

УДК 532.465

МОДЕЛЬ ОБРАЗОВАНИЯ СПЕКТРА НЕФТЯНЫХ КАПЕЛЬ В ПРИПОВЕРХНОСТНОМ СЛОЕ ОКЕАНА

И. А. БРОВЧЕНКО

*Институт проблем математических машин и систем НАН Украины, Киев**Получено 20.09.2003*

Исследуется формирование распределения нефтяных капель с помощью модели А.Н. Колмогорова, в которой учитывается наличие нижней грани диаметров капель. Получено решение для степенного закона дробления и асимптотическая формула для произвольного закона дробления. Рассмотрены существующие модели дробления и предложена эмпирическая модель, которая воспроизводит наблюдаемое в экспериментах универсальное распределение.

Досліджується формування розподілу нафтових крапель за допомогою моделі А. Н. Колмогорова, в якій враховується наявність нижньої границі діаметрів крапель. Отриманий розв'язок для степенного закону подрібнення та асимптотична формула для довільного закону подрібнення. Розглянуто існуючі моделі подрібнення та запропоновано емпіричну модель, що відтворює універсальний розподіл, який спостерігається в експериментах.

The formation of oil droplets distribution is studied using A.N. Kolmogorov approach, considering the lower limit of droplets diameters. The analytical distribution for the exponential break-up function and asymptotical formula for the arbitrary break-up law are obtained. An existing models of break-up in turbulent flow are considered and new empirical model producing observed in experiments self-similar distribution is proposed.

ВВЕДЕНИЕ

При поверхностном разливе нефти и нефтепродуктов в море сначала, как правило, формируется пятно загрязнений в виде тонкой пленки, которое переносится ветром и течениями. Со временем испарение и растворение нефти уменьшает массу нефти на поверхности. Обрушающиеся ветровые волны вовлекают нефть в приповерхностный слой моря, и дробят ее на капли, диффундирующие под действием турбулентности вглубь моря. Силы плавучести приводят к постепенному подъему капель к поверхности, на которой они формируют удлинённый след за дрейфующим основным пятном. В условиях мелководья дисперсная часть нефтяного разлива взаимодействует со взвесью и загрязняет донные отложения. В известной аварии танкера "Braer" [1], произошедшей в 1993 году в мелководном районе Шетландских островов, из 80000 тонн нефти, поступившей в воду, шторм перемешал до 40% нефти по всей толщине слоя воды. Эта масса переносилась течениями в направлении, противоположном ветру, а около 15% осело на дно.

Перемешивание поверхностного пятна нефти волнами может также привести к тому, что капли воды будут вовлекаться в нефть, образуя водонефтяную эмульсию у поверхности воды. В отличие от вязкой и устойчивой эмульсии нефть в диспергированном состоянии может разбавиться до низких концентраций. Моделирование диспергированной составляющей нефтяного разлива необходимо не только для прогноза переноса нефтя-

ных загрязнений [2, 3], но и для оценки эффекта применения диспергаторов в ликвидации разливов нефти [4].

В ряде лабораторных [5–7] и натуральных экспериментов [8] изучалось распределение по размерам капель нефти, сформировавшееся в результате перемешивания колеблющимися решетками [5–7] и обрушения волн [5, 8]. В эксперименте [5] найдено, что дробление нефти на капли прекращается по достижении некоторого критического диаметра D_{max} . Концепция наличия нижней грани диаметров капель D_{max} , дальше которой дробление в пределах области с заданными характеристиками локальной структуры потока не происходит, выдвинута еще А.Н. Колмогоровым [9]. Теоретическая оценка [10] для D_{max} :

$$D_{max} = c(\gamma/\rho_0)^{3/5} \varepsilon^{-2/5} \quad (1)$$

основана на предположении, что капли перестают дробиться, когда силы турбулентных пульсаций давления уравниваются силами поверхностного натяжения. Здесь ε – скорость диссипации; ρ – плотность окружающей среды; γ – коэффициент поверхностного натяжения. Для капель с размерами, меньшими D_{max} , плотность распределения $n(D)$ в экспериментах [5] была аппроксимирована степенной зависимостью $n \sim D^{-2.3}$, тогда как в [11] найдено, что $n \sim D^3$. Результаты более поздних экспериментов [6–8] показали, что степенные зависимости не аппроксимируют зависимости, которые наблюдаются при малых размерах капель. В работе [7] показано, что распреде-

