

НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.4

Применение метода Чжена и Финни для расчета коэффициентов интенсивности напряжений в тонкостенных трубах с длинными осевыми трещинами с учетом геометрической нелинейности

И. В. Орыняк^а, Е. С. Яковлева^а, В. В. Розгонюк^б

^а Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

^б ДК “Укртрансгаз”, Киев, Украина

Для расчета коэффициентов интенсивности напряжений в упругих трубах с длинными дефектами используется известный метод Чжена и Финни. Предложено универсальное описание характера поведения балки, для которой получены и используются уравнения метода начальных параметров с учетом геометрической нелинейности (влияние осевой силы на поперечное деформирование). Это позволило, по-видимому, впервые определить значения коэффициентов интенсивности напряжений в тонкостенной трубе в геометрически нелинейной постановке, когда повышение давления приводит к несколько “замедленному” их увеличению. Результаты обобщены для более сложного дефекта – трещины, выходящей из вершины вмятины.

Ключевые слова: трещина, вмятина, коэффициент интенсивности напряжений, метод начальных параметров.

Введение. В линейной механике разрушения для нахождения коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) в тонкостенных элементах широкое распространение получил технический прием исследования трещины как сосредоточенной податливости, где скачки перемещений и углов поворота линейно связаны со значениями силы и момента в рассматриваемом сечении с трещиной. Впервые этот прием, названный методом линейных пружин, был предложен в [1] для анализа эллиптической трещины в пластине с использованием классической теории пластин Кирхгоффа. Дальнейшее развитие метод получил, в частности, при анализе оболочек [2], где в качестве постановочных использовали уравнения типа Рейсснера. В Украине метод получил развитие в работах Института прикладных проблем механики и математики НАН Украины [3].

В [4] предложен метод для определения остаточных напряжений в цилиндрах, основанный на экспериментальном замере деформаций на свободной поверхности при пошаговом увеличении длины искусственной трещины. Теоретическую основу метода составляет оригинальный подход по определению коэффициента интенсивности напряжений для трещины в цилиндре [5, 6]. Метод получил название метода податливости трещины (crack compliance method). Его суть заключается в применении вышеизложенного подхода к двумерным задачам. Преимущества метода податли-

ности трещин состоят в возможности свести сложную задачу к нескольким простым.

Суть метода состоит в следующем [5].

1. Кольцо рассматривается как балка с поперечной трещиной, в сечении которой в случае отсутствия трещины действует некоторая система напряжений как остаточных, так и вызванных произвольным внешним нагружением.

2. Трещина представляет собой некоторую сосредоточенную податливость с двумя степенями свободы (в сечении с трещиной происходят скачки перемещений Δu и углов поворота $\Delta\theta$, зависящие от системы действующих напряжений в сечении).

3. Наличие скачков приводит к тому, что формально нарушается условие неразрывности кольца-балки, поэтому в сечении с трещиной возникают дополнительные изгибающий момент M и продольная сила N , которые наряду с основной системой сил, действующей в кольце без трещины, дополнительно учитываются при расчете перемещений и КИН. В работе [5] отмечалось, что этот приближенный подход приемлем для тонкостенных цилиндров. Однако в ней отсутствует четкое ограничение пределов его применимости и оценки точности. Этот момент учли авторы работы [7], в которой на основе подхода Чжена и Финни с использованием метода начальных параметров решены задачи определения КИН для толстостенного цилиндра с трещиной и для случая симметрично расположенных нескольких трещин на внутренней поверхности кольца.

Возникает естественный вопрос о целесообразности развития приближенных методов. Конечно, в современных научных и справочных литературных источниках приведено большое число рассчитанных значений КИН для всех возможных практически значимых случаев наличия трещины в конструктивных элементах. Существуют многочисленные программные комплексы, позволяющие решить любую интересующую задачу расчета КИН. Тем не менее инженерные методы не только дают качественное понимание влияния того или иного параметра на конечный результат, но и с достаточной точностью позволяют решить много важных задач, отыскание которых в специальной литературе часто требует больших затрат времени, чем их самостоятельное решение.

Цель настоящей работы заключалась в развитии метода Чжена и Финни для ряда, на наш взгляд, интересных и практически важных задач расчета КИН. К ним относятся:

- влияние начальной неправильности формы трубы;
- влияние геометрической нелинейности при нагружении давлением;
- разработка простых инженерных формул для расчета КИН в трубах.

Такие задачи имеют большое значение при анализе прочности цилиндрических тел (обсадные колонны, глубоководные трубопроводы, низконапорные трубопроводы, тоннели), подверженных в первую очередь внешнему давлению [8, 9]. При нагружении внутренним давлением этот анализ необходим для очень тонкостенных конструкций, например резервуаров, в процессе эксплуатации которых возникают различные выпуклости. Что касается магистральных трубопроводов, то практические проблемы вызывает

оценка искусственно нанесенных вмятин, например ковшем экскаватора. В литературных источниках приведено много методик расчета вмятин [10, 11], в частности допустимый расчет вмятин можно проводить в соответствии с документом API 579 [12], который разработан для оценки состояния объектов нефтехимической отрасли, содержащих дефекты различной природы.

