

УДК 532.59

# ЛІНІЙНА ЗАДАЧА ПРО СТАЦІОНАРНИЙ РУХ ВИХОРА У СТРАТИФІКОВАНОМУ СЕРЕДОВИЩІ СТАДІЇ ЇЇ ЕВОЛЮЦІЇ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 15.07.2003

Представлена постановка лінійних задач визначення поля збурень, викликаних рівномірним рухом прямолінійної вихорової нитки (плоского точкового вихора) в ідеальній стратифікованій рідині. Одержано рівняння для функції течії збуреного руху, яке в явному вигляді містить характеристики рухомого вихора. В якості ілюстрації одержано розв'язок відповідної задачі для випадку нескінченного лінійностратифікованого середовища.

Представлена постановка линейных задач определения поля возмущений, вызванных равномерным движением прямолинейной вихревой нитки (плоского точечного вихря) в идеальной стратифицированной жидкости. Получено уравнение для функции тока возмущенного движения, содержащее в явном виде характеристики движущегося вихря. В качестве иллюстрации получено решение соответствующей задачи в случае бесконечной линейностратифицированной среды.

This article presents definition of linear problems relating to determining field disturbances produced by uniform horizontal movement of a vortex line (point vortex) in the ideal stratified fluid. An equation has been derived for the function of the flow of disturbed movement which actually possesses characteristics of a moving vortex. The solution obtained for a respective problem illustrates the case of infinite linear stratified medium.

## ВСТУП

Дослідження руху вихорів в ідеальних середовищах включає значну кількість схем, які можна відносити або до динаміки вільних вихрових структур, або до динаміки їхніх вимушених рухів. У першому випадку характер еволюції вихрової структури визначається фізикою руху її складових та динамікою їхньої взаємодії без або при наявності тих чи інших границь області рідкого середовища. Цей клас задач складає, по суті, те, що прийнято називати динамікою вихрових структур. Детальний аналіз виконаних у цьому напрямку робіт можна знайти в [1]. Вивчення вимушених вихрових рухів пов'язане, головним чином, з потребами динаміки руху плоских тіл. Задача про вимушений рух точкового вихора (або вихороджерела) є визначальною в класі лінійних задач про рух таких тіл, зокрема, при наявності границь розділу середовищ. Огляд робіт цього напрямку зроблений у [2].

Починаючи з фундаментальної роботи М.Є.Кочина [3], у задачах про рух вихорів враховують стратифікацію середовища. Для вільних вихорів розглядалися дві характерні ситуації – коли вісі вихорів або паралельні напрямку дії гравітаційних сил (вертикальні вихори [4,5]), або перпендикулярні до нього (горизонтальні вихори [6–8]).

Для вертикально орієнтованих вихрових систем сформульовано нелінійну задачу для півпростору у випадках нестисливої рідини ( $\rho(x, y, z, t) =$

$= \text{const}$  для кожної окремої частинки) та для ідеального стисливого газу, коли для кожної окремої частинки зберігається ентропія  $e = p/\rho^\kappa$  (баротропне середовище). Тут, як звично,  $p(x, y, z, t)$  – тиск;  $\rho(x, y, z, t)$  – густина;  $\kappa$  показник адиабати [4]. Одержано розв'язки лінійних задач про внутрішні хвилі, які генеруються потенціальними вихорами, зосередженими у вертикальному циліндрі, або прямолінійною вихровою ниткою [5].

У випадку горизонтально орієнтованих вільних вихорів лише в одному випадку баротропної рідини, коли  $\rho(z) = \rho_0 z^2$  та за умови, що характерний період Брента-Ваясяля середовища значно більший характерного часу адвекційного переносу, обумовленого дією вихора, коли виштовхувальна відновлююча сила діє дуже повільно і можна знехтувати генерацією внутрішніх хвиль, побудовано розв'язок задачі про взаємодію двох вихорів [8]. Подібно до випадку однорідної рідини використано апарат гамільтонового формалізму. Встановлено характерну особливість впливу стратифікації – наявність сталої горизонтальної складової швидкості, яка має місце у випадку точкового вихора [6, 7].