ление $n(D)$ становится автомодельным, если его пронормировать на общее число капель и на средний диаметр капли. На рис. 1 представлены данные экспериментов с разными сортами нефти при разных температурах, а также показаны наклоны кривых, полученных в экспериментах [5, 11]. Видно, что на некоторых участках полученное распределение может быть представлено в степенном виде, но при малых размерах частиц степенная зависимость неприменима. В [7] обнаружена автомодельность в распределении капель при нормировке результатов измерений на общее количество частиц N_t и на средний диаметр капель D_{50} . Это означает, что зависимость распределения капель по размерам не зависит от механизма перемешивания и физико-химических свойств нефти и проявляется через средний размер капли.

Важными представляются вопросы о способе формирования распределения капель с размерами меньше D_{max} и форме этого распределения. В работе [12] исследовалось предположение, что наблюдаемый спектр размеров капель обусловлен генерацией капель размерами $D_{max} \sim \varepsilon^{-2/5}$ в условиях сильной перемежаемости перемешивания обрушающимися волнами (см. также [13]). Оказалось, однако, что получающиеся капли слишком велики и быстро всплывают. Поэтому следует предположить, что в формировании наблюдаемого спектра капель главную роль играют процессы порождения дочерних частиц при распаде капель. Еще в работе [14] показано, что при довольно общих предположениях неограниченное продолжение дробления частиц приводит к логарифмически-нормальному распределению их размеров. Распределение на рис. 1 неплохо соответствует этому закону. Однако следует ожидать, что при ограничении процесса дробления некоторым критическим размером вид предельного распределения должен зависеть от закона дробления.

В настоящей работе для исследования формирования распределения капель применяется модель А.Н. Колмогорова [14], в которой учитывается наличие нижней грани диаметров капель D_{max} , дальше которой дробление прекращается. Рассмотрены существующие модели дробления и предложена эмпирическая модель, с помощью которой воспроизводится универсальное распределение капель, представленное на рис. 1.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим задачу о формировании спектра нефтяных капель, образованных в результате об-

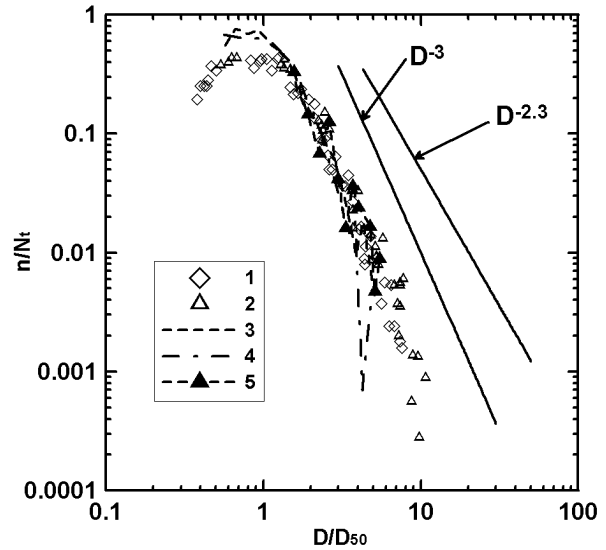


Рис. 1. Экспериментальные распределения нефтяных капель: 1, 2 – [7]; 3, 4 – [8]; 5 – [6]

рушения волны. Предположим, что распределение капель возникает в результате последовательного дробления турбулентностью объема нефти, вовлеченного в воду обрушенной волной, подобно дроблению частиц в турбулентном потоке. Результирующее распределение капель получается как предел последовательных дроблений.

