

УДК 532.465

# СИЛЬНО-НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ И ГРАВИТАЦИОННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ БАССЕЙНЕ

Ю. В. КАНАРСКАЯ, В. С. МАДЕРИЧ

Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев

Получено 22.01.2004

Изучена сильно-нелинейная динамика вырождения крупномасштабных внутренних волн и гравитационных течений в прямоугольном бассейне, наполненном двумя слоями жидкости различной плотности. Дополнена и расширена классификация режимов течений в замкнутом бассейне.

Вивчена сильно-нелінійна динаміка виродження великомасштабних внутрішніх хвиль та гравітаційних течій в прямокутному замкнутому басейні, що наповнений двома шарами рідини різної густини. Доповнена та розширена класифікація режимів течій в замкнутому басейні.

A strong nonlinear dynamics of degeneration of basin scale internal waves and gravitational currents is studied. The classification of flow regimes in rectangular basin with two fluids of different densities is complemented.

## ВВЕДЕНИЕ

Известно, что внутренние волны играют важную роль в динамике стратифицированных озер. Как правило, приток кинетической энергии за счет ветра происходит на масштабах озера и синоптических временных масштабах. Возникающие поля течений приводят к неоднородному по горизонтали смещению термоклина и формированию крупномасштабных стоячих волн (внутренних сейш). Наблюдения показывают, во-первых, более быстрое затухание волн масштаба бассейна, чем это должно быть за счет внутренней диссипации и, во-вторых, наличие сплошного спектра внутренних волн вплоть до частот Брента-Вайсяля. Механизм переноса энергии масштабов бассейна к мелкомасштабным движениям включает [1]: 1) нелинейное укрупнение длинных волн; 2) сдвиговую неустойчивость течений; 3) заплеск и отражение от наклонных границ и 4) взаимодействие с топографией. Слабо-нелинейные волновые движения могут исследоваться в рамках уравнений Kortvega де Вриза (КдВ), модифицированных с учетом медленно меняющегося сдвига течений и топографии [2-5]. Однако эти модели волн позволяют описывать только одностороннее воздействие пространственно-временных изменений "фоновых" течений и стратификации на эволюцию локальных возмущений, тогда как сильно-нелинейные возмущения сами оказывают существенный обратный эффект на крупномасштабные движения. Поэтому необходимо численное решение задачи для полной системы уравнений Навье-Стокса, в рамках которой можно описать вну-

треннюю структуру течений большой амплитуды, включая гидравлические скачки и гравитационные течения. В данной работе с помощью негидростатической численной модели [6, 7] исследуется динамика вырождения крупномасштабных сильно-нелинейных возмущений в замкнутом бассейне, наполненном двумя слоями жидкости различной плотности.

## 1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим бассейн длиной  $L$  и высотой  $H$ , наполненный двумя жидкостями разной плотности, с величиной плавучести  $g'$ . Движения вызываются начальным отклонением границы раздела на амплитуду  $\eta_0$  (рис. 1). Толщина нижнего слоя в середине бассейна  $h = h_1$ , а толщина верхнего –  $h_2$ . При различных амплитудах начального отклонения и глубине нижнего слоя может возникнуть широкий спектр режимов течений: от длинных линейных волн до турбулентных гравитационных течений. Механизмы такого вырождения анализировались в работе [1], в которой приведены также результаты лабораторных экспериментов. Представленные ниже результаты численного исследования дополняют и расширяют классификацию описанием режимов, не изученных в лабораторных экспериментах. К ним относятся случаи, когда поверхность раздела пересекает свободную поверхность и дно бассейна вплоть до вертикального положения, что соответствует так называемой задаче о водообмене между шлюзами.

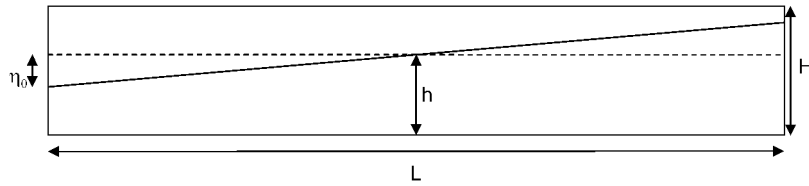


Рис. 1. Схема исследуемого объекта

## 2. ХАРАКТЕРНЫЕ ВРЕМЕНА ТЕЧЕНИЙ

Для классификации различных режимов течений удобно определить, следуя [1], характерные времена для течений стратифицированной жидкости в прямоугольном бассейне.