Лінійні задачі про вимушений стаціонарний рух горизонтально орієнтованих вихорів у стратифікованих середовищах практично у всіх роботах розглянуто для шаруватої стратифікації, коли густина рідини стрибкоподібно змінюється на границях однорідних шарів [3, 9–11]. Для розв'язання цього класу задач вводяться комплексні швидкості та

застосовується інтегральне перетворення Фур'є з подальшим використанням апарату теорії лишків. У роботі [10] одержано розв'язок задачі руху комбінації вихора і джерела маси (вихороджерела) для довільної кількості шарів, швидкість рідини в кожному з яких є сталою, хоч і може бути різною для різних шарів.

Для середовищ з неперервним розподілом густини можна відмітити лише роботу [12], де знайдено розв'язок задачі про рівномірний рух вихора в лінійностратифікованій безмежній рідині, та [13], де експериментально та шляхом чисельного інтегрування системи нелінійних рівнянь досліджено вертикальний рух вихорового кільця через неперервно стратифікований шар скінченної товщини.

Розв'язок роботи [12] одержано, використовуючи інтегральні представлення поздовжньої складової збуреної швидкості для диполя потужності  $P$ , орієнтованого в напрямку швидкості руху:

$$u = \frac{P(x^2 - z^2)}{x^2 + z^2} = P \int_0^{\infty} k e^{-k|x|} \cos(kz) dk, \quad (1)$$

та цієї ж складової, генерованої вихором потужності  $\Gamma$  в однорідному середовищі:

$$u = -\frac{\Gamma z}{2\pi(x^2 + z^2)} = -\frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-k|x|} \sin(kz) dk. \quad (2)$$

Розв'язок задачі знаходиться таким, щоб граничний перехід від вихорового до потенціального обтікання вихора задовольняв розв'язок для диполя (1) в околі центра вихора та розв'язок (2) далеко від вихора.

Однак таким шляхом практично неможливо знайти розв'язки задач для більш складних профілів стратифікації та ще і при наявності твердих границь середовища через відсутність там таких простих асимптотик, як (1) та (2). Мабуть, саме про це свідчить той факт, що з часу опублікування роботи [12] більше не відомо досліджень про рух вихорів у неперервно стратифікованих середовищах.

У даній роботі одержано рівняння для функції течії, яке описує збурений рух середовища, викликаний стаціонарним вимушеним рухом точкового вихора у довільному стійко стратифікованому середовищі. Характерною особливістю цього рівняння є те, що воно в явній формі містить характеристики рухомого вихора, що для розв'язання лінійних задач дозволяє ефективно використовувати методи інтегральних перетворень. Саме з використанням цього методу в якості ілюстрації

знайдено розв'язок задачі для нескінченного лінійностратифікованого середовища, який співпав з відповідним розв'язком роботи [12]. Одержано аналітичний вираз асимптотичного розв'язку для великих  $x$ .

## 1. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо рівномірний горизонтальний рух точкового вихора зі швидкістю  $U$  у стійкостратифікованій рідині. Вісь вихора перпендикулярна до напрямку руху і до напрямку дії гравітаційних сил.

У системі координат  $xoz$ , яка рухається разом з вихором, причому додатній напрям вісі  $x$  направлено в бік, протилежний напрямку вектора швидкості, а вісь  $z$  направлена вгору, лінеаризовані рівняння, які описують стаціонарний рух стратифікованого середовища в наближенні Бусинеска, представляються у вигляді:

$$\rho(z)U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

$$\rho(z)U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = 0, \quad (4)$$

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{d\rho_0}{dz} w = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Тут  $u, w, p$  і  $\rho$  – відповідно горизонтальна і вертикальна складові швидкості, тиск і густина;  $\rho_0(z)$  – незбурений профіль розподілу густини середовища;  $g$  – прискорення сили тяжіння.

