 ISSN 1561-9087 Прикладна гідромеханіка. 2004. Том 6 (78), N 1. С. 69 – 72

УДК 532.528

ИМПУЛЬСНОЕ ДВИЖЕНИЕ КРОВИ В АКТИВНО-УПРУГОМ КРОВЕНОСНОМ СОСУДЕ

В. И. МЕРКУЛОВ

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

Получено 10.06.2003

В работе рассматривается движение крови по крупным артериальным сосудам. Импульсное движение крови по упругому сосуду моделируется телеграфным уравнением. Привлечение феномена Бейсселя-Остроумова, который состоит в зависимости давления от скорости деформации сосуда, позволило объяснить рост амплитуды пульсовой волны по мере удаления от сердца. Аналитическое решение хорошо согласуется с экспериментальными результатами других авторов. Полученные результаты могут быть использованы как для целей диагностики работы кровеносной системы, так и для целей протезирования сосудов.

У роботі розглядається рух крові по великих артеріальних судинах. Імпульсний рух крові по пружній судині моделюється телеграфним рівнянням. Залучення феномену Бейсселя-Остроумова, який полягає в залежності тиску від швидкості деформації судини, дозволило пояснити зростання амплітуди пульсової хвилі при віддаленні від серця. Аналітичний розв'язок добре узгоджується з експериментальними результатами інших авторів. Одержані результати можуть бути використані як з метою діагностики кровоносної системи, так і з метою протезування судин.

Dlood motion in big arterial vessels in considered in the work. The impulse motion of blood in the elastic vessel is modelled by the telegraph equation. Appication of the Bessel-Ostroumov phenomenon consisting in dependence of the pressure on the vessel defermation velocity allows to explain increasing the pulse wave amplitude with moving off from a heart. An analytical solution is in good agreement with experimental results of other authors. Jdtained results may be used both for diagnostics of the circulatory system and for prosthesis of the vessels.

ВВЕДЕНИЕ

Система кровообращения для каждого живого организма является важнейшей системой, нормальное или патологическое функционирование которой определяет нормальное или патологическое функционирование всего организма.

Механике кровообращения посвящено большое количество научных работ и монографий. Достаточно полное изложение проблемы и обширную библиографию можно найти в [1–3].

Нас в этих книгах интересуют особенно те аспекты проблемы, которые, по мнению авторов, не получили достаточного объяснения.

В монографиях [3, 4] излагается теория пульсового движения крови в сосудах и приводятся экспериментальные данные по распространению пульсовой волны вдоль сосудистого русла. Обращает на себя внимание то, что по мере продвижения волны по всем крупным артериям и аортам – восходящей аорте, грудной аорте, брюшной аорте, бедренной артерии, большой подкожной артерии – амплитуда пульсовой волны возрастает почти в два раза, а среднее давление сохраняется на входном уровне. Это тем более удивительно, что волна на своем пути несколько раз проходит точку бифуркации, последовательно переходит в сосуды меньшего диаметра.

Стенки крупных кровеносных сосудов, кроме эластичных материалов, включают в себя мышечные волокна. Их функция в работе сердечно-сосудистой системы особенно важна, если учесть, что потребление кислорода этими мышцами, которое определяет их энергетику, на порядок превосходит потребление кислорода скелетной мускулатурой в покое [5].

Обычно роль сосудистых гладких мышц сводят к управляемому изменению упругости стенок сосудов, что называют тонусом. Легко понять, что упругость стенок сосудов, независимо от того, является она управляемой или неуправляемой, не меняет энергетику процесса кровотока и не способна поднять амплитуду импульсной волны.

В попытках объяснить эффект увеличения амплитуды пульсовой волны мы обратили внимание на открытый сто лет назад эффект, который получил название феномен Остроумова-Бейсселя [6]. Он состоит в том, что на быстрое растяжение гладкие мышцы реагируют повышением напряжения. Этот механизм наблюдается даже в отсутствии нервных волокон и, следовательно, не требует участия нервной системы.

1. ФИЗИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение несжимаемой жидкости, в данном случае крови, по трубке, стенки которой способны растягиваться под действием внутреннего давления и сжиматься не только под действием упругих сил, но и под действием гладких мышц, включенных в стенки кровеносного сосуда.

В отличие от упругой силы, которая по величине и фазе определяется величиной и фазой деформации, величина и фаза сокращения мышечных волокон может иметь другие значения, что и определяет ее активную функцию.

При этом движение крови будет вызываться не только действием перепада давления, в рассматриваемом случае импульсного перепада давления, но и под действием ответной деформации стенок сосуда. Кровь будет рассматриваться как ньютоновская вязкая, несжимаемая жидкость, текущая в ламинарном режиме.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА

В кровеносном сосуде выделим элементарную струйку тока по направлению движения крови. Вектор скорости, ориентированный вдоль струйки, обозначим w, площадь поперечного сечения элементарной струи – через df, плотность крови – через ρ.

Количество жидкости, которое протекает через рассматриваемое сечение, будет

$$dM = \rho\, w df.$$

Буквой p обозначим давление в текущей точке струи.