### Период линейных колебаний длинных волн

В простейшем случае линейных волн на поверхности раздела между двумя жидкостями различной плотности период колебаний будет задаваться как

$$T_i = 2L \left( g' \frac{h_1 h_2}{H} \right)^{-1/2} = 2L/c_0, \quad (1)$$

где  $c_0 = \pm \sqrt{g' h_1 h_2 / H}$  – скорость длинных внутренних волн. Отметим, что при временах  $t = T_i(2n - 1)/4n \in N$  граница раздела принимает горизонтальное положение, а скорости в каждом слое достигают максимального значения в центральной части бассейна:

$$\tilde{U}_1 = g' \frac{h_2}{H} \frac{2\eta_0}{L} t, \quad \tilde{U}_2 = g' \frac{h_1}{H} \frac{2\eta_0}{L}. \quad (2)$$

### Характерное время формирования неустойчивости Кельвина-Гельмгольца

Известно, что в течении со сдвигом скорости  $\Delta \tilde{U}$  при конечной толщине границы раздела между двумя слоями  $\delta_\rho$  может возникать сдвиговая неустойчивость Кельвина-Гельмгольца (КГ). При этом критерий устойчивости определяется значением локального числа Ричардсона:

$$Ri = \frac{g' \delta_\rho}{(\Delta \tilde{U})^2}. \quad (3)$$

Необходимым критерием устойчивости течения к малым возмущениям является критерий  $Ri < 0.25$ . Тогда минимальный сдвиг скорости, который требуется для развития КГ неустойчивости, с учетом (2), (3), имеет вид  $\Delta \tilde{U} = 2(g' \delta_\rho)^{1/2}$ , а характерное время появления неустойчивости КГ определяется как

$$T_{KH} = \frac{L}{\eta_0} \left( \frac{\delta_\rho}{g'} \right)^{1/2}. \quad (4)$$

Таким образом, для появления неустойчивости КГ должно выполняться условие  $T_{KH} > T_i/4$ .

### Характерное время укрупнения волны

Когда начальное отклонение пикноклина от равновесного значения достаточно велико, течение уже не описывается в рамках линейной теории. В теории длинных волн для волны длиной  $L$  и амплитуды  $\eta_0$  вводится характерное время укрупнения волны [8]

$$T_s \approx \frac{L}{\alpha_1 \eta_0}, \quad (5)$$

где коэффициент нелинейности  $\alpha_1 = 3/2c_0(h_1 - h_2)/h_1 h_2$ . За счет нелинейности и диссипации начальное возвышение границы раздела для волны конечной амплитуды может преобразоваться в солитоны в пределах времени  $T_s$ . Отметим, что коэффициент нелинейности обращается в нуль при  $h_1 = h_2$ .

### Время затухания

В вязкой жидкости начальное возмущение может затухать за счет сил внутреннего трения в жидкости. Время диссипации исходной стоячей волны в бассейне можно определить как

$$T_d = T_i/\gamma_d, \quad (6)$$

где  $2\gamma_d = dE/E$  – коэффициент затухания, характеризующий потерю внутренней энергии за один период колебаний, который зависит от характеристик турбулентного пограничного слоя и придонного слоя.

## 3. РЕЖИМЫ ТЕЧЕНИЙ

В зависимости от соотношения между характерными временами различных процессов, найденными выше, можно определить несколько основных режимов стратифицированной жидкости в прямоугольном бассейне. Границы режимов, приведенные на рис. 2, иллюстрируют зависимость между безразмерными амплитудой начального возмущения  $\gamma = \frac{\eta_0}{h_1}$  и глубиной нижнего слоя  $\delta = \frac{h_1}{H}$  [1].

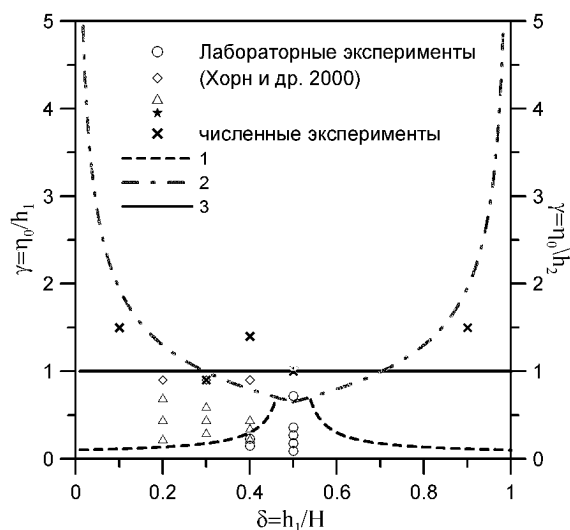


Рис. 2. Классификация режимов течений:  
 1 - граница режима линейных затухающих волн  $T_s = T_d$ ,  
 2 - граница режима КГ неустойчивости  $T_{KH} = T_i/4$ ,  
 3 - граница режима гравитационных течений  $\gamma = 1$