Вводячи функцію течії

$$\Psi = Uz + \psi(x, z)$$

таку, що

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

систему рівнянь (3) – (6) можна звести до одного рівняння

$$\Delta \psi - \frac{N^2}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{N^2}{U^2} \psi = 0, \quad (7)$$

де  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – двовимірний оператор Лапласа, а  $N(z)$  – частота Брента-Вайсяля, яка визначається як

$$N(z) = \left( -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Величина  $\Delta\psi$  визначає завихореність  $\zeta(x, z)$  і, як видно з (7), рух рідини є вихровим в усій області середовища, на відміну від однорідної рідини, де  $\Delta\psi = 0$  скрізь, крім центра вихора, де  $\Delta\psi = -\zeta$ .

Рівняння руху, яке враховує явним чином наявність вихора, на підставі (7) представимо у вигляді

$$\Delta\psi - \frac{N^2}{g} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{N^2}{U^2} \psi = F(x_0, z_0), \quad (8)$$

де  $F(x_0, z_0)$  – функція, яка задає наявність вихора у точці з координатами  $x_0, z_0$ . На характер цієї функції може впливати стратифікація. Але, приймаючи до уваги, що при  $x \rightarrow x_0, z \rightarrow z_0$  абсолютна швидкість частинок середовища нескінченно зростає, цей вплив не матиме місця. Тому вигляд функції  $F(x_0, z_0)$  можна отримати шляхом граничного переходу у рівнянні (8) до однорідного середовища. При  $\rho_0(z) \rightarrow \text{const}$  величина  $N^2 \rightarrow 0$  і рівняння (8) набуває вигляду

$$\Delta\psi = F(x_0, z_0). \quad (9)$$

Але в однорідній рідині для точкового вихора, якщо прийняти за додатній напрям обертання проти годинникової стрілки [1],

$$\Delta\psi = -\zeta = -\Gamma\delta(x - x_0)\delta(z - z_0),$$

де  $\Gamma$  – інтенсивність вихора;  $\delta(x - x_0)$  і  $\delta(z - z_0)$  – дельта-функції Дірака. Отже, рівняння, яке описує лінійні збурення стратифікованого середовища при рівномірному русі точкового вихора, має вигляд

$$\Delta\psi - \frac{N^2}{g} \frac{\partial\psi}{\partial z} + \frac{N^2}{U^2} \psi = -\Gamma\delta(x - x_0)\delta(z - z_0). \quad (10)$$

Спрощений варіант наближення Бусинеска, коли в інерційних складових рівнянь Ейлера не враховується змінність густини середовища по координаті  $z$ , дає таке рівняння відносно  $\psi$ :

$$\Delta\psi + \frac{N^2}{U^2} \psi = -\Gamma\delta(x - x_0)\delta(z - z_0). \quad (11)$$

Якщо ввести характерні масштаби: довжини –  $UN_*^{-1}$  (тут  $N_*$  – характерне значення частоти Брента-Ваясяля), функції течії –  $U^2N_*^{-1}$  і інтенсивності вихора  $U^2N_*^{-1}$ , то безрозмірна форма рівнянь набуває вигляду (без зміни позначень)

$$\Delta\psi - \frac{N^2}{\lambda} \frac{\partial\psi}{\partial z} + N^2\psi = -\Gamma\delta(x - x_0)\delta(z - z_0), \quad (12)$$

$$\Delta\psi + N^2\psi = -\Gamma\delta(x - x_0)\delta(z - z_0), \quad (13)$$

де  $\lambda = g/(N_*U)$  – обернене число Фруда.

