

## Стабілізуючий вплив стохастичних вібрацій на стійкість динамічних станів, зумовлених гармонічним параметричним навантаженням

В. А. Баженов, Є. С. Дехтярюк, Л. Ю. Немчинова, В. В. Отрашевська

Київський національний університет будівництва й архітектури, Київ, Україна

*Досліджується можливість стабілізації динамічних станів, зумовлених детермінованим періодичним параметричним навантаженням, за допомогою додаткового збудження, що являє собою експоненціально-корельований випадковий процес. Визначено діапазон значень радіуса кореляції, для яких випадкове збудження має стабілізуючий вплив на динамічний стан.*

**Ключові слова:** стійкість параметричних коливань, стохастичне параметричне збудження, експоненціально-кореляційний випадковий процес, стійкість відносно моментних функцій, стабілізація динамічних станів.

Відомо, що наведені поля вібрацій можуть мати стабілізуючий вплив на стійкість динамічних станів пружних систем [1]. Такі питання у випадку, коли поля вібрацій мають стохастичну природу, розглядалися в монографії [2]. У роботі досліджується можливість стабілізації динамічних станів, зумовлених детермінованим періодичним параметричним навантаженням, за допомогою додаткового випадкового збудження. Аналогічні задачі з використанням асимптотичних методів розглядалися у [3]. На відміну від [4] нижче розглядаються не дискретні значення радіуса кореляції, а інтервал значень від нуля до певного рівня. Визначено діапазон значень радіуса кореляції, для яких додаткове випадкове збудження має стабілізуючий вплив на динамічний стан. Слід відмітити, що даний підхід не базується на асимптотичних методах і тому не припускається малість відповідних параметрів.

Дискретна динамічна модель тонкостінної конструкції представляється рівняннями

$$M\ddot{\bar{u}} + C\dot{\bar{u}} + K\bar{u} + \varphi(t)K_G\bar{u} = 0, \quad (1)$$

де  $M$ ,  $G$ ,  $K$ ,  $K_G$  – матриці мас, демпфірування, жорсткості і геометричної жорсткості відповідно;  $\bar{u}(t) = (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t))^T$  –  $n$ -вимірний вектор динамічних змінних.

Розглядається змінне в часі параметричне навантаження:

$$\varphi(t) = \mu_1 \sin \omega t + \mu_2 z(t), \quad (2)$$

де перший доданок – основне гармонічне навантаження;  $z(t)$  – додаткове навантаження, яке є нормальним випадковим процесом з одиничною дисперсією;  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  – параметри навантаження;  $\omega$  – частота детерміністичної складової.

Припускається, що первісному стану пружної системи, стійкість якого досліджується, відповідає тривіальний розв'язок системи (1). При певних

комбінаціях значень інтенсивності і частоти навантаження стійкість первісного стану втрачається. Значення, для яких стійкість зберігається, на площині параметрів утворюють суцільні області – області динамічної стійкості.

У даній роботі за означення стійкості приймається стійкість відносно моментних функцій другого порядку. Методи, що пропонуються, можуть бути застосовані для дослідження стійкості відносно моментних функцій інших порядків. При аналізі стійкості відносно моментних функцій задача зводиться до дослідження стійкості тривіального розв'язку детерміністичних диференціальних рівнянь.

Для переходу до рівнянь першого порядку вводяться фазові змінні:

$$\begin{aligned} \bar{x}(t) &= (x_1(t), x_2(t), \dots, x_{2n}(t))^T = \\ &= (u_1(t), u_2(t), \dots, u_n(t), \dot{u}_1(t), \dot{u}_2(t), \dots, \dot{u}_n(t))^T. \end{aligned} \quad (3)$$