Будем искать плотность распределения капель $n(D, \vec{x}, t)$, где \vec{x} определяет положение капли, а t – время. Тогда процесс эволюции распределения капель можно описать уравнением [15]

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla_{\vec{x}} \cdot (\vec{v}n) = -\frac{\partial}{\partial D}(Rn) + q_b + q_c. \quad (2)$$

Здесь q_b и q_c – скорости изменения функции n из-за дробления и коагуляции; R – скорость изменения диаметра капли из-за растворения; \vec{v} – скорость частицы. Если предположить, что функции \vec{v} и n распределены равномерно в рассматриваемом объеме, и пренебречь процессами растворения, а также коагуляцией капель в результате столкновений, то функция $n(D, t)$ будет удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial n(D, t)}{\partial t} = q_b(D, t), \quad (3)$$

где

$$q_b = \int_D^{\infty} m(D_0)f(D, D_0)g(D_0)n(D_0, t)dD_0 - g(D)n(D, t). \quad (4)$$

Здесь $g(D)$ – частота дробления частицы диаметром D ; $m(D_0)$ – среднее число частиц, образующихся из частицы размером D_0 ; $f(D, D_0)$ –

распределение дочерних частиц от дробления материнской частицы размером D_0 . Таким образом, нахождение распределения частиц $n(D, t)$ сводится к нахождению закона дробления $f(D, D_0)$, частоты дробления $g(D)$ и решению уравнения (3).

2. ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ КОЛМОГорова К ЗАДАЧЕ ОГРАНИЧЕННОГО ДРОБЛЕНИЯ

Следуя [14], будем изучать общее число капель и их распределение по размерам в последовательные дискретные моменты времени, поэтому время t принимает только целые значения. Пусть $N(D, t)$, $t = \overline{1, \infty}$ – число частиц диаметром, меньше D , на момент времени t , $Q(k)$ – математическое ожидание числа частиц размером, меньшим, чем Dk , $k \in [0; 1]$, образованных из одной частицы диаметром D в результате одного дробления.

Здесь предполагается, что функция $Q(k)$, которая, по сути, является законом дробления для каждой отдельной частицы, не зависит от размера этой частицы. При введенных обозначениях можно получить рекуррентную формулу для $N(D, t)$

$$N(D, t + 1) = N(D, t)Q(1) + \int_D^\infty Q\left(\frac{D}{D_1}\right) dN(D_1, t), \quad (5)$$

либо для плотности распределения частиц

$$n(D, t + 1) = \int_D^\infty \frac{1}{D_1} Q'\left(\frac{D}{D_1}\right) n(D_1, t) dD_1. \quad (6)$$

Легко заметить, что соотношение (6) является простейшей разностной аппроксимацией уравнения (3) при условии, что $g(D) \equiv 1$ (то есть одно дробление за один такт) и что $f(D, D_0)$ можно представить в виде

$$f(D, D_0) = \frac{1}{D_0} f^*\left(\frac{D}{D_0}\right). \quad (7)$$

То есть плотность распределения дочерних частиц не зависит от размера материнской капли. Как будет видно далее, многие существующие модели удовлетворяют условию (7).

Таким образом, соотношения (5), (6) могут использоваться для исследования процессов, описываемых уравнением (3).

При данных предположениях можно получить [14], что при достаточно большом времени, с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, отношение

$$N(e^x, t)/N_t \quad (8)$$

будет сколь угодно мало отличаться от

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi B}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{\xi - At^2}{2B^2t}\right) d\xi, \quad (9)$$

а

$$A = \frac{1}{Q(1)} \int_0^1 \ln k dQ(k),$$

$$B^2 = \frac{1}{Q(1)} \int_0^1 (\ln k - A)^2 dQ(k). \quad (10)$$

Данные соотношения получены при ограничениях, что $Q(1)$ конечно и больше единицы, а также, что интеграл

$$\int_0^1 |\ln k|^3 dQ(k) \quad (11)$$

конечен. Из условия (11) следует, что $Q(k)$ должно сильно стремиться к нулю при $k \rightarrow 0$, т. е. невозможно образование частицы нулевого размера при дроблении.

Полученное распределение (9) неприменимо для задачи формирования установившегося распределения, так как его параметры зависят от времени, т. е. процесс дробления никогда не прекращается, и не существует предельного стационарного распределения.