Граничні умови для  $\psi$  визначаються із виконання кінематичних і динамічних умов: на вільній поверхні – непокидання частинками рідини цієї поверхні і рівність нулю збуреного тиску; на поверхні стрибка незбуреної густини – неперервність зміщень; тиску і на горизонтальному дні – рівність нулю вертикальної складової швидкості. В термінах функції течії ці умови з використанням системи (3) – (6) набувають такого безрозмірного вигляду:

на вільній поверхні

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z} - \lambda \frac{\partial\psi}{\partial x} = 0; \quad (14)$$

на границі стрибка середньої густини  $i$ -ого і  $i+1$ -ого шарів

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial x} = \frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial x}, \quad (15)$$

$$\frac{\partial^2\psi_i}{\partial x\partial z} - \lambda \frac{\partial\psi_i}{\partial x} = \kappa_i \left( \frac{\partial^2\psi_{i+1}}{\partial x\partial z} - \lambda \frac{\partial\psi_{i+1}}{\partial x} \right), \quad (16)$$

де

$$\kappa_i = \frac{\rho_i(z_i + 0)}{\rho_{i+1}(z_i - 0)};$$

на дні

$$\frac{\partial\psi}{\partial x} = 0. \quad (17)$$

До цих умов додаються умови на нескінченності:

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} \text{ – обмежені при } x \rightarrow \infty, \quad (18)$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty. \quad (19)$$

Останнє співвідношення відповідає відсутності збурень у нескінченності перед рухомим джерелом (умова випромінювання). Для безмежного середовища для всіх  $x$  повинна виконуватись також умова

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial\psi}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm\infty. \quad (20)$$

Відмітимо, що всі задачі про рух вихорів у багатшарових середовищах описуються в рамках розглянутої постановки, якщо в кожному із шарів покласти  $N = 0$ .

Сформульована лінійна постановка задачі дозволяє досліджувати стаціонарний рух точкового вихора у довільному стійко стратифікованому середовищі. Неважко бачити, що розв'язок досліджуваного рівняння (10) з точністю до множника співпадає з функцією Гріна рівняння (7) і, отже, може бути ефективно використаний для побудови розв'язків аналогічних задач для систем вихорів (заданого розподілу завихореності).

При розв'язанні даного класу задач ефективним є застосування методу інтегральних перетворень.

## 2. РУХ ВИХОРА У БЕЗМЕЖНОМУ СТРАТИФІКОВАНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В якості ілюстрації представленого підходу розглянемо, як і в роботі [12], рух точкового вихора у лінійностратифікованому безмежному середовищі, коли його густина змінюється у відповідності з залежністю

$$\rho_0(z) = \rho_{00}(1 - \beta z).$$

Початок системи координат знаходиться в центрі вихора. Величина  $\beta \ll 1$ , так що характерний лінійний масштаб області  $\beta^{-1}$  вважається значно більшим поперечного масштабу збурень  $L_w$ , які вносяться вихором. Це необхідно для коректного застосування наближення Бусинеска у системі (3) – (6). Подібно до роботи [12] використаємо спрощений варіант рівняння для функції течії (13) у розмірному вигляді. Оскільки в даному випадку

$$N = (\beta g)^{\frac{1}{2}} = N^* = \text{const},$$

то відповідна задача формулюється наступним чином. Шукається розв'язок лінійного рівняння ( $\alpha^2 = N^2/U^2$ )

$$\Delta\psi + \alpha^2\psi = -\Gamma\delta(x)\delta(z) \quad (21)$$

з граничними умовами (18) – (20).

Відмітимо, що  $L_w \sim \alpha^{-1}$ , тому відзначена вище умова  $\beta^{-1} \gg L_w$  представляється як

$$\frac{\alpha}{\beta} = \lambda \gg 1.$$

Розв'язок для  $\psi(x, z)$  шукається у вигляді

$$\psi = \frac{\Gamma}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_1x} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik_2z} \bar{\psi}(k_1, k_2) dk_2. \quad (22)$$

Для функції-образу  $\bar{\psi}(k_1, k_2)$  з рівнянь (21) та (22) одержується вираз

$$\bar{\psi} = \frac{1}{\alpha^2 - k_1^2 - k_2^2}.$$

Для знаходження  $\psi(x, z)$  виконаємо перше інтегрування у комплексній  $k_2$ -площині. Функція-образ  $\bar{\psi}(k_1, k_2)$  задовольняє тут умовам леми Жордана, тому для знаходження відповідного інтегралу можна використати теорему про лишки.