Щоб отримати рівняння для других моментів фазових координат, складається система рівнянь відносно компонент матриці  $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$ . Після усереднення по реалізаціях процесу  $z(t)$  з урахуванням (2) можна записати систему матричних рівнянь відносно матриці других моментів  $\langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle &= (A + \mu_1 \sin \omega t B) \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle + \langle \bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle (A^T + \mu_1 \sin \omega t B^T) + \\ &+ \mu_2 B \langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle + \mu_2 \langle z(t)\bar{x}(t)\bar{x}^T(t) \rangle B^T, \end{aligned} \quad (4)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & E \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -M^{-1}K_G & 0 \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Оскільки матриця  $\bar{x}(t)\bar{x}^T(t)$  розмірності  $2n \times 2n$  симетрична, кількість отриманих рівнянь є надлишковою. Тому за допомогою взаємно однозначного відображення [4] здійснюється перехід із множини симетричних матриць у множину  $n(2n + 1)$ -вимірних векторів, що складаються з елементів матриць, які розташовані не нижче головної діагоналі.

Система (4) містить нові змінні  $\langle z x_i x_j \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots, n, j = 1, 2, \dots, n, j \leq i$ ) і тому незамкнена відносно невідомих. Нові змінні є кореляціями процесу  $z(t)$  з компонентами вектора розв'язку задачі  $\bar{x}(t)$ . Ця типова для динамічних систем зі стохастичним параметричним збудженням проблема вирішується для випадку, коли  $z(t)$  є експоненціально-корельованим нормальним процесом із кореляційною функцією

$$K(\tau) = e^{-|\tau|/\rho}, \quad (6)$$

де  $\rho$  – радіус кореляції випадкового процесу.

Для такого процесу вказана проблема розв'язується шляхом розширення фазового простору, в якому розглядається розв'язок. Це досягається за рахунок апроксимації процесу  $z(t)$  процесом  $z_N(t)$ , який є скінченною сумою статистично незалежних телеграфних сигналів [5]:

$$z_N(t) = \xi_1(t) + \xi_2(t) + \dots + \xi_N(t). \quad (7)$$

Взаємно кореляційна матриця сигналів  $\xi_i$  має вигляд

$$\langle \xi_i(t) \xi_i(t + \tau) \rangle = \sigma_{ij} \frac{\sigma_0^2}{N} e^{-|\tau|/\rho}. \quad (8)$$

Відомо [5], що при  $N \rightarrow \infty$  маємо  $z_N(t) \rightarrow z(t)$ .

Якщо у (2)  $z(t)$  замінити  $z_N(t)$ , то, як показано в [5, 4], за допомогою операції усереднення для дослідження стійкості можна скласти систему детерміністичних рівнянь відносно послідовності моментних функцій:

$$\begin{cases} m_{02}(t) = \langle x_i(t)x_j(t) \rangle; \\ m_{12}(t) = \langle \xi_1(t)x_i(t)x_j(t) \rangle; \\ \dots \\ m_{k2}(t) = \langle \xi_1(t)\xi_2(t) \dots \xi_k(t)x_i(t)x_j(t) \rangle; \\ \dots \\ m_{N2}(t) = \langle \xi_1(t)\xi_2(t) \dots \xi_N(t)x_i(t)x_j(t) \rangle. \end{cases} \quad (9)$$

Ця система має вигляд

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix} = S_1 \times \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m_{02} \\ m_{12} \\ \vdots \\ m_{N2} \end{pmatrix}^T \times S_2, \quad (10)$$

де  $S_1$  і  $S_2$  – блокові тридіагональні матриці [4].

Таким чином, задача про стійкість тривіального розв'язку системи (1) зводиться до задачі про стійкість тривіального розв'язку детерміністичної системи (10) із  $2\pi/\omega$ -періодичними коефіцієнтами. Систему (10) можна записати таким чином:

$$\frac{d\bar{w}}{dt} = G(t)\bar{w}, \quad (11)$$

де

$$G(t) = G_0 + H \sin \omega t; \quad (12)$$

вектор  $\bar{w} = (w_1, w_2, \dots, w_l)^T$  складається із компонент матриць  $m_{02}, m_{12}, \dots, m_{N2}$  і має розмірність  $p = (N + 1) \frac{n(n + 1)}{2}$ .

