

УДК 581.1: 631.4

## ПРОМАЧИВАНИЕ СУФФОЗИОННЫХ ГРУНТОВ. II. СЛОЙ КОЛЬМАТАЖА - ПРЕДПОСЫЛКИ И ФОРМИРОВАНИЕ

В. Л. ПОЛЯКОВ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев

Получено 03.06.2003

На основе строгого теоретического решения одномерной нестационарной задачи совместных фильтрации и массопереноса в промачиваемом суффозионном грунте исследуются фильтрационные деформации в условиях существенно снижения интенсивности инфильтрационного питания  $I$ . Анализируются закономерности осаждения подвижных неструктурных частиц и образование кольматационного слоя. Рассмотрены случаи равномерного и неравномерного изменения  $I$  при варьировании исходного содержания суффозионных частиц в широких пределах. Установлены границы области применения принятой математической модели и обсуждаются пути ее совершенствования. Выполнена качественная оценка уменьшения проницаемости грунта вследствие перераспределения и осаждения мобильных частиц.

З використанням точного аналітичного розв'язку одновимірної неусталеної задачі сумісних фільтрації і масопереносу в суффозійному ґрунті при його промочуванні досліджуються фільтраційні деформації в умовах суттєвого зниження інтенсивності інфільтраційного живлення  $I$ . Аналізуються закономірності осадження рухомих неструктурних часток і утворення кольматацийного шару. Розглянуті випадки рівномірної і нерівномірної зміни  $I$  при варіюванні вихідного вмісту суффозійних часток у широких границях. Встановлені границі області застосування прийнятої математичної моделі і обговорюються шляхи її вдосконалення. Виконана кількісна оцінка зменшення проникності ґрунту внаслідок перерозподілу і осадження мобільних часток.

Filtration deformations are considered under conditions of significant decreasing infiltration rate  $I$  based on an exact analytical solution to one-dimensional unsteady problem of joint groundwater and mass transfer within suffosion soil. Regularities of mobile unstructural particles fallout and colmatage layer formation are analyzed. The cases of uniform and nonuniform changing rate  $I$  are under study at various initial particle contents. Limits of field of mathematical model application are established and ways of its developing are discussed. An estimation are performed for reducing soil permeability due to redistribution and fallout of mobile particles.

### ВВЕДЕНИЕ

Механическая суффозия, вызванная действием водоисточника (поверхностного или внутреннего) в несвязном грунте, на практике часто обуславливает существенное ухудшение его воднофизических свойств и прежде всего проницаемости [1 – 5]. Оттеснение суффозионных частиц от источника ведет к нарастанию их концентрации на удалении от него. Тем самым в зоне, аккумулирующей эти частицы, фактическая пористость уменьшается, а сопротивление, оказываемое фильтрационному потоку со стороны твердой фазы грунта, растет. Прогрессирующее развитие суффозионных процессов со временем может привести к массовому осаждению подвижных частиц и образованию таким образом слоя кольматажа. В связных грунтах, искусственных пористых материалах с организованной структурой мобильные частицы захватываются своего рода ловушками – суженными местами поровых каналов, тупиковыми порами [6 – 8]. По существу, формирование слоя кольматажа в таких грунтах носит случайный характер, а наиболее эффективными для изучения кольматационного процесса представляют

методы теории вероятностей. Однако их практическое использование в задачах кольматажа в настоящее время тормозится из-за отсутствия обширных экспериментальных данных, которые необходимы для установления вероятностных закономерностей массообмена между структурной и неструктурной компонентами грунта. В отличие от этого в несвязных грунтах и материалах осаждение подвижных частиц является физико-механическим процессом, для формального описания которого предпочтительнее применять детерминистический подход. Широкое применение в теоретических исследованиях массообмена между двухфазным потоком грунтовых вод и скелетом грунта, в частности, явления кольматажа, нашли модели химической кинетики [9 – 12], в которых их компоненты трактуются с позиций механики многофазных сред. Однако здесь возникают немалые осложнения при выборе модельных коэффициентов, которые обосновываются чисто формальным путем подгонки расчетных результатов к опытным. Вместе с тем многочисленные опыты, особенно выполненные в фильтрационных колонках с искусственными (приготовленными из специально отсортированных частиц) и естественными грун-