Что касается более сложных дефектов, таких, как трещина, выходящая из вмятины, то формально эксплуатация трубопроводов с ними не допускается [13]. Тем не менее в последнее время разрабатываются методики оценки, позволяющие разделять их на допустимые и недопустимые [14, 15]. Эти методики, в частности, предусматривают расчет КИН. Их недостаток состоит в том, что рассчитывается уровень напряжений от вмятины, а затем КИН определяется как для полосы с краевой трещиной, т.е. не учитывается, как в методе Чжена и Финни, возникновение дополнительного изгибающего момента, продольных и поперечных сил.

Поставленные задачи рассчитываются по одной схеме, суть которой заключается в том, что каждая задача состоит из двух. Для решения первой используются результаты механики разрушения, определяются КИН и коэффициенты податливости. Все результаты в соответствии с идеей метода Чжена и Финни определяются для бесконечной полосы с трещиной. Вторая задача более нетривиальна, при ее решении находятся перемещения и повороты криволинейной балки с помощью методов строительной механики (авторы являются сторонниками использования метода начальных параметров (МНП)). Собственно, именно получение и применение МНП с учетом геометрически нелинейного деформирования балки и предопределяет возможность решения указанных выше задач.

1. Уравнения метода податливости трещин.

1.1. *Геометрия и обозначения.* Рассмотрим бесконечный цилиндр (кольцо) с толщиной стенки t , радиус-вектор $R(\varphi)$ (годограф) описывает контур кольца в полярных координатах. Пусть в цилиндре имеется бесконечная осевая трещина глубиной a , расположенная на внутренней или внешней поверхности, т.е. радиальная трещина в кольце (рис. 1). Здесь и ниже свяжем координату $\varphi = 0$ с сечением, содержащим трещину. Введем локальные единичные орты: \bar{n} – нормальный вектор, направленный к мгновенному центру кривизны исследуемого элементарного участка; \bar{t} – вектор касательной, направленный по часовой стрелке. Двумя близкими сечениями, параллельными вектору \bar{n} , выделим элемент длины кольца (рис. 2). Рассматривая кольцо как криволинейную балку, введем шесть основных параметров, характеризующих ее напряженно-деформированное состояние: радиальное перемещение w ; окружное перемещение u ; угол поворота сечения θ , направленный по часовой стрелке; поперечная Q и продольная N силы и изгибающий момент M , направленные как показано на рис. 2. Полагаем, что в теле при отсутствии трещины существует некоторая система уравновешенных, в том числе и внешним нагружением, напряжений, пропорциональных некоторому параметру q . В частности, в сечении с трещиной (в случае отсутствия трещины) окружные напряжения $\sigma_{\theta,q}$ представляются в виде $\sigma_{\theta,q} = q\bar{\sigma}_q(x)$, где $\bar{\sigma}_q(x)$ – некоторый единичный закон распределения напряжений; число q характеризует интенсивность этих напряжений.

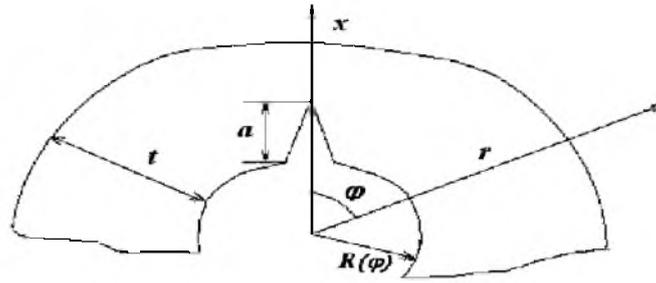


Рис. 1. Некруглое кольцо с трещиной.

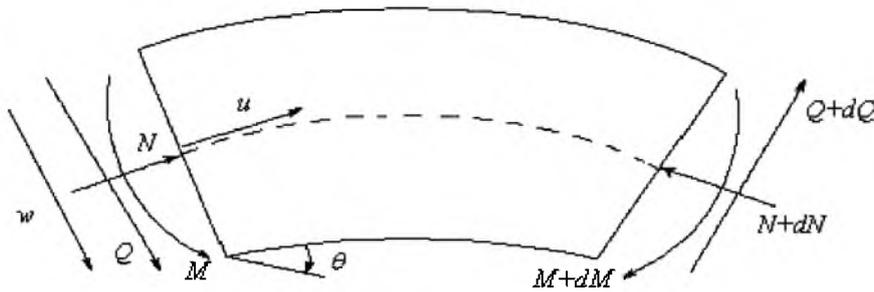


Рис. 2. Направление векторов усилий и перемещений.

1.2. Скачки перемещений и углов возле вершины трещины. В соответствии с методом податливости трещины скачки перемещений и углов поворота определяются по формулам (например, [7]):

$$\Delta u = t \frac{\pi}{E'} (-\gamma_q \sigma_{\theta,q} - \gamma_M \sigma_M - \gamma_N \sigma_N); \quad (1)$$

$$\Delta \theta = \frac{6\pi}{E'} (\beta_q \sigma_{\theta,q} + \beta_M \sigma_M + \beta_N \sigma_N). \quad (2)$$

Здесь $\sigma_M = 6M/t^2$, $\sigma_N = N/t$ (как для прямой балки) – напряжения, связанные с возникающими дополнительными продольной силой и моментом в сечении трещины; γ_i и β_i – коэффициенты податливости, которые для каждой нагрузки i определяются следующим образом:

$$\gamma_i(\alpha) = \int_0^\alpha \alpha Y_N(\alpha) Y_i(\alpha) d\alpha; \quad \beta_i(\alpha) = \int_0^\alpha \alpha Y_M(\alpha) Y_i(\alpha) d\alpha, \quad (3)$$