Система (11) досліджується методом узагальнених показників Хілла. Розв'язок знаходиться у вигляді

$$\bar{w}(t) = e^{\lambda t} \left( \bar{w}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\bar{\mu}_k \sin k\omega t + \bar{\nu}_k \cos k\omega t) \right), \quad (13)$$

Підставимо (12), (13) у (11) і прирівняємо коефіцієнти при однакових гармонічних функціях. У результаті отримуємо задачу на власні значення:

$$\det(K - \lambda E) = 0, \quad (14)$$

де  $K$  і  $E$  – матриці нескінченного порядку [6].

За допомогою редукції здійснюється перехід до задачі на власні значення для системи скінченного порядку. Характеристичні показники  $\lambda$  знаходяться як корені алгебричного рівняння

$$\det(K^* - \lambda E^*) = 0, \quad (15)$$

де  $K^*$  і  $E^*$  – редуковані матриці.

Тривіальний розв'язок буде асимптотично стійким, якщо всі характеристичні показники мають від'ємну дійсну частину, і асимптотично нестійким, якщо серед характеристичних показників є хоча б один із додатньою дійсною частиною.

Уточнення оцінок границі області стійкості досягається шляхом збільшення розмірності матриць  $K^*$  і  $E^*$  і числа доданків  $N$  в апроксимації (7).

У даній роботі проблема впливу випадкової складової комбінованого збудження на стійкість досліджується спочатку на прикладі тривіального розв'язку рівняння Мат'є–Хілла:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2\varepsilon\omega_0 \frac{du}{dt} + \omega_0^2 [1 + \varphi(t)]u = 0. \quad (16)$$

Функція  $\varphi(t)$  задається поданням (2).

Розглядається питання про вплив радіуса кореляції  $\rho$  параметричного збудження на стійкість стохастичної системи. Втрата стійкості тривіального розв'язку рівняння Мат'є–Хілла може відбуватися і за відсутності гармонічного навантаження під дією тільки стохастичного збудження. Така структура навантаження задається поданням (2) при  $\mu_1 = 0$ . Для дослідження можливості стабілізації динамічних станів, зумовлених гармонічним навантаженням, за допомогою наведених стохастичних вібраційних полів не-

обхідно спочатку визначити критичні значення інтенсивності стохастичної складової, що задається параметром  $\mu_2$ , за яких втрачається стійкість у разі, коли прикладається тільки стохастичне навантаження. Тобто необхідно визначити такий рівень стохастичної складової, при перевищенні якого додавання навіть незначного гармонічного збудження призводить до втрати стійкості. Такі критичні значення параметра  $\mu_2$  залежать від радіуса кореляції стохастичного навантаження. Тому спочатку досліджувалася залежність критичних значень  $\mu_2$  від радіуса кореляції процесу  $z(t)$  при  $\mu_1 = 0$ . Розглядалися наступні значення параметра загасання  $\varepsilon$ : 0,05; 0,02 і  $\frac{\delta}{2\pi}$  ( $\delta = 0,05$ ).

На рис. 1 показано границі областей стійкості, побудовані при вказаних значеннях  $\varepsilon$ . Видно, що залежність критичних значень  $\mu_2$  від радіуса кореляції  $\rho$ , взагалі кажучи, не є монотонною, зі зменшенням значення  $\varepsilon$  монотонність порушується. Зокрема, при  $\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi}$  зі збільшенням радіуса кореляції спочатку величина  $\mu_2$  досить різко зменшується до 0,249 при  $\rho = 0,5$ , потім дещо збільшується і досягає 0,333 при  $\rho = 0,286$ , а далі монотонно зменшується. Такий же характер залежності, але з меншими коливаннями зберігається при  $\varepsilon = 0,02$ , а вже при  $\varepsilon = 0,05$  критичний рівень стохастичного навантаження тільки спадає зі зростанням радіуса кореляції.