тами в качестве наполнителя [13, 14], свидетельствуют о существовании для каждого сорта подобных частиц характерной скорости движения воды в порах, при достижении которой фильтрационным течением они меняют свое механическое состояние. Поэтому необходимым условием образования слоя кольматажа в несвязном грунте является такое снижение действительной скорости грунтовых вод  $u$  на соответствующем участке фильтрационного потока, в результате которого будет  $u \leq u_k$ . Отмеченное изменение скорости  $u$  может быть инициировано как внешними причинами (уменьшение мощности водоисточника), так и внутренними (падение фильтрационной способности грунта). Однако в данной работе эти причины не обсуждаются, а только констатируется факт постепенного снижения скорости впитывания воды в грунт  $I$ . Вообще природные грунты представляют собой специфические дисперсные системы, обладающие сложным мехсоставом – размеры их частиц, по сути, непрерывно меняются в весьма широких пределах. Обычно практикуемое условное разделение твердой фазы грунта на группы близких по размерам частиц (фракций) применительно к суффозионным его разновидностям означает, что процессы взвешивания и осаждения в нем будут характеризоваться набором значений  $u_{ki}$  по числу фракций в суффозионной компоненте этой фазы. Поскольку цель работы заключается в теоретическом изучении общих свойств фильтрационных деформаций и закономерных изменений водно-физических характеристик промачиваемых суффозионных грунтов, то в качестве физического объекта исследований выбран, как и в более ранних работах, гипотетический грунт, сложенный из частиц скелета, а также неструктурных частиц примерно одного размера. Данная работа продолжает количественный анализ на базе аналитических методов суффозионных и кольматационных процессов при интенсивном впитывании воды в двухфракционный суффозионный грунт.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ЗАВИСИМОСТИ

Расход воды, притекающей в грунт с единичной площади его поверхности, по аналогии с первой частью данной работы [15] является заданной функцией времени  $I(t)$ . Расчетные зависимости вытекают из строгого решения математической задачи промачивания суффозионного грунта, полученного там же. Однако в данной части работы детально рассматриваются уже случаи равномерного и неравномерного снижения  $I$ , причем вплоть до значений, при которых или принятая модель

становится некорректной, или (если это допускается водно-физическими условиями и самой моделью) формируется кольматационный слой. Тем самым моделируемая фильтрационная картина в общих чертах будет согласовываться с реальной, для которой характерно монотонное уменьшение интенсивности инфильтрации и скорости фильтрационного течения. Ниже представлены в основном зависимости, которые затем применяются в расчетах примеров и имеют принципиальные отличия от их аналогов, приведенных в первой части для ряда случаев усиления инфильтрации. Указанные зависимости предназначены для расчетов концентрации подвижных и осажденных суффозионных частиц, действительной скорости течения грунтовых вод, положения границ аккумулялирующей зоны и слоя кольматажа, относительной проницаемости грунта и даны отдельно для линейного и показательного (экспоненциального) законов изменения  $I$ .

Случай I:  $I = \lambda_1 + \lambda_2 t$ .

Первостепенное значение для углубления представлений об особенностях фильтрационных деформаций имеет относительная концентрация подвижных частиц  $N_c$ , которая позволяет не только обоснованно судить о динамике пористости, проницаемости промачиваемого грунта, но и количественно оценивать фильтрационные свойства кольматационного слоя. Соответствующее выражение для  $N_c$  заимствовано из [15]:

$$N_c = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 \xi}{1 - m_s}, \quad (1)$$

где  $N_c = n_c/m_c$ ,  $n_c$  – объемная концентрация подвижных частиц,  $m_c$  – доля суффозионных частиц в недеформированном грунте (распределены равномерно);  $\beta = m_c/(1 - m_s)$ ,  $m_s$  – доля частиц, образующих скелет грунта;  $\xi$  – параметр, который при убывании скорости  $I$  ( $\lambda_2 < 0$ ) вычисляется следующим образом:

$$\xi = \alpha_1 + \frac{2}{3}t + \sqrt{\psi(t) - \alpha_2 z}. \quad (2)$$

Здесь

$$\alpha_1 = \frac{1 - \beta - \beta\lambda_1}{3\beta\lambda_2}, \quad \alpha_2 = \frac{2(1 - \beta)}{3\beta\lambda_2},$$

$$\psi(t) = b_2 t^2 + b_1 t + b_0, \quad b_2 = \frac{\beta + 3}{9\beta},$$

$$b_1 = \frac{2(3\lambda_1 + \beta\lambda_1 + \beta - 1)}{9\beta\lambda_2}, \quad b_0 = \alpha_1^2.$$