где $Y_i(\alpha)$ – безразмерные КИН, рассчитанные с использованием весовых функций, например [16, 17], или взятые из справочников, связь которых с КИН для рассматриваемых случаев нагружения описывается формулами:

$$K_{Iq} = -\sqrt{\pi a} q Y_q(\alpha); \quad K_{IN} = -\sqrt{\pi a} \sigma_N Y_N(\alpha); \quad K_{IM} = -\sqrt{\pi a} \sigma_M Y_M(\alpha). \quad (4)$$

Тогда с учетом суперпозиции получим результирующий КИН:

$$K_I = K_{IN} + K_{IM} + K_{Iq}. \quad (5)$$

Заметим, что формулы (1), (2) дают половину соответствующих скачков и являются ключевыми для последующего анализа, с их помощью можно определить скачки углов и перемещений при действии любой системы нагрузок на берега трещины.

2. Метод начальных параметров в геометрически нелинейной постановке.

2.1. *Постановочные уравнения для кольца с незначительным искривлением.* Полагаем, что форма кольца несколько отличается от идеально круговой ввиду изначального отклонения от правильной формы и изменения кривизны его точек вследствие действия изгибающих моментов.

Пусть толщина стенки кольца есть константа t , а радиус-вектор его срединной поверхности описывается в полярных координатах зависимостью $R(\varphi)$, которую разложим в гармонический ряд:

$$R(\varphi) = R_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\varphi \right), \quad (6a)$$

где принимаем, что форма сечения незначительно отличается от круговой:

$$b_n^2, a_n^2 \ll 1. \quad (6b)$$

Из дифференциальной геометрии известно, что для заданной в полярных координатах кривой уравнение кривизны в точке K имеет вид

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{R^2 + 2R'^2 - RR''}{(R^2 + R'^2)^{3/2}} \approx \frac{1}{R} \left(1 - \frac{R''}{R} \right). \quad (7)$$

С учетом условия (6б) легко показать, что дифференциал длины дуги ds приблизительно равен

$$ds = \sqrt{R^2 + R'^2} d\varphi \approx R(\varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Запишем шесть дифференциальных уравнений, описывающих деформирование кольца:

$$\frac{dQ}{R(\varphi)d\varphi} + \frac{N}{\rho} = -P; \quad \frac{dN}{R(\varphi)d\varphi} - \frac{Q}{\rho} = 0; \quad \frac{dM}{R(\varphi)d\varphi} = Q; \quad (9)$$

$$\frac{d\theta}{R(\varphi)d\varphi} = \frac{M}{E'J}; \quad -\frac{du}{R(\varphi)d\varphi} + \frac{w}{\rho} = 0; \quad \frac{dw}{Rd\varphi} + \frac{u}{\rho} = \theta. \quad (10)$$

При их решении будем учитывать изменение кривизны точек кольца вследствие действия изгибающих моментов, т.е. задача деформирования рассматривается в геометрически нелинейной постановке. Тогда общее выражение для кривизны имеет вид

$$\frac{1}{\rho} = \frac{1}{R} \left(1 - \frac{R''}{R} \right) + \frac{M}{E'J}. \quad (11)$$

Искомое значение продольной силы N отыскиваем в виде суммы номинальной силы от внутреннего давления $N_0 = -pR_0 = \text{const}$ и некоторой дополнительной силы N_1 , которая значительно меньше основной (номинальной), т.е. $N_0 \gg N_1$. Принимая во внимание это условие малости, можно показать, что учет изменения кривизны в точках кольца в соответствии с выражением (11) является существенным только в первом уравнении равновесия. Такой подход характерен для анализа условий потери устойчивости и описания докритического состояния [18]. Таким образом, в геометрически нелинейной постановке вместо (9) и (10) имеем следующую приближенную систему уравнений:

$$\begin{aligned} & \frac{dQ}{R_0 d\varphi} + \frac{N_1}{R_0} - \frac{PR_0^2 M}{E'J} = \\ & = PR_0 \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) a_n \cos n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1) b_n \sin n\varphi \right); \end{aligned} \quad (12)$$

$$\frac{dN_1}{R_0 d\varphi} - \frac{Q}{R_0} = 0; \quad \frac{dM}{R_0 d\varphi} = Q;$$

$$\frac{d\theta}{R_0 d\varphi} = \frac{M}{E'J}; \quad -\frac{du}{d\varphi} + w = 0; \quad \frac{dw}{d\varphi} + u = \theta R_0. \quad (13)$$

Подставляя два последних уравнения (12) в первое, получаем

$$Q'' + \chi^2 Q = PR_0 \left(-\sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 - 1) a_n \sin n\varphi + \sum_{n=1}^{\infty} n(n^2 - 1) b_n \cos n\varphi \right); \quad (14a)$$

$$\chi^2 = 1 - \frac{PR_0^3}{E'J} = 1 - \bar{p}, \quad (14b)$$

где для удобства введены параметр χ и безразмерное давление \bar{p} .