Далі досліджувалися можливість стабілізації динамічних станів, зумовлених гармонічним навантаженням, при додатковому стохастичному навантаженні та вплив радіуса кореляції на критичні значення  $\mu_1$  при  $\varepsilon = \frac{\delta}{2\pi}$  за певних фіксованих значень рівня наведеної стохастичної вібрації  $\mu_2$  в інтервалі  $\rho = 0 \dots 1,8$ . Природно, що вибиралися значення  $\mu_2$ , що менші за визначені критичні в цьому інтервалі (рис. 1). Як було показано раніше [4], при дослідженні стійкості динамічних станів рівняння Мат'є–Хілла при комбінованому навантаженні вигляду (2) критична амплітуда  $\mu_1$  при конкретному  $\rho$  має мінімальне значення, якщо частота гармонічної складової навантаження  $\omega = 2\omega_0$ , тобто є частотою головного простого резонансу. Тому дослідження проводилися при  $\omega = 2\omega_0$ .

На рис. 2 показано границі областей стійкості, що побудовані при значеннях стандарту стохастичної складової  $\mu_2 = 0,2; 0,22$  і  $0,225$ . Для дослідження ефекту стабілізації необхідно знати критичне значення  $\mu_1$  за відсутності стохастичної складової, тобто при  $\mu_2 = 0$ , оскільки саме перевищення цього значення при додаванні стохастичної складової вказує на наявність стабілізації. У цьому випадку критичне значення  $\mu_1$  наближено визначається за формулою [6]

$$\mu_1 \approx 2\sqrt{\frac{(\omega^2 - 4\omega_0^2)^2}{16\omega_0^4} + 4\varepsilon^2}, \quad (17)$$

тобто при  $\omega = 2\omega_0$  маємо  $\mu_1 = 4\varepsilon = 0,03183$ . Цьому значенню на рис. 2 відповідає горизонтальна пунктирна лінія.

Із даних рис. 2 видно, що для кожного з розглядуваних значень  $\mu_2$ , починаючи з деякого  $\rho$ , критичні значення  $\mu_1$  перевищують такі, що отримані за відсутності випадкової складової (графік розташований вище горизонтальної пунктирної лінії), тобто додавання наведених вібраційних полів із достатньо великим радіусом кореляції стабілізує відповідні динамічні стани. Порівняння границь областей стійкості (рис. 2) показує, що при збільшенні  $\mu_2$  діапазон значень радіуса кореляції, за яких може досягатися стабілізуючий ефект, зменшується.

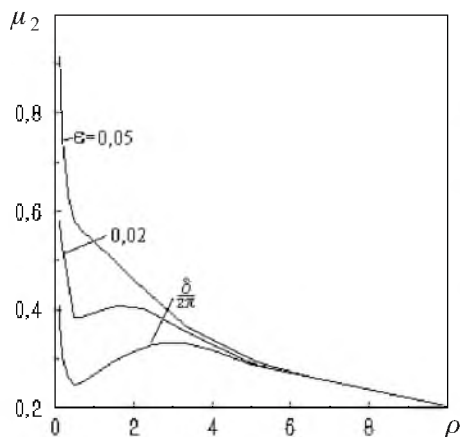


Рис. 1

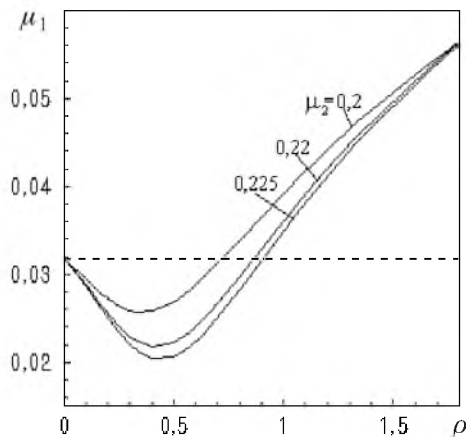


Рис. 2

Рис. 1. Залежність критичних значень стандарту  $\mu_2$  випадкового навантаження від його радіуса кореляції  $\rho$  для різних значень параметра загасання  $\varepsilon$  у випадку рівняння Мат'є-Хілла.