Чтобы остановить процесс дробления, введем параметр D_{\max} – максимальный диаметр частицы, которая может раздробиться. Это означает, что частицы размера меньше D_{\max} не будут дробиться, и через достаточно большое время на интервале $[0, D_{\max}]$ образуется стационарное распределение. Находим, что в таком случае распределение частиц задается рекуррентным соотношением

$$N(D, t + 1) = \begin{cases} N(D, t) + \int_{d_{\max}}^\infty Q\left(\frac{D}{D_1}\right) dN(D_1, t), & D < D_{\max}; \\ N(D_{\max}, t)(1 - Q(1)) + N(D, t)Q(1) + \int_{d_{\max}}^\infty Q\left(\frac{D}{D_1}\right) dN(D_1, t), & D > D_{\max}. \end{cases} \quad (12)$$

Либо, перейдя от функции распределения $N(D, t)$ к плотности распределения $n(D, t)$, получим фор-

мулу:

$$n(D, t + 1) = \begin{cases} n(D, t) + \int_{D_{\max}}^{\infty} \frac{1}{D_1} Q' \left(\frac{D}{D_1} \right) n(D_1, t) dD_1 & D < D_{\max}, \\ \int_{D_{\max}}^{\infty} \frac{1}{D_1} Q' \left(\frac{D}{D_1} \right) n(D_1, t) dD_1, & D > D_{\max}. \end{cases} \quad (13)$$

Если в начальный момент времени отсутствуют капли меньше критического размера, т. е. $n(D, 0) \equiv 0$ при $D < D_{\max}$, то образующееся предельное распределение можно представить в виде ряда

$$n(D) = \sum_{t=0}^{\infty} \int_{D_{\max}}^{\infty} \frac{1}{D_1} Q' \left(\frac{D}{D_1} \right) n(D_1, t) dD_1, \quad (14)$$

где $Q'(\xi)$ означает производную от функции Q по своему аргументу. В частности, если закон дробления имеет степенной вид ($Q(k) = Ck^\alpha$), то очевидно, что предельное распределение представится в виде

$$n(D) = C\alpha D^{\alpha-1} \sum_{t=0}^{\infty} \int_{D_{\max}}^{\infty} \frac{n(D_1, t)}{D_1^\alpha} dD_1. \quad (15)$$

То есть если закон дробления представить в виде степенной функции, то и результирующее распределение будет такой же степенной функцией с точностью до постоянного множителя, причем независимо от эволюции спектра частиц на интервале $[D_{\max}, \infty]$.

Если же предположить, что при $D > D_{\max}$ дробление происходило достаточно долго и согласно модели Колмогорова успело установиться логарифмически-нормальное распределение (9), то при произвольном законе дробления предельное распределение можно выразить формулой

$$n(D) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}B} \sum_{t=0}^{\infty} \int_{D_{\max}}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{t}D_1^2} \times \exp \left(-\frac{(\ln D_1 - At)^2}{2B^2t} \right) Q' \left(\frac{D}{D_1} \right) \right] dD_1. \quad (16)$$

Дальнейшее исследование должно заключаться в нахождении закона дробления $Q(k)$ в уравнениях (12), (13) или $f(D, D_0)$ в уравнении (3).

3. МОДЕЛИ ДРОБЛЕНИЯ ЧАСТИЦ

В работе [15] приведен достаточно полный обзор существующих на сегодняшний день моделей дробления. Все модели можно разделить на три класса: статистические модели, феноменологические модели, основанные на изменении поверхностной энергии дробящейся частицы, и гибридные модели, основанные на комбинации предыдущих двух. Наша задача будет заключаться в нахождении таких моделей, которые давали бы предельные распределения, схожие с экспериментами. Сначала будут рассмотрены модели, наиболее известные из существующих, законы дробления которых имеют принципиальные различия, а затем предложено новое соотношение, позволяющее корректно описать эксперименты.

3.1. Модель [16]

Модель [16] учитывает распределение энергии среди турбулентных вихрей разных масштабов. Авторы предположили, что каждая дробящаяся капля состоит из конечного числа элементарных объемов и объем каждой дочерней капли кратен этому элементарному объему. Вероятность образования капли данного размера предполагалась пропорциональной кинетической энергии, заключенной в вихре данного размера. После оценки кинетической энергии с помощью энергетического спектра Гейзенберга, результирующее распределение хорошо аппроксимировалось формулой

$$f^*(D/D_0) = \frac{\Gamma(12)}{\Gamma(3)\Gamma(9)} \left(\frac{D}{D_0} \right)^8 \left(1 - \frac{D}{D_0} \right)^2, \quad (17)$$

где Γ – Гамма-функция. Распределение (17) получено из предположения, что капля дробится на три дочерние капли. Данная модель предсказывает наибольшую вероятность образования капель равного размера ($D/D_0 \approx 0.8$). График этого распределения изображен на рис. 2, а.