Уравнение импульса вдоль струи запишется так:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho w df) = -df\frac{\partial p}{\partial x} - 2a\rho w df. \qquad (1)$$

Здесь $2a = \dfrac{32\nu}{d^2}$ – постоянный для ламинарного течения коэффициент, определяющий гидравлическое сопротивление для жидкости с кинематической вязкостью ν, текущей в канале диаметром d.

В уравнении (1) опущено слагаемое $\dfrac{\partial}{\partial x}(\rho w^2 df)$, что соответствует малости динамического давления по сравнению со статическим давлением $p(x,t)$, которое считается независящим от поперечной координаты.

Для этой же струйки должно выполняться уравнение неразрывности

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho df) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho w df) = 0. \qquad (2)$$

Суммируя по всему сечению соотношения (1) и (2), получаем следующие дифференциальные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t}M = -f\frac{\partial p}{\partial x} - 2aM, \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho f) + \frac{\partial}{\partial x}M = 0, \qquad (4)$$

где $M = \int \rho w\, df$ – массовый расход.

Приведенная система уравнений использовалась в монографии Чарного [7].

Для замыкания системы уравнений (3), (4) необходимо указать связь между изменением площади поперечного сечения и давлением. В пассивном упругом сосуде эта связь определяется законом Гука, который для малой деформации записывается так: $p = \dfrac{K}{f_0}f$. Здесь f_0 – среднее значение площади поперечного сечения, K – его жесткость на растяжение.

Для активно-упругого сосуда нужно указать связь между скоростями изменения давления и площади поперечного сечения в соответствии с феноменом Остроумова-Бейсселя и законом Гука:

$$2\beta p = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K}{f_0}f - p\right). \qquad (5)$$

Коэффициент 2β определяет ту долю давления, которая вызывается работой сосудистой мускулатуры и подлежит определению по экспериментальным данным.

С использованием соотношения (5) линеаризованные уравнения (3), (4) запишутся так:

$$\frac{\partial}{\partial t}M = -f_0\frac{\partial p}{\partial x} - 2aM, \qquad (6)$$

$$\frac{f_0}{c^2}\left(\frac{\partial p}{\partial t} - 2\beta p\right) + \frac{\partial}{\partial x}M = 0. \qquad (7)$$

Здесь использовано обозначение $c^2 = K/\rho$.

Перекрестным дифференцированием исключим из системы уравнений (6), (7) давление и получим одно уравнение для массового расхода:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} + 2(a-\beta)\frac{\partial M}{\partial t} - 4a\beta M = 0. \qquad (8)$$

Исключая массовый расход, получим такое же уравнение для давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} - c^2\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + 2(a-\beta)\frac{\partial p}{\partial t} - 4a\beta p = 0. \qquad (9)$$

Уравнение (8) является хорошо изученным телеграфным уравнением.

Введя в рассмотрение безразмерные независимые переменные $\xi = x/l$, $\tau = t/T$, мы сможем получить уравнение в безразмерной форме:

$$\frac{\partial^2 M}{\partial \tau^2} - C^2 \frac{\partial^2 M}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial M}{\partial \tau} - AM = 0 \qquad (10)$$

и аналогичное уравнение для давления:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - C^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial p}{\partial \tau} - Ap = 0. \qquad (11)$$

Здесь $C = \dfrac{cT}{l}$ – безразмерная скорость распространения пульсовой волны; $B = T(a - \beta)$ – логарифмический декремент затухания (нарастания) волны; $A = 4a\beta T^2$.

3. ПЕРИОДИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В АРТЕРИАЛЬНОМ РУСЛЕ

Идентификация выбранной математической модели требует выбора входящих в нее параметров по условию согласования результатов вычисления и наблюдения. Если работу сосудистой мускулатуры приравнять работе сил вязкости, то это позволит определить параметр $B = 0$, $\beta = a$. При этом уравнение для волны давления приобретет вид

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - C^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} - Ap = 0.$$

Периодическое решение этого уравнения можно искать в виде

$$p(\xi\tau) = P(\xi)\sin\omega\tau, \;\; \omega = 2\pi.$$

Уравнение для амплитудной функции запишется так:

$$P'' + k^2 P = 0,$$

где $k^2 = \dfrac{A + \omega^2}{C^2}$.

В свою очередь, решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$P(\xi) = e\sin k\xi + b\cos k\xi$$

и входящие сюда постоянные коэффициенты могут быть выражены через амплитудные значения давления и градиента давления на входном конце сосуда:

$$b = P(0) = P_0, \quad e = \frac{1}{k}\frac{d\,P_0}{d\xi}.$$

Нерегистрируемый в эксперименте входной градиент давления с помощью уравнения импульса выразим через регистрируемую величину массового расхода.