2.2. *Общее решение для тонкостенного кольца.* Решение системы (12), (13) отыскиваем как сумму частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения, приведенных в виде

$$\begin{cases}
 Q = PR_0 \sum_{i=2} (nA_n \sin n\varphi - nB_n \cos n\varphi); \\
 N = -PR_0 \sum_{i=2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi); \\
 M = -PR_0^2 \sum_{i=2} (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi); \\
 \theta = \frac{PR_0^3}{E'J} \sum_{i=2} \left(-\frac{A_n}{n} \sin n\varphi + \frac{B_n}{n} \cos n\varphi \right); \\
 u = \frac{PR_0^4}{E'J} \sum_{i=2} \left(\frac{A_n}{n(n^2-1)} \sin n\varphi - \frac{B_n}{n(n^2-1)} \cos n\varphi \right); \\
 w = \frac{PR_0^4 A_n}{E'J} \sum_{i=2} \left(\frac{A_n \cos n\varphi}{(n^2-1)} + \frac{B_n \sin n\varphi}{(n^2-1)} \right),
 \end{cases} \quad (15a)$$

где

$$A_n = \frac{(n^2-1)a_n}{n^2-\chi^2}; \quad B_n = \frac{(n^2-1)b_n}{n^2-\chi^2}. \quad (15б)$$

Заметим, что полученное решение, во-первых, не содержит членов при $n=1$, поскольку они определяют смещение кольца как целого, во-вторых, имеет смысл только при $\bar{p} > -3$. При значении $\bar{p} = -3$ знаменатель в выражениях (15а) равен нулю, и происходит потеря устойчивости кольца, нагруженного внешним давлением, что совпадает с известным решением Грасгофа–Бресса (например, [19]). Чтобы получить выражение для КИН, необходимо иметь общее решение системы уравнений (12), (13). Отметим, что изгибные напряжения в кольце, пропорциональные изгибающему моменту, полностью совпадают с решениями, приведенными в [12].

В зависимости от значения χ^2 имеем три разных случая, для которых представим общие решения однородной системы в виде, удобном для использования в методе начальных параметров (табл. 1). В табл. 1 $\bar{N}_0 = N_0 - \frac{M_0}{R_0}$.

В данной постановке геометрическая нелинейность проявляется во влиянии продольной силы $N_0 = -pR_0$ на значения перерезывающей силы. Поскольку в сечении трещины происходит скачок угла $\Delta\theta$, дополнительно необходимо учитывать скачок перерезывающей силы ΔQ_0 . Он возникает в результате того, что сила N_0 при скачкообразном измерении нормали к контуру дает проекцию на нормаль:

$$\Delta Q_0 = -N_0 \sin(\Delta\theta) \approx PR_0(\Delta\theta). \quad (16)$$

Приведенные выше формулы позволяют решать произвольные задачи для вмятин и трещин.

Т а б л и ц а 1

Решения с использованием МНП системы уравнений (12), (13)