3.2. Модель [17]

В [17] авторы предположили, что капля при дроблении раздваивается ($m(D_0) = 2$) и вероятность образования капли размером D_1 обратно пропорциональна энергии, необходимой для разрыва материнской капли размером D_0 на каплю D_1 и $D_2 = D_0(1 - D_1/D_0)^{1/3}$. Эта энергия пропорциональна увеличению площади поверхности в результате разрыва:

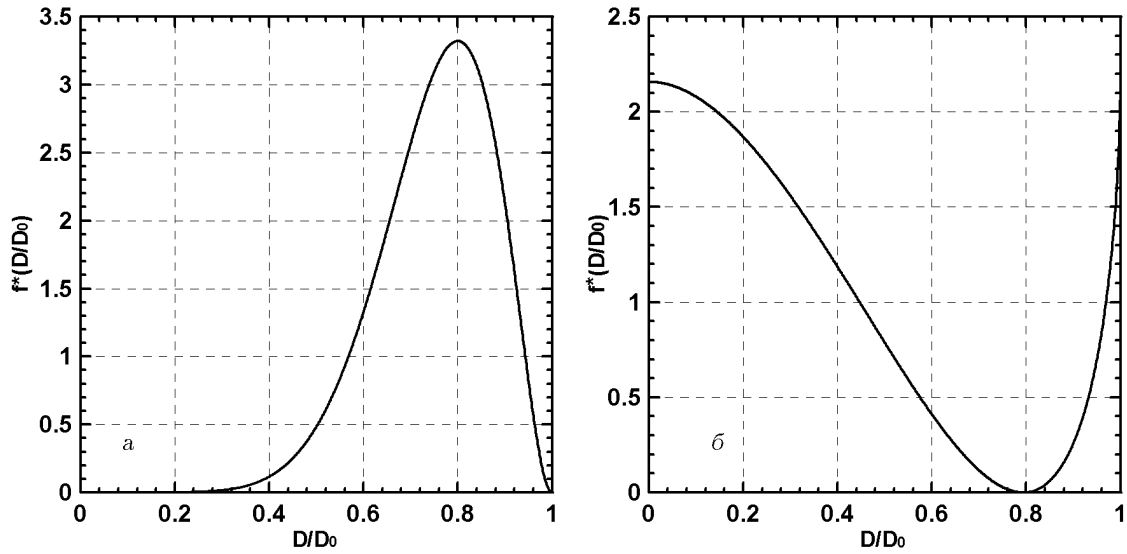


Рис. 2. Безразмерные распределения дочерних частиц: а – [16], б – [17]

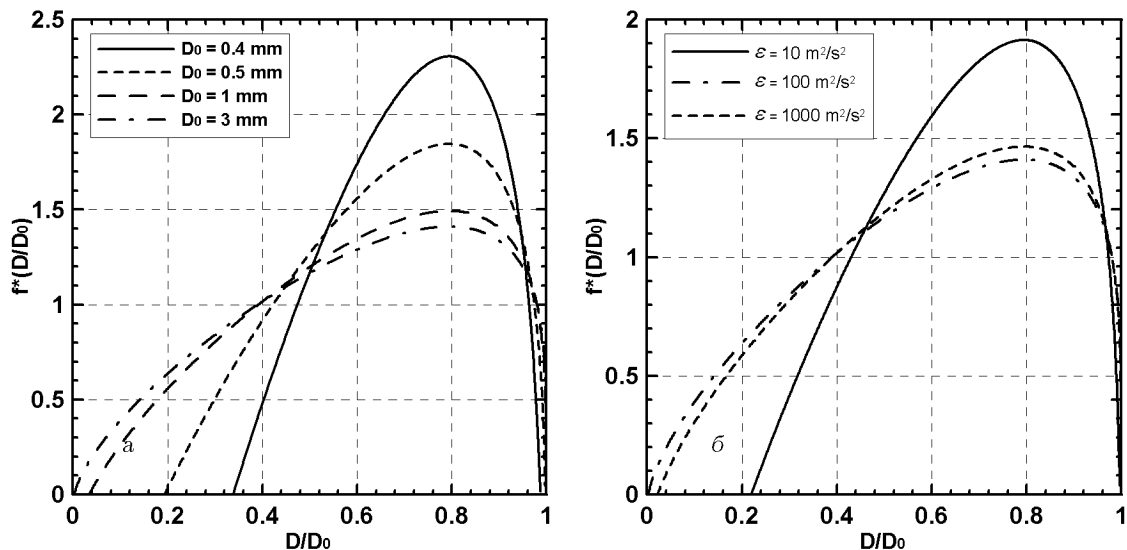


Рис. 3. Безразмерные распределения дочерних частиц для модели [15]:

а – зависимость распределения от размера материнской капли: для каждой кривой $\epsilon = 1000 \text{ м}^2 \text{ с}^{-3}$, $\gamma = 0.072 \text{ Н/м}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$; б – зависимость распределения от скорости диссипации: для каждой кривой $D_0 = 3 \text{ мм}$, $\gamma = 0.072 \text{ Н/м}$, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$

$$\epsilon(D_1) = \pi \sigma D_1^2 + \pi \sigma D_2^2 - \pi \sigma D_0^2. \quad (18)$$

Выражение (18) достигает максимума при $(D_1 = D_2 = D_0/2^{1/3})$. С приведенными выше предположениями плотность распределения дочерней капли можно выразить формулой

$$f(D, D_0) = \frac{\epsilon_{\max} - \epsilon(D)}{\int_{D_{\min}}^{D_0} [\epsilon_{\max} - \epsilon(D)] dD}. \quad (19)$$

Это распределение, напротив, предсказывает не-

возможность раздробиться на две равные части. График распределения (19) представлен на рис. 2, б.

3.3. Модель [15]

Эта модель основана на предположении, что вероятность образования частицы размером D_1 пропорциональна разнице между турбулентными напряжениями на расстоянии D_1 и силами, удерживающими частицу D_0 от дробления. Предполагая, что дробление происходит на две частицы, можно

получить распределение дочерних капель [15]:

$$f^*(D^*) = \frac{\left[D^{*\frac{2}{3}} - \Lambda^{\frac{5}{3}} \right] \left[(1 - D^{*3})^{\frac{2}{9}} - \Lambda^{\frac{5}{3}} \right]}{\int_{D_{\min}^*}^{D_{\max}^*} \left[D^{*\frac{2}{3}} - \Lambda^{\frac{5}{3}} \right] \left[(1 - D^{*3})^{\frac{2}{9}} - \Lambda^{\frac{5}{3}} \right] d(D^*)} \quad (20)$$

Здесь введены обозначения: $D^* = D_1/D_0$; $\Lambda = D_{\max}/D_0$; D_{\max} – критический диаметр, определяемый как $D_{\max} = c(\gamma/(\rho))^{3/5}\epsilon^{-2/5}$; γ – коэффициент поверхностного натяжения; ρ – плотность воды; ϵ – скорость диссипации энергии турбулентности; c – экспериментальная константа. Надо заметить, что распределение (20) существенно зависит от размера материнской капли, а также от скорости диссипации, что в действительности наблюдается в экспериментах. График этого распределения и зависимость его от размера материнской капли и скорости диссипации энергии турбулентности приведен на рис. 3.

3.4. Логарифмически-нормальная модель

Исходя из вида экспериментальных распределений (рис. 1) и результатов предыдущего раздела, будем искать плотность распределения вероятностей дочерних капель $f^*(D^*)$ среди плотностей логнормальных распределений с неизвестными параметрами a и σ :

$$f^*(k) = \frac{M}{\sqrt{2\pi}\sigma k} \exp\left(-\frac{(\ln k - a)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (21)$$

Здесь $k \in [0; 1]$, а константа M находится из условия сохранения объема:

$$M = \left[\int_0^1 k^3 f^*(k) dk \right]^{-1}. \quad (22)$$

Для распределения (21) характерна высокая вероятность образования большого количества мелких капель (фрагментов) и малая вероятность появления больших дочерних капель. В численных экспериментах параметры a и σ подбирались таким образом, чтобы полученное предельное распределение соответствовало экспериментальным данным.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