Уравнение импульса в пренебрежении вязких сил в безразмерной форме запишется так:

$$\frac{1}{T}\frac{\partial}{\partial \tau} M = -\frac{f_0}{l}\frac{\partial p}{\partial \xi}.$$

Учитывая временные зависимости

$$M = M_0 Cos\omega\tau, \;\; \frac{\partial p}{\partial \xi} = \frac{dP}{d\xi}\sin\omega\tau,$$

получаем

$$P(\xi) = \frac{l\omega M_0}{T f_0 k}\sin k\xi + P_0\cos k\xi. \qquad (12)$$

Исходные данные для числового примера возьмем из монографии [3] применительно к кровеносной системе собаки.

В теории импульсного движения крови используется безразмерный параметр Уомерсли [3]:

$$\alpha = \frac{1}{2} d\sqrt{\frac{2\pi}{\nu T}},$$

где d – диаметр кровеносного сосуда; T – период пульсационного течения; ν – кинематическая вязкость крови.

Коэффициент гидравлического сопротивления, который входит в уравнения (8), (9), может быть выражен через параметр Уомерсли следующим образом:

$$a = \frac{16\nu}{d^2} = \frac{4\omega}{\alpha^2} = \frac{8\pi}{\alpha^2 T}.$$

Параметр Уомерсли для различных участков артериального русла имеет значения в интервале 3.5 – 12. Для определения закона распространения волны давления нет необходимости знать численное значение параметра Уомерсли, достаточно знать, что для крупных кровеносных сосудов он имеет значение значительно больше единицы. Из этого будет следовать малость гидравлического сопротивления по сравнению с силами инерции. То же самое относится к скорости распространения пульсовой волны – литературные источники указывают значения от 8 до 10 м/с в зависимости от тонуса сосудистой системы.

Для других параметров выберем такие значения:

$$T = 0.4\text{с}, \;\; C = 10\text{м/с},$$

$$l = 0.4\text{м}, \;\; M_0/f_0 = 600\,\text{кг/м}^2\text{с}, \;\; P_0 = 5300\,N/\text{м}^2.$$

По этим данным, применяя формулу (12), находим $P(1) = 1.47P_0$. По литературным данным [3] артериальное давление в подкожной артерии собаки в полтора раза больше давления сердечного выброса. Как видим, принятая математическая модель в предположении $\beta = \alpha$ позволяет получить удовлетворительное согласие с наблюдением.

Заметим, что для получения закона изменения массового расхода требуется знание численных значений как гидравлического сопротивления, так и скорости распространения волны. И так как для этих параметров указывается широкий диапазон, то закон изменения массового расхода не может быть использован для идентификации модели.

Полезно сравнить полученное решение с законом распространения периодической волны по пассивному упругому каналу. Такое движение описывается тем же уравнением (11):

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - C^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} + 2B \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0,$$

при значении параметров $B = Ta$, $\beta = 0$. Как известно [8], решение такого уравнения имеет следующий вид: $\exp(-aT\tau)\, p(\tau, \xi)$, где функция $p(\tau, \xi)$ является решением волнового уравнения без диссипативного члена

$$\frac{\partial^2 p}{\partial \tau^2} - C^2 \frac{\partial^2 p}{\partial \xi^2} = 0,$$

которое описывает незатухающие колебания.

Отсюда можно видеть, что в то время как активно-упругий кровеносный сосуд обеспечивает незатухающие колебания, течение в пассивном упругом сосуде сопровождается затуханием амплитуды по экспоненциальному закону.

Чтобы определить количественно величину затухания, рассмотрим некоторый пример. Для этого выберем среднее значение параметра Уомерсли, равное 8. По нему определим величину $aT = 0.4$ и величину уменьшения амплитуды волны за период $\exp(-aT) = 0.67$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты позволяют лучше понять активную роль сосудов в работе всей сердечно-сосудистой системы.

Удается лучше понять как отличия в морфологии стенок артериальных и венозных сосудов приводят к различной их функции в механики кровообращения. В свою очередь это позволяет глубже решать вопросы, связанные с диагностикой работы сердечно-сосудистой системы и с протезированием ее элементов.

1. *Физиология кровообращения* Физиология сосудистой системы.– Л: Наука, 1984.– 643 с.
2. *Павловский Ю.Н., Регирер С.А., Скобелева И.М.* Гидродинамика крови, в кн. Гидродинамика.– М.: ВИНИТИ, 1968.– 280 с.
3. *Каро К., Педли Е., Шротер Р., Сид У.* Механика кровообращения. Пер. с англ.– М.: МИР, 1982.– 624 с.
4. *McDonald D. A.* Blood flow in arteries.– Baltimore: Williams, Wilkins, 1974.– 496 p.
5. *Lehninger A. L.* The metabolism of the arterial wall. –In the arterial wall.– Baltimore: Williams, Wilkins, 1959.– 220–246 p.
6. *Орлов Р. С., Попов С. В.* Влияние растяжения на сократительные ответы гладкой мускулатуры изолированной воротной вены // Физиолог. Журн. СССР.– 1977.– т. 63, 2.– С. 303-312.
7. *Чарный И.М.* Неустановившееся движение реальной жидкости в трубах.– М.: Недры, 1975.– 296 с.
8. *Смирнов В.И.* Курс высшей математики.– М-Л: ГИТТЛ, 1952, т. 2.– 628 с.