Параметр	$\chi^2 > 0, \mu = \chi$	$\chi^2 = 0$	$\chi^2 < 0, \mu = \sqrt{-\chi^2}$
Q	$Q_0 \cos \mu\varphi - \frac{\bar{N}_0}{\mu} \sin \mu\varphi$	$Q_0 - \bar{N}_0\varphi$	$Q_0 \operatorname{ch} \mu\varphi - \frac{\bar{N}_0}{\mu} \operatorname{sh} \mu\varphi$
N	$N_0 + \frac{Q_0}{\mu} \sin \mu\varphi -$ $-\bar{N}_0 \left(\frac{1 - \cos \mu\varphi}{\mu^2} \right)$	$N_0 + Q_0\varphi - \bar{N}_0 \frac{\varphi^2}{2}$	$N_0 + \frac{Q_0}{\mu} \operatorname{sh} \mu\varphi -$ $-\bar{N}_0 \left(\frac{\operatorname{ch} \mu\varphi - 1}{\mu^2} \right)$
M	$M_0 + R_0 Q_0 \frac{\sin \mu\varphi}{\mu} -$ $-R_0 \bar{N}_0 \left(\frac{1 - \cos \mu\varphi}{\mu^2} \right)$	$M_0 + R_0 Q_0\varphi - \bar{N}_0 R_0 \frac{\varphi^2}{2}$	$M_0 + R_0 Q_0 \frac{\operatorname{sh} \mu\varphi}{\mu} -$ $-R_0 \bar{N}_0 \left(\frac{\operatorname{ch} \mu\varphi - 1}{\mu^2} \right)$
θ	$\theta_0 + \frac{R_0 M_0}{E'J} \varphi +$ $+\frac{R_0^2 Q_0}{E'J} \left(\frac{1 - \cos \mu\varphi}{\mu^2} \right) +$ $+\frac{R_0^2 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{\varphi}{\mu^2} - \frac{\sin \mu\varphi}{\mu^3} \right)$	$\theta_0 + \frac{M_0 R_0}{E'J} \varphi + \frac{Q_0 R_0^2 \varphi^2}{E'J} -$ $-\frac{\bar{N}_0 R_0^2 \varphi^3}{E'J} \frac{1}{6}$	$\theta_0 + \frac{R_0 M_0}{E'J} \varphi +$ $+\frac{R_0^2 Q_0}{E'J} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu\varphi - 1}{\mu^2} \right) -$ $-\frac{R_0^2 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu\varphi}{\mu^3} - \frac{\varphi}{\mu^2} \right)$
u	$u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi +$ $+ \theta_0 R_0 (1 - \cos \varphi) +$ $+\frac{R_0^2 M_0}{E'J} (\varphi - \sin \varphi) +$ $+\frac{R_0^3 Q_0}{E'J} \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{\cos \mu\varphi}{\mu^2(1 - \mu^2)} +$ $+\frac{\cos \varphi}{1 - \mu^2} \right) - \frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{\varphi}{\mu^2} -$ $-\frac{\sin \mu\varphi}{\mu^3(1 - \mu^2)} + \frac{\sin \varphi}{1 - \mu^2} \right)$	$u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi +$ $+ \theta_0 R_0 (1 - \cos \varphi) +$ $+\frac{R_0^2 M_0}{E'J} (\varphi - \sin \varphi) +$ $+\frac{R_0^3 Q_0}{E'J} \left(\cos \varphi - 1 + \frac{\varphi^2}{2} \right) -$ $-\frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{\varphi^3}{6} - \varphi + \sin \varphi \right)$	$u_0 \cos \varphi + w_0 \sin \varphi +$ $+ \theta_0 R_0 (1 - \cos \varphi) +$ $+\frac{R_0^2 M_0}{E'J} (\varphi - \sin \varphi) +$ $+\frac{R_0^3 Q_0}{E'J} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu\varphi}{\mu^2(1 + \mu^2)} -$ $-\frac{1}{\mu^2} + \frac{\cos \varphi}{1 + \mu^2} \right) -$ $-\frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu\varphi}{\mu^3(1 + \mu^2)} -$ $-\frac{\varphi}{\mu^2} + \frac{\sin \varphi}{1 + \mu^2} \right)$
w	$w_0 \cos \varphi - u_0 \sin \varphi +$ $+ \theta_0 R_0 \sin \varphi +$ $+\frac{R_0^2 M_0}{E'J} (1 - \cos \varphi) +$ $+\frac{R_0^3 Q_0}{E'J} \left(\frac{\sin \mu\varphi}{\mu(1 - \mu^2)} -$ $-\frac{\sin \varphi}{1 - \mu^2} \right) -$ $-\frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{1}{\mu^2} -$ $-\frac{\cos \mu\varphi}{\mu^2(1 - \mu^2)} + \frac{\cos \varphi}{1 - \mu^2} \right)$	$w_0 \cos \varphi - u_0 \sin \varphi +$ $+ \theta_0 R_0 \sin \varphi +$ $+\frac{R_0^2 M_0}{E'J} (1 - \cos \varphi) +$ $+\frac{R_0^3 Q_0}{E'J} (\varphi - \sin \varphi) -$ $-\frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{\varphi^2}{2} - 1 + \cos \varphi \right)$	$w_0 \cos \varphi - u_0 \sin \varphi +$ $+ \theta_0 R_0 \sin \varphi +$ $+\frac{R_0^2 M_0}{E'J} (1 - \cos \varphi) +$ $+\frac{R_0^3 Q_0}{E'J} \left(\frac{\operatorname{sh} \mu\varphi}{\mu(1 + \mu^2)} -$ $-\frac{\sin \varphi}{(1 + \mu^2)} \right) -$ $-\frac{R_0^3 \bar{N}_0}{E'J} \left(\frac{\operatorname{ch} \mu\varphi}{1 + \mu^2} -$ $-\frac{1}{\mu^2} + \frac{\cos \varphi}{1 + \mu^2} \right)$

3. Трещины в тонкостенном кольце под действием давления.

3.1. Трещина в тонкостенном кольце правильной (круговой) формы. Основными формулами анализа являются выражения МНП для u и θ из табл. 1. Полагаем, что трещина расположена в сечении $\varphi = 0$. Строго говоря, перемещения и углы поворота в точке $\varphi = 0$ с учетом симметрии тождественно равны нулю. Однако на некотором, очень малом расстоянии они равны половине скачка соответствующих величин Δu и $\Delta\theta$, которые определяются по формулам (1) и (2) и принимаются как начальные значения u_0 и θ_0 , в качестве внешнего усилия q используется внутреннее давление p .

Для тонкостенного кольца можно использовать упрощающее допущение $u_0 = 0$. Обоснуем его. Поскольку $Y_M = O(Y_N)$, из уравнений (3) следует, что $\gamma_i(\alpha) = O(\beta_i(\alpha))$. Тогда из (1) и (2) получим $u_0 = t \cdot O(\theta_0)$ и очевидно, что $u_0 \ll \theta_0 R$. Поэтому в формулах для $u(\varphi)$ (табл. 1) можно положить $u_0 = 0$.

Таким образом, неизвестные значения продольной силы N_0 и изгибающего момента M_0 определяем с помощью метода начальных параметров с учетом условия симметрии в точке $\varphi = \pi$, а именно: $u(\pi) = \theta(\pi) = 0$:

$$\theta_0(1 + a_1) - n_0(1 - a_2) + m_0 = 0; \quad 2\theta_0(1 + a_3) - \frac{n_0}{2}(1 + a_4) + m_0 = 0, \quad (17)$$

где $n_0 = \frac{\pi R_0^2}{E'J} N_0$; $m_0 = \frac{\pi R_0}{E'J} M_0$; значения констант a_i приведены в табл. 2. Заметим, что выражения a_1 и a_3 зависят от наличия скачка перерезывающей силы в сечении с трещиной (16). Значения θ_0 определяются по формуле (2).