Положение нижней границы аккумулялирующей зоны, совпадающей с фронтом промачивания до

момента начала образования слоя кольматажа, будет характеризоваться координатой  $z_a$ , которая рассчитывается по формуле

$$z_a = \frac{1}{1-\beta} \left( \lambda_1 t + \frac{1}{2} \lambda_2 t^2 \right). \quad (3)$$

Координата  $z_b$  верхней границы вышеупомянутой зоны находится из условия сохранения исходного количества (массы) неструктурных частиц в пределах области деформаций после их взвешивания и перераспределения. При сокращающемся притоке воды в грунт ( $\lambda_2 < 0$ ) это условие преобразуется к виду

$$\left( \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \frac{2}{3} \lambda_2 t \right) z_b - \frac{2\lambda_2}{3\alpha_2} (\psi - \alpha_2 z_b)^{\frac{3}{2}} = \quad (4)$$

$$= \left( \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \beta - 1 + \frac{2}{3} \lambda_2 t \right) z_a - \frac{2\lambda_2}{3\alpha_2} (\psi - \alpha_2 z_a)^{\frac{3}{2}}.$$

Безразмерную скорость фильтрационного течения  $u$  можно рассчитывать или воспользовавшись непосредственно решением суффозионной задачи [15], или исходя из текущих значений  $N_c$ ,  $I$ , и тогда

$$u = \beta N_c + I. \quad (5)$$

Чисто суффозионный процесс (взвешивание и перенос неструктурных частиц) будет продолжаться до момента времени  $t_0$ , когда скорость  $u$  на фронте промачивания понизится до единицы (размерная – до критической). Указанный момент в соответствии с видом кинематического условия на фронте и функции  $I(t)$  будет

$$t_0 = \frac{1 - \beta - \lambda_1}{\lambda_2}. \quad (6)$$

После этого начинается формирование кольматационного слоя. Положение нижней границы данного слоя не меняется со временем, а ее координата  $z_{k0}$  равна  $z_a(t_0)$ , то есть находится согласно формулы (3) при  $t = t_0$ . В то же время вторая граница указанного слоя перемещается вверх от начального положения  $z_{bk}(t_0) = z_{k0}$  до конечного  $z_{bk}(t_e) = z_{ke}$ , которое она достигает в момент  $t_e$ . Зависимость  $z_k(t)$  следует из решения исходной задачи при  $u = 1$  и имеет вид

$$z_k = \gamma_2 t^2 + \gamma_1 t + \gamma_0, \quad (7)$$

где

$$\gamma_2 = -\frac{3\lambda_2}{2\beta}, \quad \gamma_1 = \frac{2 - \beta - 3\lambda_1}{\beta},$$

$$\gamma_0 = \frac{(\lambda_1 + \beta - 1)(1 - \beta - 3\lambda_1 + 2\beta\lambda_1)}{2\beta(1 - \beta)\lambda_2}.$$

Концентрация осажденных к промежуточному моменту  $t$  ( $t_0 < t < t_e$ ) частиц в пределах уже сформированной части кольматационного слоя  $N_{ck}$  (окончательный вид он приобретает при  $t = t_0$ ) не меняется со временем, то есть  $N_{ck} = N_{ck}(z)$ . Величина  $N_{ck}$  также формально определяется по формуле (1), а параметр  $\xi$  – согласно (2), но с учетом зависимости  $t(z)$ , которая в данном случае имеет вид

$$t = -\frac{1}{2\gamma_2} \left( \gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 - 4\gamma_0\gamma_2 + 4\gamma_2 z} \right). \quad (8)$$

Перемещение верхней границы аккумулирующей зоны на протяжении периода образования кольматационного слоя  $z_{bk}(t)$  рассчитывается на основе условия сохранения объема (массы) взвешенных к моменту  $t_0$  суффозионных частиц. Тогда в любое фиксированное время  $t$  ( $t_0 \leq t \leq t_e$ ) доля суммы объемов грунта, занятых взвешенными, подвижными и уже осажденными частицами, равна  $z_{k0}$ , а уравнение баланса указанных частиц в общей форме представляется таким образом:

$$\int_{z_{k0}}^{z_k} N_{ck}(\xi(t(z), z)) dz + \int_{z_k}^{z_{bk}} N_c(\xi(z, t)) dz = z_{k0}. \quad (9)$$