Для рассмотренных моделей расчеты проводились по рекуррентным соотношениям (13), полагая

$$dQ(k) = f^*(k)dk. \quad (23)$$

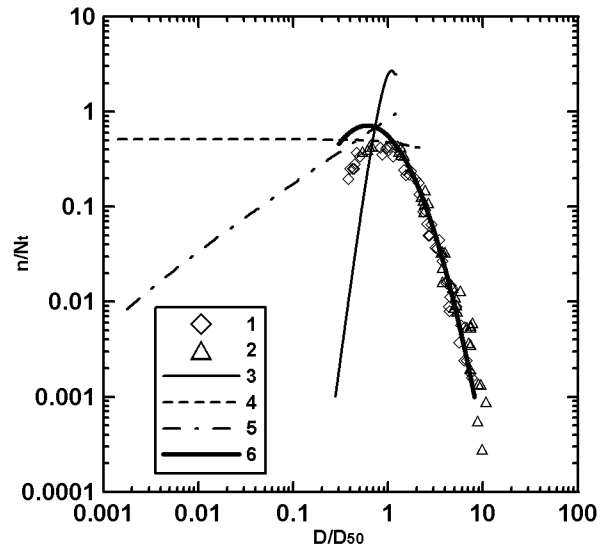


Рис. 4. Сравнение результатов моделирования: 1, 2 – экспериментальные данные [7]; 3 – модель [16]; 4 – модель [17]; 5 – модель [15]; 6 – логарифмическая модель

Результаты моделирования с использованием моделей (17), (19)–(21) представлены на рис. 4. Из графика видно, что ни одна из моделей [15–17] не приводит к предельному распределению, похожему на экспериментальное. Вероятно, это происходит потому, что в представленных моделях дробление осуществлялось на две или три части, в то время как в действительности, по-видимому, капли нефти разрываются на большее количество маленьких фрагментов. В этой связи более оправданным выглядит использование логнормального распределения в качестве закона дробления капель.

На рис. 5 приведено сравнение с экспериментальными данными функции распределения, полученной с помощью модели (21). Здесь собраны лабораторные и натурные эксперименты, представленные в работах [6–8]. На графике, построенном в вероятностной шкале, отчетливо виден логарифмически-нормальный характер распределений для всех собранных экспериментов. Для наилучшего совпадения в модели (21) выбирались параметры $a = -2.1$, $\sigma = 0.72$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной работе предложена модель для исследования формирования спектра частиц при дроблении. Модель основана на известном подходе [14] и позволяет описывать формирование стационарных распределений как предельный слу-

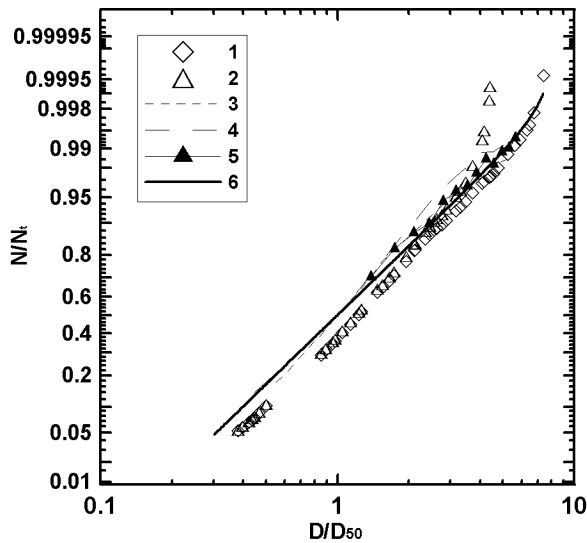


Рис. 5. Сравнение результатов, полученных моделью (21), с экспериментальными функциями распределения:
 1, 2 – экспериментальные данные [7]; 3, 4 – модель [8];
 5 – модель [6]; 6 – логарифмическая модель

чай непрерывного дробления при наличии нижней грани размеров дробящихся частиц. Выведены рекуррентные соотношения, описывающие эволюцию распределения во времени. Получено аналитическое распределение капель в предположении о степенном виде функции распределения дочерних капель и выведено соотношение, позволяющее оценить предельное распределение для произвольного закона дробления. Предложена новая модель дробления капель, позволяющая получить наблюдаемое в экспериментах распределение капель. Результаты работы могут быть использованы также для исследования формирования спектра пузырьков воздуха при обрушении волны.