Враховуючи, що  $\bar{\psi}(k_1, k_2)$  має у цій площині прості полюси в точках

$$k_{21} = \sqrt{\alpha^2 - k_1^2}, \quad k_{22} = -\sqrt{\alpha^2 - k_1^2},$$

одержимо для області  $z > 0$

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-z\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}}}{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}} \cos(k_1x) dk_1 - \\ & - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(z\sqrt{\alpha^2 - k_1^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k_1^2}} \cos(k_1x) dk_1, \end{aligned} \quad (23)$$

і для  $z < 0$

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{z\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}}}{\sqrt{k_1^2 - \alpha^2}} \cos(k_1x) dk_1 + \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(z\sqrt{\alpha^2 - k_1^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k_1^2}} \cos(k_1x) dk_1. \end{aligned} \quad (24)$$

Здобутий розв'язок (23) – (24) не дозволяє, однак, задовольнити граничну умову при  $x \rightarrow -\infty$ . Тому розглянемо інший розв'язок задачі, коли перше інтегрування у розв'язку (22) виконується у  $k_1$ -площині. Тут функція  $\bar{\psi}(k_1, k_2)$  має полюси у точках

$$k_{11} = \sqrt{\alpha^2 - k_2^2}, \quad k_{12} = -\sqrt{\alpha^2 - k_2^2},$$

і на підставі теореми про лишки маємо для  $x > 0$

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{-x\sqrt{k_2^2 - \alpha^2}}}{\sqrt{k_2^2 - \alpha^2}} \cos(k_2z) dk_2 - \\ & - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(x\sqrt{\alpha^2 - k_2^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}} \cos(k_2z) dk_2, \end{aligned} \quad (25)$$

і для  $x < 0$

$$\begin{aligned} \psi(x, z) = & \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{e^{x\sqrt{k_2^2 - \alpha^2}}}{\sqrt{k_2^2 - \alpha^2}} \cos(k_2z) dk_2 + \\ & + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(x\sqrt{\alpha^2 - k_2^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k_2^2}} \cos(k_2z) dk_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Задовольняючи умову відсутності збурень при  $x \rightarrow -\infty$ , одержуємо (опускаючи надалі індекси (2)):

в області  $x > 0$

$$\psi(x, z) = -\frac{\Gamma}{\pi} \int_0^\alpha \frac{\sin(x\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \cos(kz) + \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\alpha^\infty \frac{e^{-x\sqrt{k^2 - \alpha^2}}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \cos(kz) dk, \quad (27)$$

в області  $x < 0$

$$\psi(x, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_\alpha^\infty \frac{e^{x\sqrt{k^2 - \alpha^2}}}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \cos(kz) dk. \quad (28)$$

Розв'язки (27) і (28) співпадають з розв'язком цієї задачі, знайденим іншим шляхом у роботі [12], якщо врахувати, що там функція течії введена так, що

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

При граничному переході до однорідного середовища ( $\alpha \rightarrow 0$ ) розв'язок задачі набирає вигляду

$$\psi(x, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-k|x|}}{k} \cos(kz) dk. \quad (29)$$

Для компонент збуреної швидкості маємо в цьому випадку [15]

$$u = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty e^{-k|x|} \sin(kz) dk = -\frac{\Gamma z}{2\pi(x^2 + z^2)},$$

$$w = -\text{Sign}(x) \frac{\Gamma}{2\pi} \int_0^\infty e^{-k|x|} \cos(kz) dk = \frac{\Gamma x}{2\pi(x^2 + z^2)},$$