#### 1) Затухающие линейные волны (режим 1)

Этот режим имеет место при  $T_d < T_s$ . Граничный режим при  $T_d = T_s$  определяется кривой 1 на рис. 2 и зависимостью

$$\alpha = \frac{\gamma_d}{3} \left( \frac{1-\gamma}{1-2\gamma} \right). \quad (7)$$

#### 2) Нелинейно-дисперсионный режим (режим 2)

Если характерное время укрупнения меньше времени диссипации  $T_s < T_d$ , начальная волна может преобразоваться в цуг солитонов. При этом энергия передается от начального длинноволнового возмущения амплитуды  $\eta_0$  к более коротким волнам – солитонам.

#### 3) Режим гравитационных течений (режим 3)

В работе [1] вводится также характерное время образования сверхкритических течений. Однако подход, который используется для определения этого времени, ограничен рассмотрением колебательных движений, т. е. граница раздела плотности не может пересекать дно или свободную поверхность. Поэтому далее мы будем рассматривать помимо режимов, определенных в работе [1], также режимы гравитационных течений, для которых граница раздела может пересекать нижнюю и верхнюю границы бассейна. Граница режима будет задаваться кривой  $\gamma = 1$  (кривая 3 на рис. 2), т. е. предельному случаю, когда граница раздела достигает угла бассейна.

#### 4) Режим неустойчивости Кельвина-Гельмгольца (режим 4)

Как было показано, при  $T_{KH} < T_i/4$  локальное число Ричардсона меньше 0.25 и в течении может появиться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Таким образом, граница режима (кривая 2 на рис. 2) будет задаваться соотношением

$$\gamma = \frac{2\sqrt{\delta\rho}}{Q} \left( \frac{1-\delta}{\delta H} \right)^{1/2}, \quad (8)$$

где коэффициент  $Q$  задается как поправка за счет вязкости в течении [1].

#### 5) Режим гравитационных течений и неустойчивости КГ (режим 5)

В случае, когда амплитуда начального возмущения велика и когда пикноклин пересекает донную или свободную поверхность, течение может сопровождаться развитием сдвиговой неустойчивости, образованием боров, разрушением волн и интенсивным перемешиванием. Как видно из рис. 2, этот режим ( $T_{KH} < T_i/4$ ,  $\gamma > 1$ ) занимает наибольшую область. Отметим, что граничным случаем, когда запас потенциальной энергии максимален и наклон пикноклина вертикален (при значениях  $\delta = 1$ ,  $\gamma = 10, 35$ ), является конфигурация “водообмен в шлюзе”. Такие течения сопровождаются развитием КГ неустойчивости, которая приводит к диссипации энергии и интенсивному перемешиванию между слоями.

### 4. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИЛЬНО-НЕЛИНЕЙНЫХ ТЕЧЕНИЙ

В рамках численной негидростатической модели со свободной поверхностью [6, 7] решались уравнения Навье-Стокса. На сетке  $400 \times 15 \times 70$  моделировался бассейн длиной  $L = 6$  м, высотой  $H = 0.29$  м, наполненный двумя слоями воды различной плотности с величиной плавучести  $g' = 0.2$  м/с<sup>2</sup>. Параметры лабораторных экспериментов [1] и численных экспериментов показаны на рис. 2, откуда видно, что численные эксперименты позволяют получить недостающую информацию о характере течений для режимов сильно-нелинейных течений, не исследовавшихся в лабораторных условиях. Для иллюстрации механизмов, которые могут возникать в таких течениях, приведем результаты расчетов для численного эксперимента 5 при  $\delta = 0,4$ ,  $\gamma = 1,4$ . На рис. 3 показана эволюция границы раздела со временем. Сначала в левой части течения формируется характерная голова гравитационного течения (рис. 3,  $t=17.5$  с). В последующие моменты времени (рис. 3,  $t=25$  с) в середине бассейна начинает раз-