После интегрирования функций  $N_{ck}(\xi)$ ,  $N_c(\xi)$  уравнение относительно  $z_{bk}$  становится чрезмерно громоздким и поэтому здесь не приводится. Кольматационный процесс заканчивается к моменту полного осаждения всех подвижных и взвешенных частиц, и тогда  $N_c = 0$ ,  $z_k(t_e) = z_b(t_e) = z_{ke}$ , а уравнение для  $z_{ke}$  заметно проще, чем для  $z_{bk}$ , а именно:

$$S(z_{ke}) = S(z_{k0}) - (1 - \beta) z_{k0}, \quad (10)$$

где

$$S_k(z_{ki}) = \left( \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 - \frac{\gamma_1 \lambda_2}{3\gamma_2} \right) z_{ki} - \frac{4\lambda_2}{9\sqrt{\gamma_2}} (z_{ki} + \chi)^{3/2} +$$

$$+ \frac{2\lambda_2}{\mu_2} \left[ \frac{G_i^{3/2}}{3} - \frac{\mu_1 (2\mu_2 \sqrt{z_{ki} + \chi} + \mu_1)}{8\mu_2} G_i^{1/2} \right] -$$

$$- \frac{\lambda_2 \mu_1 (4\mu_0 \mu_2 - \mu_1^2)}{8\mu_2} L_i,$$

$$i = e, 0, \quad \chi = \frac{\gamma_1^2 - 4\gamma_0\gamma_2}{4\gamma_2},$$

$$\mu_2 = \frac{b_2}{\gamma_2} - \alpha_2, \quad \mu_1 = \frac{b_2 \gamma_1 - b_1 \gamma_2}{\gamma_2^{3/2}},$$

$$\mu_0 = \frac{b_2 (\gamma_1^2 - 2\gamma_0\gamma_2)}{2\gamma_2^2} - \frac{b_1 \gamma_1}{2\gamma_2} + b_0 - \chi \left( \frac{b_2}{\gamma_2} - \alpha_2 \right),$$

$$G_i = \mu_2(z_{ki} + \chi) + \mu_1\sqrt{z_{ki} + \chi} + \mu_0,$$

$$L_i = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}} \times$$

$$\times \ln | 2\sqrt{\mu_2^2(z_{ki} + \chi) + \mu_1\mu_2\sqrt{z_{ki} + \chi} + \mu_0\mu_2} +$$

$$+ 2\mu_2\sqrt{z_{ki} + \chi} + \mu_1 |.$$

В результате анализа уравнения (10) установлено, что коэффициент при функции на два и более порядков меньше остальных коэффициентов. Поэтому соответствующие слагаемые в (10) можно опустить, что в целом облегчает нахождение  $z_{ke}$ .

Случай II:  $I = \nu_1 e^{\nu_2 t}$ .

Для расчета относительной концентрации  $N_c$  также применяется формула из [15]:

$$N_c = \frac{\nu_1}{1 - \beta} e^{\nu_2 \xi}, \quad (11)$$

где

$$\xi = \frac{1}{\nu_2} \left[ \ln \frac{1 - \beta}{\beta \nu_1} + \ln (u - \nu_1 e^{\nu_2 t}) \right]. \quad (12)$$

Координаты нижней и верхней границ аккумуляющей зоны вычисляются следующим образом:

$$z_a = \frac{\nu_1}{\nu_2(1 - \beta)} (e^{\nu_2 t} - 1), \quad (13)$$

$$z_b = \frac{\beta \nu_1}{\nu_2(1 - \beta)} e^{\nu_2 \xi_b} + \left( \frac{2\beta \nu_1}{1 - \beta} e^{\nu_2 \xi_b} - 1 \right) (t - \xi_b) +$$

$$+ \frac{\nu_1}{\nu_2} e^{\nu_2 t} - \frac{\nu_1}{\nu_2(1 - \beta)}, \quad (14)$$

где параметр  $\xi_b$  определяется из решения уравнения

$$\frac{\beta \nu_1}{\nu_2(1 - \beta)} (t - \xi_b) e^{2\nu_2 \xi_b} + e^{\nu_2 \xi_b} = 1. \quad (15)$$