що відповідає класичному розв'язку для вихора у безмежному однорідному середовищі [1]. На рис. 1 і 2 представлені результати розрахунків для картини розподілу ліній постійних значень функції течії  $\Psi(x, z)$ , виконаних у роботі [12], для двох значень характерного внутрішнього числа Фруда  $Fr = U/ND$ . Розрахунки виконані для  $\Gamma < 0$ . Тут  $D$  – розмір потенціального вихора в однорідному потоці, який визначається як відстань від центра вихора до точки стагнації, в якій індукована вихором горизонтальна складова швидкості зрівнюється з протилежно направленою швидкістю руху. Із розв'язку для потенціального вихора

$$D = \frac{|\Gamma|}{2\pi U},$$

і тоді внутрішнє число Фруда виразиться через інтенсивність вихору як

$$Fr = \frac{2\pi U}{|\Gamma|\alpha}.$$

Як видно з порівняння наведених картин для  $\Psi(x, z)$  збільшення інтенсивності вихора призводить до зростання збурень середовища і зменшення поперечного розміру замкнутої області в околі сингулярності, що відповідає обтіканню диполя. Зрозуміло, що область справедливості одержаного лінійного розв'язку починається на деякій віддалі від вихора. Рух середовища у ближній до дипольного обтікання зоні необхідно описувати в нелінійній постановці. Характерний поперечний розмір цієї зони зменшується зі зростанням внутрішнього числа Фруда.

### 3. АСИМПТОТИЧНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ДЛЯ ВЕЛИКИХ $x$

В області великих значень  $|x|$  друга складова розв'язку (27) та розв'язок (28) прямує до нуля. А першу складову розв'язку (27) в області  $x > 0$  можна наближено визначити, використовуючи для обчислення інтегралу метод стаціонарної фази. Можна представити

$$\int_0^\alpha \frac{\sin(x\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \cos(kz) dk = \frac{1}{4i} \int_0^\alpha \frac{A_1 - A_2}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} dk, \quad (30)$$

де

$$A_1 = e^{ix(k\xi + \sqrt{\alpha^2 - k^2})} - e^{-ix(k\xi + \sqrt{\alpha^2 - k^2})},$$

$$A_2 = e^{ix(k\xi - \sqrt{\alpha^2 - k^2})} - e^{-ix(k\xi - \sqrt{\alpha^2 - k^2})},$$

і  $\xi = z/x$ . Управляючими функціями інтегралу (30) будуть:

– в області  $x > 0, z > 0$

$$\Phi_1 = k\xi + \sqrt{\alpha^2 - k^2},$$

– в області  $x > 0, z < 0$

$$\Phi_2 = k\xi - \sqrt{\alpha^2 - k^2}.$$

Відповідні стаціонарні точки визначаються із рівнянь

$$\frac{d\Phi_i}{dk} = 0,$$

що дає такі стаціонарні точки  $\zeta$  і значення  $\partial^2 \Phi_i / \partial k^2$  при  $k = \zeta$ :

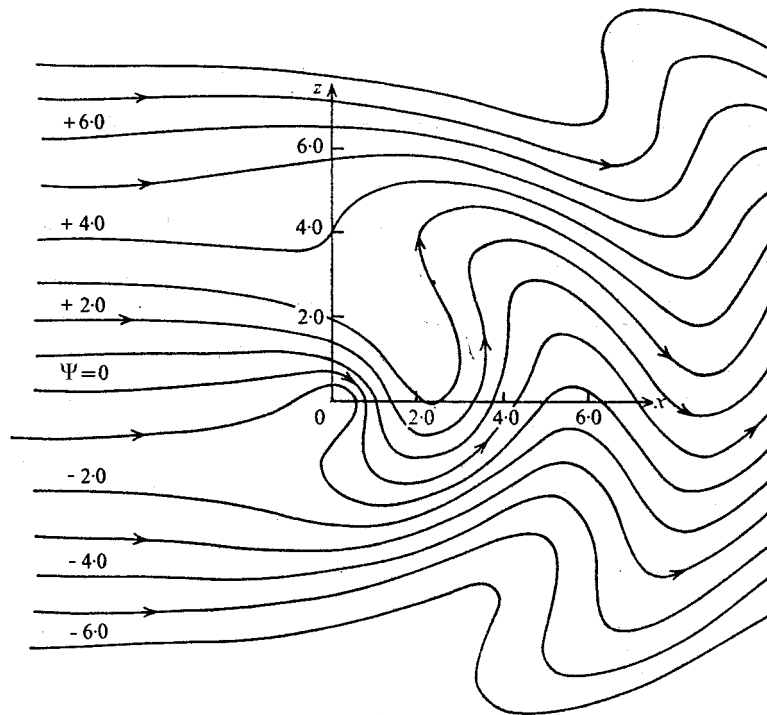


Рис. 1. Картина ліній течії  $\Psi(x, z)$  при  $Fr = 0.67$  і  $\Gamma < 0$  [12]