Т а б л и ц а 2

Значения констант a_i для разных величин давления p

a_i	$\chi^2 > 0, \mu = \chi$	$\chi^2 = 0$	$\chi^2 < 0, \mu = \sqrt{-\chi^2}$
a_1	$\frac{1 - \cos \mu\pi}{\mu^2}$	$\frac{\pi^2}{2}$	$\frac{\text{ch } \mu\pi - 1}{\mu^2}$
a_2	$1 - \frac{1}{\mu^2} + \frac{\sin \mu\pi}{\mu^3 \pi}$	$1 - \frac{\pi^2}{6}$	$1 - \frac{\text{sh } \mu\pi}{\mu^3 \pi} + \frac{1}{\mu^2}$
a_3	$\frac{1 - \cos \mu\pi - 2\mu^2}{2\mu^2(1 - \mu^2)}$	$\frac{\pi^2}{4} - 1$	$\frac{\text{ch } \mu\pi - 1 - 2\mu^2}{2\mu^2(1 + \mu^2)}$
a_4	$\frac{2}{\mu^2} - \frac{2 \sin \mu\pi}{\mu^3 \pi(1 - \mu^2)} - 1$	$\frac{\pi^2}{3} - 3$	$\frac{2 \text{sh } \mu\pi}{\mu^3 \pi(1 + \mu^2)} - \frac{2}{\mu^2} - 1$

Дальнейшие упрощения связаны с нахождением КИН. Уравнения (17) позволяют найти n_0 и m_0 , причем очевидно, что $n_0 = O(m_0)$. Поэтому имеем $M_0 = R \cdot O(N_0)$. Кроме того, поскольку $\sigma_N = N_0/t$, $\sigma_M = 6M_0/t^2$ и $R \gg t$, то получим $\sigma_M \gg \sigma_N$. Следовательно, в результирующем выражении для КИН (5) можно пренебречь вкладом продольной силы по сравне-

нию с изгибающим моментом. С учетом действия номинальной продольной силы от внутреннего давления $N_0 = -pR_0$ безразмерный КИН принимает вид

$$Y = Y_0 \left(1 - \frac{Y_M}{Y_0} \frac{f_{pM}}{\frac{R_0}{9t} \lambda(\bar{p}) + f_{MM}} \right) = Y_0 (1 - \omega(\alpha)). \quad (18)$$

Здесь

$$\lambda(\bar{p}) = \frac{3(1 - 2a_2 - a_4)}{3 + 4a_3 - 4a_2 - 4a_2a_3 - a_1 - a_4 - a_1a_4}, \quad (19)$$

где Y_M, Y_0 – безразмерные КИН для случая изгиба и растяжения на бесконечности полосы с трещиной соответственно. Для удобства введено понятие коэффициента уменьшения КИН ω , характеризующего влияние замкнутости контура на расчетные КИН по сравнению с бесконечной полосой, подверженной тем же напряжениям в сечении с трещиной. Заметим, что при $\bar{p} = 1$ значение $\lambda = 9/(3 + \pi^2)$. Выражение (19) при $\bar{p} = 0$ равно единице, и тогда формула (18) совпадает с упрощенным выражением для КИН, полученным в [7], при $\bar{p} \neq 0$ (18) отличается от него множителем λ при $R_0/(9t)$. Поэтому для выяснения влияния \bar{p} на безразмерные значения КИН важно располагать зависимостью $\lambda(\bar{p})$ – рис. 3. Анализ формулы (18) и данных на рис. 3 показал, что с ростом давления жесткость кольца увеличивается, и безразмерные КИН становятся меньше. Влияние \bar{p} проявляется в том, что с его увеличением отношение R_0/t становится как бы меньшим. По-видимому, данный факт уменьшения безразмерных КИН с повышением давления для кольца с трещиной установлен впервые.

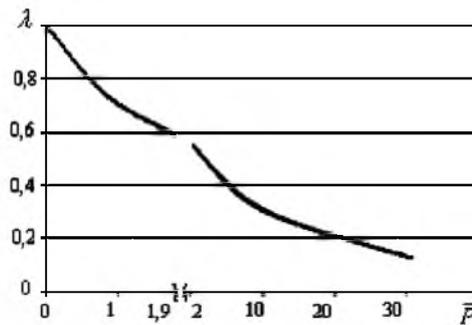


Рис. 3. Зависимость множителя λ от безразмерного давления \bar{p} .

Представляет интерес выяснить, насколько существенно для практически важных случаев такое уменьшение. Прежде всего заметим, что уменьшение КИН в (18) связано с множителем $F_1(\alpha) = \frac{Y_M}{Y_0} f_{pM}$. Для построения функции $F_1(\alpha)$ использовали зависимость для Y_M [20] (рис. 4). Поскольку величина f_{pM} для тонкостенных цилиндров при малых и средних α (при

$\alpha < 0,6$ имеем $f_{pM} < 1$) мала по сравнению с $\beta = R_0/9t$, то, используя значения F_1 , можно легко оценивать величину поправки на КИН в кольце по отношению к бесконечной полосе. Например, при $\alpha = 0,5$ получим $F_1 = 0,2$. Тогда при $R_0/t = 18$ коэффициент уменьшения $\omega \approx 0,1$ для $\bar{p} \ll 1$. Если значение \bar{p} увеличивается и равно, например, единице, то ω также увеличивается, как следует из рис. 4, примерно в $(0,7)^{-1}$ раза.

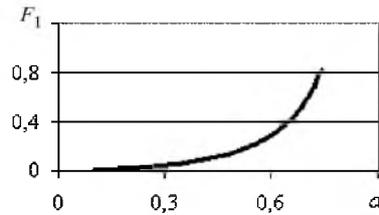


Рис. 4. Зависимость множителя F_1 в коэффициенте уменьшения КИН от относительной глубины трещины α .