Осаждение суффозионных частиц начинается в момент

$$t_0 = \frac{1}{\nu_2} \ln \frac{1 - \beta}{\nu_1}. \quad (16)$$

Распределение осажденных частиц на образовавшемся за время от  $t_0$  до  $t$  ( $t \leq t_e$ ) участке слоя кольматажа (относительная концентрация  $N_{ck}$ ) также устанавливается исходя из формулы (11), но с учетом связи между  $z$  и  $\xi$ :

$$z = \frac{1}{\nu_2} \left\{ 1 - \nu_1 - \frac{\beta \nu_1}{1 - \beta} + \left( \frac{2\beta \nu_1}{1 - \beta} e^{\nu_2 \xi} - 1 \right) \times \right. \quad (17)$$

$$\left. \times \left[ \ln \left( \frac{1}{\nu_1} - \frac{\beta}{1 - \beta} e^{\nu_2 \xi} \right) - \nu_2 \xi \right] \right\}.$$

Уравнение (17) вместе с выражением для текущего момента

$$t = \frac{1}{\nu_2} \ln \left( \frac{1}{\nu_1} - \frac{\beta}{1 - \beta} e^{\nu_2 \xi} \right) \quad (18)$$

позволяет рассчитать наряду с  $N_{ck}$  и перемещение верхней границы слоя кольматажа, то есть  $z_k(t)$ . В явном же виде эта зависимость имеет вид

$$z_k = \frac{1}{\nu_2} \left( 1 - \frac{\nu_1}{1 - \beta} \right) + (1 - 2\nu_1 e^{\nu_2 t}) \times \quad (19)$$

$$\times \left[ t - \frac{1}{\nu_2} \ln \frac{1 - \beta}{\beta \nu_1} - \frac{1}{\nu_2} \ln(1 - \nu_1 e^{\nu_2 t}) \right].$$

Положение границы  $z = z_b(t)$  в период осаждения неструктурных частиц находится с использованием условия (9). В момент  $t_e$  верхние границы аккумуляющей зоны и слоя кольматажа совпадают, а значит все ранее взвешенные частицы перейдут в осажденное состояние и деформационный процесс полностью прекратится. Момент  $t_e$  и координата  $z_{ke}$  определяются на базе следующего уравнения относительно  $\xi_e$ :

$$R(\xi_e) = R(\xi_0) - \frac{\nu_2(1 - \beta)^2}{\beta \nu_1^2} z_{k0}, \quad (20)$$

$$R(\xi_i) = e^{2\nu_2 \xi_i} \ln(1 - \beta - \beta \nu_1 e^{\nu_2 \xi_i}) -$$

$$- [\nu_2 \xi_i + \ln(\nu_1 - \beta \nu_1)] e^{2\nu_2 \xi_i} + \frac{1 - \beta}{\beta \nu_1} e^{\nu_2 \xi_i},$$

где  $i = e, 0$ ;  $\xi_0$  вычисляется по формуле (12) при  $t = t_0$ . После нахождения  $\xi_e$  момент  $t_e$  рассчитывается по формуле (18), а координата  $z_{ke}$  – по (19).

## 2. РАСЧЕТЫ ПРИМЕРОВ, АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

Расчитаны многочисленные примеры с использованием ряда формул, представленных в предыдущем разделе и первой части общей работы [15] для обоих видов (линейного и экспоненциального) функции  $I(t)$ . Значения коэффициентов  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и параметра  $\beta$  варьировались в широких пределах с тем, чтобы более полно охватить разнообразные физико-механические условия, встречающиеся в природе и инженерной практике. В частности, исходная концентрация суффозионных частиц при проведении количественного анализа изменялась фактически от 0 до величин, соизмеримых с содержанием структурных частиц, образующих скелет грунта. Коэффициенты  $\lambda_1$ ,  $\nu_1$  обобщенно отражают особенности протекания на начальной стадии деформаций переходных процессов, в которых важную роль играют силы инерции. Для строгого обоснования этих коэффициентов исходную математическую модель необходимо