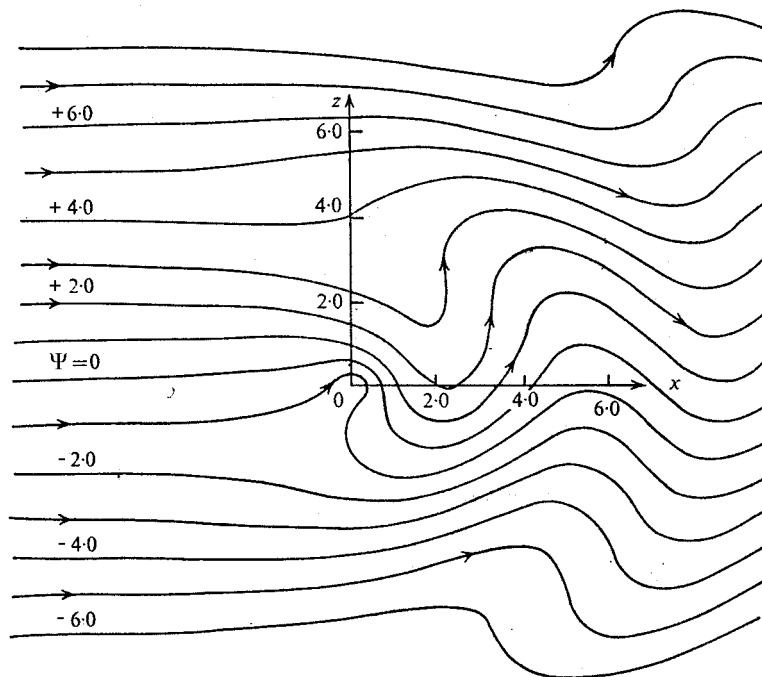


Рис. 2. Картина ліній течії  $\Psi(x, z)$  при  $Fr = 1.0$  і  $\Gamma < 0$  [12]

– в області  $x > 0, z > 0$

$$\zeta = \frac{\xi\alpha}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial k^2} = -\frac{1}{\alpha}(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}},$$

– в області  $x > 0, z < 0$

$$\zeta = -\frac{\xi\alpha}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial k^2} = \frac{1}{\alpha}(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Застосував формулу стаціонарної фази [16] для наближеного обчислення інтегралу (30), одержимо після виділення дійсних частин такі вирази для компонент збуреної швидкості:

– в області  $x > 0, z > 0$

$$u \approx \frac{\Gamma\xi\alpha^{\frac{1}{2}}}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}} \cos\left[\alpha x(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right], \quad (31)$$

$$w \approx -\frac{\Gamma\alpha^{\frac{1}{2}}}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}} \cos\left[\alpha x(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{\pi}{4}\right]; \quad (32)$$

– в області  $x > 0, z < 0$

$$u \approx \frac{\Gamma\xi\alpha^{\frac{1}{2}}}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}} \cos\left[\alpha x(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right], \quad (33)$$

$$w \approx -\frac{\Gamma\alpha^{\frac{1}{2}}}{(2\pi x)^{\frac{1}{2}}}(1+\xi^2)^{-\frac{3}{4}} \cos\left[\alpha x(1+\xi^2)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi}{4}\right]. \quad (34)$$

З одержаних розв'язків (31) – (34) видно, що для фіксованих  $x$  при  $z \rightarrow \infty$  значення  $u(x, z)$  затухають як  $(\alpha z)^{-\frac{1}{2}}$ , а  $w(x, z)$  – як  $(\alpha z)^{-\frac{3}{2}}$ . При фіксованих  $z$  затухання розв'язку в напрямку вісі  $x$  для обох складових швидкості має порядок  $(\alpha x)^{-\frac{1}{2}}$ .