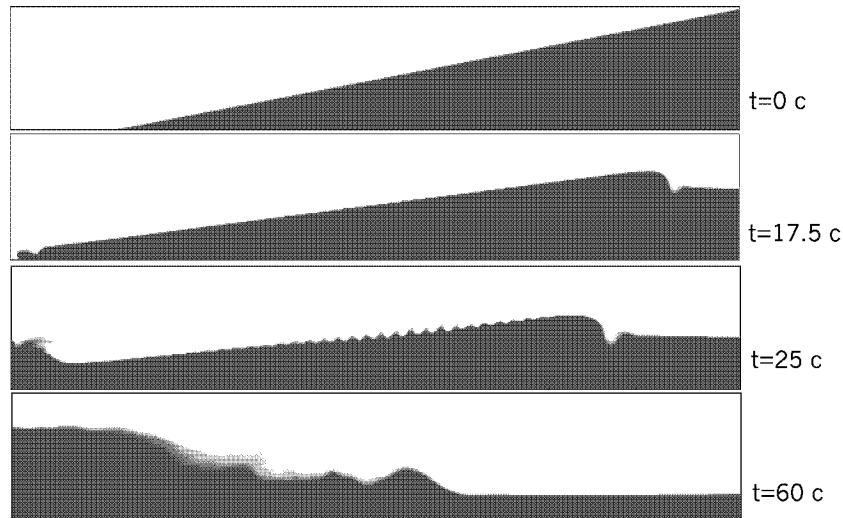


Рис. 3. Вертикальний розріз щільності для режиму 5 в різні моменти часу

виватися неустійчивість КГ. В розрахунках знайдено, що виникнення сдвигової неустійчивості наступало при числі Річардсона  $Ri = g' \delta_\rho / (\Delta U)^2$ , рівном 0.218. При цьому товщина межі розділу  $\delta_\rho \approx 2.1$  см, а довжина хвилі найбільш неустійчивої моди  $\lambda = 13,8$  см, що відповідає  $\lambda = 6.57 \delta_\rho$ . Цей результат добре узгоджується з оцінками [9]  $\lambda = 6.3 \delta_\rho$  і оцінками [10]  $\lambda = 7.5 \delta_\rho$ . Як показано на рис. 3, при  $t=60$  с течення формує такий названий ундулярний бор з інтенсивною зоною дисипації в кормовій частині.

Таким чином, на прикладі даного експерименту продемонстровано взаємодію різних сильно-нелинейних процесів еволюції початкового гравітаційного течення в режимі 5, супроводжується появою сдвигової неустійчивості і ундулярного бора.

## ВИВОДИ

В цій роботі класифікація [1] процесів виродження крупномасштабних порушень в двохшарному замкнутому басейні доповнена включенням сильно-нелинейного режиму гравітаційних течій. Показано, що чисельні експерименти для сильно-нелинейних течій відтворюють режими, які раніше не досліджувалися в лабораторних умовах і не можуть бути описані в рамках моделей слабо-нелинейних хвиль.

Данна робота виконана в рамках проекту INTAS N 03-51-3728.

1. Horn D. A., Imberger J., Ivey G. N. The degeneration of large-scale interfacial gravity waves in lakes // *J. Fluid Mech.* – 2002. – **434**. – P. 181–207.
2. Djordjic V. D., Redekopp L. G. The fission and disintegration of internal solitary waves moving over two-dimensional topography // *J. Phys. Oceanogr.* – 1978. – **8**. – P. 1016–1024.
3. Maslowe S.A., Redekopp L.G. Long nonlinear waves in stratified shear flows // *J. Fluid. Mech.* – 1980. – **101**. – P. 321–348.
4. Пелиновский Е.Н., Талипова Т.Г., Степанянц Ю.А. Моделирование распространения нелинейной внутренней волны в горизонтально неоднородном океане // *Изв. РАН Физика атмосферы и океана*. – 1994. – **30**. – С. 79–85.
5. Horn D. A., Redekopp L.G., Imberger J. Ivey G. N. Internal wave evolution in a space-time varying field // *J. Fluid Mech.* – 2000. – **424**. – P. 279–301.
6. Kanarska Y., Maderich V. A non-hydrostatic numerical model for calculating free-surface stratified flows // *Ocean Dynamics*. – 2003. – **53**. – P. 176–185.
7. Канарская Ю.В. Математическая модель негидростатических течений в обобщенных координатах // *Прикл. Гидромех.* – 2003. – **5 (77)**, N 3. – С. 17–27.
8. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. – М.: Мир, 2003. – 623 с.
9. Hazel P. Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows // *J. Fluid Mech.* – 1972. – **51**. – P. 39–61.
10. Miles J. W., Howard L.N. Note on a heterogeneous shear flow // *J. Fluid Mech.* – 1964. – **20**. – P. 331–336.