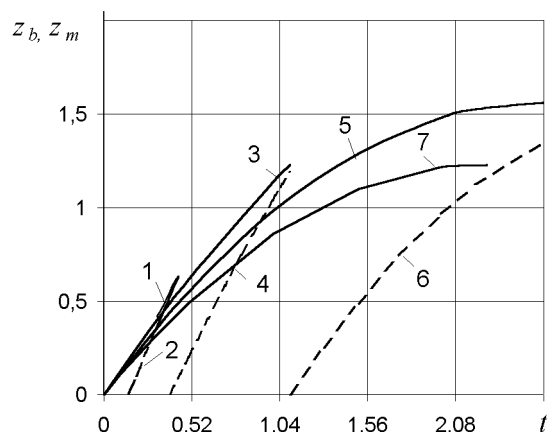


Рис. 1. Изменение координат  $z_b$  (кривые 1, 3, 5, 7) и  $z_m$  (кривые 2, 4, 6) во времени: 1, 2 –  $\beta = 0.2$ ; 3, 4 –  $\beta = 0.15$ ; 5, 6 –  $\beta = 0.1$ ; 7 –  $\beta = 0.05$

обобщить, дополнив уравнения движения соответствующими слагаемыми. Однако в данной работе подобная цель не ставилась, и поэтому принимались ориентировочные значения всех вышеупомянутых коэффициентов в соответствии с имеющейся экспериментальной информацией. Коэффициенты  $\lambda_2$ ,  $\nu_2$  характеризуют скорость, с которой приток воды в грунт убывает из-за снижения мощности поверхностного источника или ухудшения фильтрационных условий. Вместе с  $\lambda_1$ ,  $\nu_1$  они определяют, с одной стороны, длительность периода деформаций, а с другой – границы области применения исходной математической модели.

Особое внимание по формальным соображениям уделено случаю линейного изменения  $I$ . Прежде всего рассматривалась динамика подвижных частиц до начала формирования слоя кольматажа ( $t < t_0$ ). Расчету профилей относительной концентрации  $N_c$  и скорости  $u$  в аккумулярующей зоне на различные моменты времени предшествовало установление ее границ. Для этого использовались формулы (3) и (4). В ходе вычислений координаты  $z_b$  выяснилось, что функция  $z_b(t)$  при больших значениях  $\beta$  ограничена сверху и поэтому дальнейшее увеличение  $z_b$  в рамках принятой модели, строго говоря, невозможно. На рис. 1 показаны кривые  $z_b(t)$ , рассчитанные для  $\beta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$  вплоть до максимально допустимых с физической точки зрения значений  $z_b$ . Эти значения в дальнейшем обозначаются  $z_*$  и составляют при  $\beta = 0.15, 0.2$  соответственно 1.28 и 0.63. Ограничения на рост  $z_b$  накладываются исходной моделью, несовершенство которой проявилось при высоком содержании суффозионных

частиц. Вообще на фиксированный момент времени  $t$  функции  $u(z)$  и  $N_c(z)$  определены на полупрямой  $z \geq z_m(t)$ , причем при  $z > z_m$  они являются двузначными. Однако физический смысл имеют только их нижние ветви, отражающие реальное снижение скорости  $u$  и концентрации  $N_c$  с увеличением  $z$ . По мере приближения  $z$  к  $z_m$  справа  $\partial u / \partial z$  неограниченно возрастает и при  $z = z_m$  обращается в бесконечность. Тогда даже при малых значениях коэффициента конвективной диффузии (коэффициентов гидродисперсии и молекулярной диффузии), характерных для потока неструктурных частиц в пористых средах, диффузионный механизм их переноса может оказаться не только соизмеримым с конвективным, но и более значимым. Таким образом, при достаточно большом сближении  $z_b$  и  $z_m$  в непосредственной близости от них приобретает важное значение явление диффузии, и есть все основания выделить своего рода пограничный слой, в котором локализируются резкие изменения физико-механических характеристик. Для аккуратного учета влияния данного погранслоя на двухфазное течение достаточно воспользоваться уравнением конвективно-диффузионного (дисперсионного) переноса. При этом, однако, меняются тип и порядок исходной системы уравнений, следует дополнительно задавать граничное условие и коэффициент конвективной диффузии. В итоге, математическая модель значительно усложняется, а исследование ее аналитическими и численными методами оказывается очень затруднительным. В целом, как известно [16 – 19], диффузионный процесс в потоках растворов, дисперсных смесей препятствует образованию зон с резко отличающимися концентрационными характеристиками, способствуя размыванию границы между ними. Применительно к задаче механической суффозии в промачиваемом грунте это означает, что протяженность аккумулярующей зоны растёт, а пик концентрации суффозионных частиц (при  $z = z_b$ ) сглаживается. Если все-таки оставить математическую модель без изменений, то отмеченные выше особенности перераспределения таких частиц в области деформаций можно по крайней мере попытаться учесть, используя в расчетах при  $z < z_m$  вторые ветви функций  $u(z)$  и  $N_c(z)$ . Тогда отчасти изменится уравнение (4) для координаты  $z_b$ , которая будет теперь меньше  $z_m$ . Тем самым появляется формальная возможность проводить расчеты и при  $t > t_*$  ( $t_*$  – время пересечения кривых  $z_b(t)$ ,  $z_m(t)$  и  $z_b(t_*) = z_m(t_*) = z_*$ ). При подобной интерпретации полученного решения рост концентрации  $N_c$  в окрестности  $z = z_b$  продолжится, постепенно за-