#### 4. ЗАКЛЮЧЕННЯ

У виконаному дослідженні представлена нова модель лінійної постановки задачі про збурення, викликані вимушеним рухом точкового плоского вихора в ідеальному стратифікованому середовищі. Рівняння для функції течії в явному вигляді містить параметри рухомого вихора, що дозволяє використовувати звичний для лінійних задач метод інтегральних перетворень. На прикладі безмежного середовища продемонстровано ефективність використання цього методу.

Розгляненого класу задачі представляють інтерес не лише з точки зору взаємодії таких вихрових структур зі стратифікованим середовищем. Використання підводних крил у різного роду апаратах для створення підйомної сили або в якості стерна спричинили необхідність розв'язання ряду нових гідродинамічних проблем. Зокрема, це визначення

збурень, що вносяться крилом у навколишнє середовище, а також величини гідродинамічного опору при його русі, зокрема його хвильової складової, що включає у випадку стратифікованого середовища затрати на генерацію внутрішніх хвиль. Такі задачі можна розв'язати, замінивши рух плоского крила рухом прилученого вихора, інтенсивність якого співпадає з циркуляцією швидкості вздовж контура, який охоплює криловий профіль. Запропонований підхід дозволяє одержувати розв'язки задач відміченого класу для будь-якого стійкого профілю стратифікації включно з наявністю вільної поверхні і дна. Запропонований підхід легко узагальнюється на лінійні задачі про рух системи джерел завихреності.

1. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– К.: Наук. думка, 1993.– 278 с.
2. Степаняц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э. В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники, МЖГ, М.: ВИНТИ.– 1987.– 21.– С. 92-179.
3. Кочин Н.Е. О влиянии рельефа земли на волны на поверхности раздела двух масс жидкости разной плотности (статья 2).– Собр. соч. М.: Из-во АН СССР, 1949.– т. 1.– С. 467-477.
4. Тер-Криков А.М. Вихри и внутренние волны в стратифицированной жидкости // ПММ.– 1995.– 59, в. 4.– С. 599-606.
5. Секоян А.Х., Тер-Криков А. М. Внутренние волны от потенциальных вихрей // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1998.– N 1.– С. 118-123.
6. Arendt S.C. Vorticity in stratified fluid I; general formulation // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.– 1993.– 68.– P. 59-83.
7. Arendt S.C. Vorticity in stratified fluid II: finite cross-section filaments and rings // Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.– 1993.– 70.– P. 161-193.
8. Arendt S.C. Two-dimensional vortex dynamics in a stratified barotropic fluid // J.Fluid Mech.– 1996.– 314.– P. 139-161.
9. Войцеля В.С. О поступательном движении тела под поверхностью раздела двух сред // Изв.вузов, Математика.– 1963.– N 2.– С. 20-30.
10. Горлов С.И. Решение линейных задач о равномерном движении вихресточника в многослойной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1995.– N 31.– С. 127-132.
11. Горлов С.И. Линейная задача о движении вихресточника вблизи границы раздела двух сред // ПМТФ.– 1997.– 38, N 2.– С. 68-72.
12. Janowitz G.S. Line singularities in unbounded stratified fluid // J.Fluid Mech.– 1974.– 66, 3.– P. 455-464.
13. Dahm W.J.A., Schoil C.M., Tryggvason G. Dynamic of vortex interaction with a density interface // J.Fluid Dyn.– 1984.– 205.– P. 1-43.
14. Тернер Дж. Эффекты плавучести в жидкостях.– М.: Мир, 1977.– 431 с.
15. Прудников А.П., Брачков Ю.А., Маричев О.М. Интегралы и ряды.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1981.– 798 с.
16. Джеффрис Г., Свирл Б. Методы математической физики, Выпуск 3.– М.: Мир, 1970.– 343 с.