Анализ формулы (18) также показал, что коэффициент уменьшения ω зависит от безразмерного давления \bar{p} , которое не может варьироваться в широких пределах. Значение \bar{p} ограничено прочностью кольца (трубы). Поэтому для некоторых конкретных практически возможных случаев рассмотрим влияние кольцевых напряжений $\sigma_\theta = pR_0/t$ на коэффициент уменьшения ω . Выражая σ_θ через \bar{p} , получаем $\bar{p} = \frac{\sigma_\theta(1-\nu^2)R_0^2}{Et^2}$. Принимая

$E = 2 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,3$, построим графики влияния номинального напряжения σ_θ на коэффициент уменьшения КИН (рис. 5). Как видно, для типичных труб с отношением радиуса к толщине стенки от 20 до 40 при типичном уровне напряжений, равных, например, 200 МПа, наблюдается довольно заметное уменьшение безразмерного КИН. Так, для трещины глубиной $\alpha = 0,4$ дополнительное уменьшение КИН, обусловленное действием внутреннего давления, равно $\Delta\omega = \omega(200) - \omega(0) = 0,06$. Влияние давления для более глубоких трещин, например $\Delta\omega = \omega(200) - \omega(0) = 0,15$ при $\alpha = 0,6$, проявляется значительно, что достаточно существенно при оценке прочности трубы с трещиной.

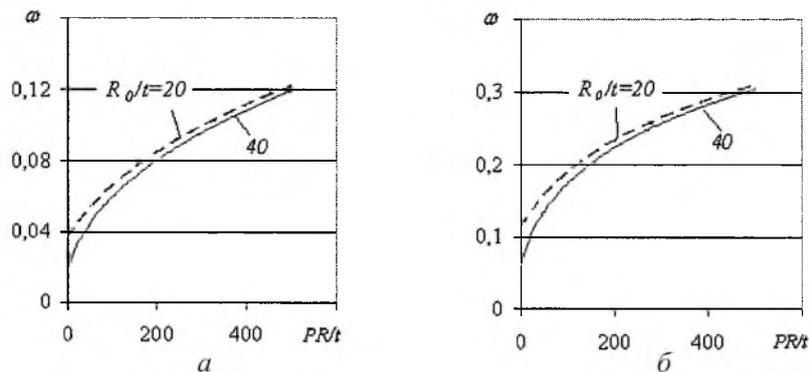


Рис. 5. Влияние уровня окружных напряжений от внутреннего давления на коэффициент снижения КИН для безразмерной трещины глубиной $\alpha = 0,4$ (а) и $0,6$ (б).

3.2. *Расчет КИН в трещине, выходящей из вмятины.* Анализ показал, что расчет трещины во вмятине является сложной, но вполне решаемой задачей, если использовать метод Чжена и Финни и полученные выше решения в рамках МНП. Расчет можно провести с учетом геометрической нелинейности.

При расчете КИН можно использовать методику, описанную в п. 3.1, с той лишь разницей, что в качестве внешнего нагружения в сечении с трещиной, но в предположении ее отсутствия, выступает не только продольная сила, но и изгибающий момент, определенный по формуле (15а). Обозначим его $M_D = \sigma_{MD} t^2 / 6$, где σ_{MD} – уровень максимальных напряжений изгиба, вызванных неправильностью формы сечения трубы.

Согласно формуле (15), максимальные изгибные напряжения в сечении $\varphi = 0$ определяются выражением

$$\sigma_{MD} = 6 \frac{pR}{t} \sum_{n=2} \frac{a_n R}{t} \frac{(n^2 - 1)}{n^2 - \chi^2}. \quad (20)$$

Очевидно, что при малых значениях \bar{p} ($\chi = 1$) получим

$$\sigma_{MD} = \frac{pR}{t} \frac{6W}{t}, \quad (21a)$$

где W – максимальный прогиб вмятины, т.е. указанные напряжения не зависят от формы вмятины, а зависят от отношения W/t .

С увеличением внутреннего давления \bar{p} значение χ^2 уменьшается, что приводит к снижению σ_{MD} . Однако коэффициент уменьшения ω зависит от формы вмятины, т.е. от значения параметров n и χ . Понятно, что эти напряжения будут минимальными (при том же уровне максимального прогиба W) для сечения трубы овальной формы ($n = 2$), а максимальными – в случае локальной вмятины, форма которой описывается большими гармониками ряда Фурье ($n \gg 2$). Для этой формы величина напряжений определяется по формуле (21а). Для сечения трубы овальной формы имеем

$$\sigma_{MD} = \frac{pR}{t} \frac{6W}{(1 + \bar{p}/3)t}. \quad (21б)$$

По-видимому, теперь для определения дополнительного изгибающего момента в сечении с трещиной, возникшего из-за локальной сосредоточенной податливости, необходимо воспользоваться уравнениями вида (17), для получения которых в уравнении (2) следует учитывать изгибающий момент от вмятины.

