 344 с.
9. *Сахаров А. С., Альтенбах И.* Метод конечных элементов в механике твердых тел. – Киев: Вища шк., 1982. – 478 с.
10. *Стрэнг Г., Фикс Дж.* Теория метода конечных элементов. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
11. *Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L.* On the convergence of eigenvalues for mixed formulations // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. – 1998. – **25**. – P. 131 – 154.
12. *Boffi D., Brezzi F., and Gastaldi L.* Of the problem of spurious eigenvalues in the approximation of linear elliptic problems in mixed form // Math. Comp. – 2000. – **69**. – P. 121 – 140.
13. *Mercier B., Osborn J , Rappaz J., and Raviart P.-A.* Eigenvalue approximation by mixed and hybrid methods // Ibid. – 1981. – **36**. – P. 427 – 453.
14. *Osborn J.* Eigenvalue approximations by mixed methods // Advances in Computer Methods for Partial Equations III. – New Bruncwick, 1979. – P. 158 – 161.
15. *Рисс Ф., Секефальви-Надь Б.* Лекции по функциональному анализу. – М.: Мир, 1979. – 587 с.
16. *Парлетт Б.* Симметричная проблема собственных значений. Численные методы. – М.: Мир, 1983. – 384 с.
17. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 542 с.
18. *Чирков А. Ю.* Построение смешанной аппроксимации к решению двухмерных задач теории упругости методом конечных элементов // Пробл. прочности. – 2003. – № 6. – С. 93 – 126.
19. *Дьяконов Е. Г.* Минимизация вычислительной работы. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
20. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.
21. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 411 с.
22. *Hestens M. and Stiefel E.* Methods of conjugate gradients for solving linear system // Nat. Bur. Std. J. Res. – 1952. – **49**. – P. 409 – 436.
23. *Reid J. K.* On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations // Large Sparse Sets Linear Equations. – London; New York: Academic Press, 1971. – P. 231 – 252.
24. *Чирков А. Ю.* Применение в конечноэлементных расчетах модифицированного алгоритма метода сопряженных градиентов // Пробл. прочности. – 2005. – № 6. – С. 89 – 102.
25. *Бабаков И. М.* Теория колебаний. – М.: Наука, 1968. – 559 с.

Поступила 14. 09. 2006