Автор выражает благодарность докт. физ.-мат. наук В.С. Мадеричу за научное руководство и полезные советы. Настоящая работа выполнена в рамках проекта INTAS N 01-0330.

1. Turrell W.R. Modelling the Braer oil spill - A retrospective view. // Marine Pollution Bulletin.- 1994.- **28**.- P. 211-218.
2. ASCE Task Committee on Modelling of Oil Spills of the Water Resources Engineering Division State of art review of modeling transport and fate of oil spills. // J. Hydraulic Eng.- 1996.- **122** N 11.- P. 594-609.
3. Reed M., Johansen O., Brandvik P. J., Daling P., Lewis A., Fiocci R., Mackay D., Prentki R. Oil spill modeling towards the close of the 20th century:

Overview of the state of art. // Spill Science & Technology Bulletin.- 1999.- **5** N 1.- P. 3-16.

4. IPIECA Dispersants and their role in oil spill response.- IPIECA Report Ser. Vol. 5: London IPIECA, 2001.- 40 p.
5. Delvigne G. A. L., Sweeney C. E. Natural dispersion of oil. // Oil and Chemical Pollution.- 1988.- **4**.- P. 261-310.
6. Tan S.K., Yao A.F. Recognition and measurement of dispersed oil droplets in water column // Journal of Hydraulic Research.- 2001.- **39**, N 1.- P. 99-103.
7. Khelifa A., Stoffyn-Egli P., Hill P.S., Lee K. Characteristic of Oil Droplets Stabilized by Mineral Particles: Effects of Oil Type and Temperature // Spill Science & Technology Bulletin.- 2002.- **8**, N 1.- P. 19-30.
8. Lunel T. Disperion: oil drop size measurenet at sea // Proc. 16th Arctic Marine Oil Spill (AMOP).- Ottawa, Canada, Environment Canada, 1993.- P. 1023-1056.
9. Колмогоров А.Н. О дроблении капель в турбулентном потоке // ДАН СССР.- 1949.- **66**, N 5.- С. 825-828.
10. Hinze J.O. Fundamentals of the hydrodynamic mechanism of splitting in dispersion processes. // AIChE J.- 1955.- **41**.- P. 289-295.
11. Muzzio F.J., Tjahjadi M., Ottino J.M. Self-similar drop-size distributions produced by break-up in chaotic flows. // Physical Review Letters.- 1991.- **67** (1).- P. 54-57.
12. Li M., Garrett C. The relationship between oil droplet size and upper ocean turbulence. // Marine Pollution Bulletin.- 1998.- **36**, N12.- P. 961-970.
13. Мадерич В.С., Бровченко И. А. Влияние обрушения ветровых волн на структуру приповерхностного слоя турбулентного слоя // Прикл. гидромеханика.- 2003.- **77**, N 3.- С. 51-57.
14. Колмогоров А.Н. О логарифмически нормальном законе распределения размеров частиц при дроблении // ДАН СССР.- 1941.- **31**.- С. 99-101.
15. Lasheras J.C., Eastwood C., Martinez-Bazán C., Montañés A review of statistical models for break-up of an immisible fluid immersed into a fully developed turbulent flow. // International Journal of Multiphase Flow.- 2002.- **28**.- P. 247-278.
16. Konno M., Matsunagi Y., Arai K., Saito S. Simulations model for break-up process in an agitated tanks. // J. Chem. Eng. Jpn.- 1980.- **16**.- P. 312-319.
17. Tsouris C., Tavlarides L. L. Breakage and coalescence models for drops in turbulent dispersions // AIChE J.- 1994.- **40**.- P. 395-406.
18. Martinez-Bazán C., Montañés, Lasheras J.C. On the break-up of an air bubble injected in fully developed turbulent flow. Pt. I. Break-up frequency // J. Fluid Mech.- 1999.- **401**.- P. 157-182.
19. Martinez-Bazán C., Montañés, Lasheras J.C. On the break-up of an air bubble injected in fully developed turbulent flow. Pt. II. Size pdf of the resulting daughter bubbles // J. Fluid Mech.- 1999.- **401**.- P. 183-207.
20. Garrett C., Li M., Farmer D. The connection between Bubble Size Spectra and Energy Dissipation Rates in the Upper Ocean. // J. Phys. Oceanogr.- 2000.- **30**.- P. 2163-2171.