Повторяя выкладки, приведенные в п. 3.1, и, полагая глубину вмятины незначительной, что позволяет принять $N = -pR_0$, а также рассматривая задачу в геометрически нелинейной постановке, можно достаточно легко получить приближенную формулу для дополнительного изгибающего момента, возникающего из-за трещины:

$$M_0 = \frac{1}{6} \sigma_M t^2 = \frac{(pR_0/t)f_{pM} + \sigma_{MD}(\bar{p})f_{MM}}{R_0/(9t)\lambda(\bar{p}) + f_{MM}}. \quad (22)$$

Тогда формулу для расчета КИН запишем в виде

$$K_I = ((pR_0/t)Y_0 + (\sigma_{MD} - \sigma_M)Y_M)\sqrt{\pi a}, \quad (23)$$

что позволит легко рассчитывать КИН для трещин, выходящих из вмятин, при любом уровне действующего внутреннего давления.

Выводы

1. Для кругового кольца получены уравнения МНП с учетом геометрической нелинейности, а именно: с учетом влияния значений изгибающего момента на кривизну.

2. По-видимому, впервые для тонкостенной трубы получены формулы для расчета КИН с учетом геометрической нелинейности. Показано, что в рамках упругой постановки с ростом прикладываемых напряжений от внутреннего давления безразмерный КИН не остается постоянным, а несколько уменьшается.

3. Предложены упрощенные формулы для расчета КИН для трещин, выходящих из самой глубокой точки вмятины.

Резюме

Для розрахунку коефіцієнтів інтенсивності напружень у пружних трубах із довгими дефектами застосовується відомий метод Чжена та Фінні. Запропоновано універсальний опис характеру поведінки балки, для якої отримано та використовуються рівняння методу початкових параметрів з урахуванням геометричної нелінійності (вплив осевої сили на поперечне деформування). Це дозволило, можливо, вперше отримати значення коефіцієнтів інтенсивності напружень для тонкостінної труби в геометрично нелінійній постановці, коли збільшення тиску призводить до деякого “уповільненого” їх росту. Результати узагальнено для більш складного дефекту – тріщини, що виходить із вершини вм’ятини.

1. Rice J. R. and Levy N. The part-through surface crack in a elastic plate // J. Appl. Mech. – 1972. – 39. – P. 185 – 194.
2. Delale F. and Erdogan F. Application of the line-spring model to a cylindrical shell containing a circumferential or axial part-through crack // Trans. ASME. J. Appl. Mech. – 1982. – 49. – P. 97 – 102.
3. Кушнір Р. М., Николішин М. М., Осадчук В. А. Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами. – Львів: Сполом, 2003. – 320 с.
4. Чжен В., Финни Я. Метод измерения осесимметричных продольных остаточных напряжений в тонкостенных цилиндрах, сваренных кольцевым швом // Теорет. основы инж. расчетов. – 1985. – № 3. – С. 1 – 10.

5. Чжен В., Финни Я. Расчет коэффициента интенсивности напряжений для осесимметричных трещин в тонкостенных цилиндрах с использованием решения задачи о плоской деформации // Там же. – С. 84 – 97.
6. Чжен В., Финни Я. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для несквозных продольных трещин в тонкостенных цилиндрах // Там же. – 1986. – № 2. – С. 1 – 6.
7. Орыняк И. В., Розгонюк В. В., Яковлева Е. С. Обобщение метода Чжена и Финни для расчета коэффициента интенсивности напряжений для несквозных трещин в толстостенном кольце // Пробл. машиностроения и надежности машин. – 2006. – № 2. – С. 37 – 46.
8. Вислобіцький П. А. Розрахунки граничних станів колон труб та трубопроводів. – Київ: Логос, 1997. – 364 с.
9. Виноградов С. В. Расчет подземных трубопроводов на внешние нагрузки. – М.: Стройиздат, 1980. – 134 с.
10. Orynyak I. V., Bogdan A. V., and Rozgonyuk V. V. Ductile fracture model for a pipe with a dent // Proc. 4th Int. Conf. on Pipeline Technology / Ed. R. Denys (Ostend, Belgium, May, 2004). – Ostend, 2004. – 7. – P. 949 – 960.
11. Хажинский Г. М. Приближенная оценка напряжений на вмятинах цилиндрических оболочек // Химическое и нефтегазовое машиностроение. – 2005. – № 3. – С. 14 – 16.
12. API. Recommended Practice for Fitness-for-Service. APT 579. – Washington: American Petroleum Institute, 2000.
13. ASME B31.8. Gas Transmission and Distribution Piping Systems. – New York: ASME, 2003.
14. Bai Y. and Song R. Fracture assessment of dented pipes with cracks and reliability-based calibration of safety factor // Int. J. Press. Vess. Piping. – 1997. – 74. – P. 221 – 229.
15. Coshan A. and Hopkins P. The pipeline defect assessment manual // Proc. of IPC 2002: Int. Pipeline Conf. (Calgary, Alberta, Canada, Sep. – Oct., 2002). – Calgary, Alberta, Canada, 2002.
16. Орыняк И. В., Бородий М. В. Використання наближеного фундаментального розв'язку для півплощини з крайовою тріщиною в комбінованому методі вагових функцій // Фіз.-хім. механіка матеріалів. – 1994. – № 4. – С. 105 – 108.
17. Orynyak I. V. and Borodii M. V. The combined weight function method application for a hole emanated crack // Eng. Fract. Mech. – 1994. – 48, No. 6. – P. 891 – 894.
18. Новожилов В. В. Теория упругости. – Л.: Судпромгиз, 1958. – 370 с.
19. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. – М.: Наука, 1978. – 360 с.
20. Tada H., Paris P. C., and Irvin G. R. The Stress Analysis of Cracks: Handbook. – Hellertown: Del Research Corp., 1973. – 385 p.

Поступила 21. 06. 2006