Рис. 2. Залежність критичних значень амплітуди  $\mu_1$  гармонічної складової навантаження від радіуса кореляції  $\rho$  випадкового процесу для різних значень його стандарту  $\mu_2$  у випадку рівняння Мат'є-Хілла.

Можливість стабілізації динамічних станів пружних систем за допомогою наведених полів вібрацій досліджувалася на прикладі аналізу динамічної стійкості оболонки. Розглядалася замкнена кругова циліндрична оболонка, шарнірно обперта по контуру. Закріплення допускає вільний зсув країв у поздовжньому напрямку і перешкоджає зсуву в круговому. По торцях оболонки прикладається рівномірно розподілене навантаження, що має структуру (2). Оболонка має такі характеристики: довжина  $l = 0,43$  м; радіус  $R = 0,16$  м; товщина  $h = 0,005$  м; модуль пружності  $E_M = 7 \cdot 10^4$  МПа; коефіцієнт Пуассона  $\nu_M = 0,3$  (3); щільність  $\rho_M = 2700$  кг/м<sup>3</sup>; логарифмічний декремент коливань  $\delta = 0,05$ . Таким чином,  $\varepsilon \approx 0,007957747$ .

Динамічні стани пружної системи аналізуються за допомогою прямих методів. Досліджуваний динамічний стан наближено представляється у вигляді зваженої суми базисних функцій, за які приймаються власні форми оболонки. У цій задачі власні форми коливань збігаються з формами втрати стійкості при статичному навантаженні вказаного типу. Тому розрахункові рівняння розпадаються на окремі незв'язані групи рівнянь, які можна звести до рівнянь типу Мат'є-Хілла.



При побудові розрахункової динамічної моделі використовується сітка МСЕ, що складається з 864 скінченних елементів (72 розбивки в окружному напрямку, 12 – у поздовжньому). У всіх шести форм число півхвиль по довжині оболонки  $m=1$ . Відповідні їм власні частоти:  $\omega_1 = \omega_2 = 4734$  рад/с;  $\omega_3 = \omega_4 = 5263$  рад/с;  $\omega_5 = \omega_6 = 7275$  рад/с. Перша пара кратних форм має три хвилі в окружному напрямку ( $m_2 = 3$ ), друга – чотири ( $m_2 = 4$ ), третя – дві ( $m_2 = 2$ ). Компоненти діагональної матриці  $K_G^*$  мають такі значення:  $g_{11} = g_{22} = 3,513$ ;  $g_{33} = g_{44} = 3,689$ ;  $g_{55} = g_{66} = 3,136$ .

Результати досліджень залежності критичних значень  $\mu_2$  від радіуса кореляції за відсутності детерміністичної складової представлено на рис. 3. Видно, що характер залежності такий, як і при дослідженні тривіального розв'язку рівняння Матьє–Хілла (рис. 1). На рис. 4 показано границі областей стійкості при комбінованому навантаженні, що має стохастичну складову, при  $\mu_2 = 0,173P_{кр}$ ,  $0,191P_{кр}$  та  $0,195P_{кр}$ . Для даної оболонки критичне значення  $\mu_1$ , що відповідає тільки гармонічному навантаженню, тобто при  $\mu_2 = 0$ , дорівнює 182726,6706, цьому значенню відповідає горизонтальна пунктирна лінія на рис. 4.

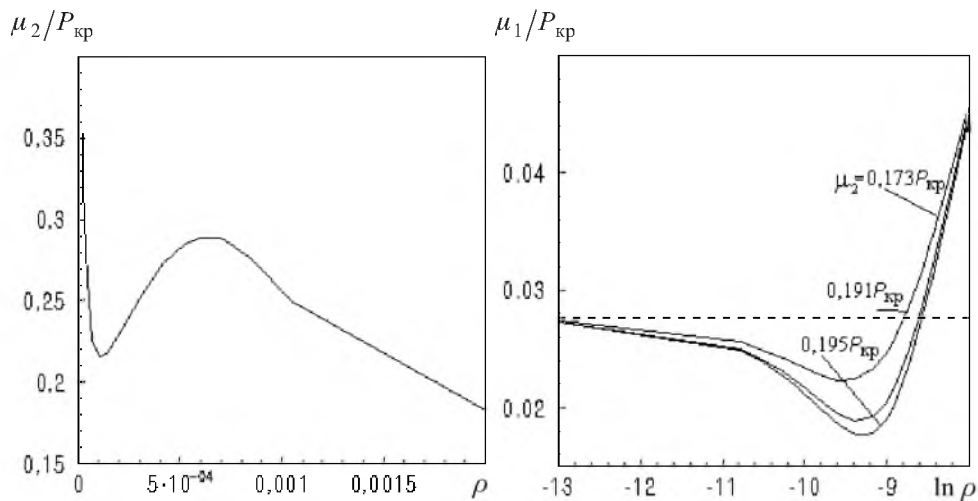


Рис. 3

Рис. 4

Рис. 3. Залежність критичних значень стандарту  $\mu_2$  випадкового навантаження від його радіуса кореляції  $\rho$  для оболонки.

Рис. 4. Залежність критичних значень амплітуди  $\mu_1$  гармонічної складової навантаження у долях критичного статичного навантаження  $P_{кр}$  від логарифма радіуса кореляції  $\rho$  випадкового процесу для різних значень його стандарту  $\mu_2$  у випадку оболонки.

Як і для рівняння Матьє–Хілла (рис. 2), з наведених значень  $\mu_2$  додавання стохастичної складової з досить великим радіусом кореляції стабілізує динамічні стани, тобто спричинює зростання критичних значень  $\mu_1$  до таких, що, вищі, ніж отримані за відсутності стохастичної складової. Значення радіуса кореляції стохастичної складової, починаючи з якого має місце ефект стабілізації, тим більше, чим вищий рівень інтенсивності цієї складової.

## Резюме

Исследуется возможность стабилизации динамических состояний, обусловленных детерминированным периодическим параметрическим нагружением, с помощью дополнительного возбуждения, представляющего собой экспоненциально-коррелированный случайный процесс. Определен диапазон значений радиуса корреляции, для которых дополнительное случайное возбуждение имеет стабилизирующее влияние на динамическое состояние.

1. Челомей В. Н. О возможности повышения устойчивости упругих систем при помощи вибраций // Докл. АН СССР. – 1956. – **110**, № 3. – С. 345 – 347.
2. Диментберг М. Ф. Случайные процессы в динамических системах с переменными параметрами. – М.: Наука, 1989. – 175 с.
3. Ariaratnam S. T. and Tam D. S. Parametric random excitation of a damped Mathieu oscillator // ZAMM. – 1976. – **56**. – P. 449 – 452.
4. Баженов В. А., Дехтярюк С. С., Отрашевська В. В., Гончаренко М. В. Стабілізація стійкості сталих коливальних режимів динамічних систем при комбінованому збудженні // Авіац.-косм. техніка і технологія. – 2004. – Вып. 3 (11). – С. 51 – 58.
5. Кляцкин В. И. Стохастические уравнения и волны в случайно неоднородных средах. – М.: Наука, 1980. – 336 с.
6. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. Т. 1. Колебания линейных систем / Под ред. В. В. Болотина. – М.: Машиностроение, 1978. – 352 с.

Поступила 11. 12. 2006