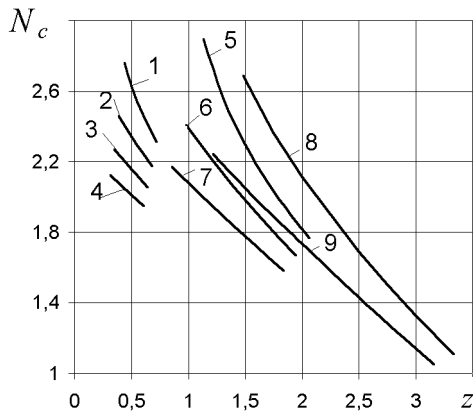


Рис. 2. Профили концентрации подвижных суффозионных частиц:  
 1-4 -  $t = 0.3$ ; 5-7 -  $t = 1$ ; 8, 9 -  $t = 2$ ;  
 1 -  $\beta = 0.2$ ; 2, 5 -  $\beta = 0.15$ ;  
 3, 6, 8 -  $\beta = 0.1$ ; 4, 7, 9 -  $\beta = 0.05$

медляясь, и, что самое важное, удается сохранить баланс массы неструктурных частиц в области деформаций. Тем не менее существуют серьезные опасения, что такой искусственный прием может привести к значительному отклонению расчетной картины от фактической, особенно в верхней части аккумулярующей зоны. Также на основе по существу этой же модели возможен и более надежный в физическом отношении учет диффузионного фактора. Соответствующее уточнение теоретических результатов достигается путем корректировки свободного члена в уравнении (5) работы [15], исходя из выражения для диффузионной компоненты потока твердых частиц и с применением в качестве нулевого приближения полученных там же точных зависимостей для  $u$ ,  $N_c$ . При таком подходе вклад диффузионного массопереноса в общую динамику твердой и жидкой фаз грунта реализуется через дополнительный распределенный источник частиц (скорости). Очевидно, что здесь в отличие от описанного выше приема и модель, и ее решение будут содержать коэффициент, непосредственно характеризующий диффузионный процесс.

Но, конечно, в полной мере достоверными все-таки следует считать только результаты, полученные на базе точного решения [15], которые правомочны в строго определенных пространственно-временных и физических рамках. Подобные ограничения станут предметом дальнейшего детального анализа. При расчете предельных для  $z_b$  значений  $z_*$  соответствующие им моменты  $t_*$  находились как абсциссы общих точек кривых  $z_b(t)$  и

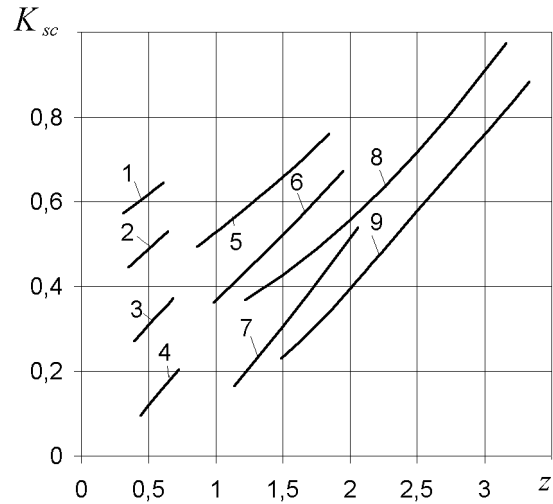


Рис. 3. Профили относительной проницаемости:  
 1-4 -  $t = 0.3$ ; 5-7 -  $t = 1$ ; 8, 9 -  $t = 2$ ;  
 1, 5, 8 -  $\beta = 0.05$ ; 2, 6, 9 -  $\beta = 0.1$ ;  
 3, 7 -  $\beta = 0.15$ ; 4 -  $\beta = 0.2$

$z_m(t)$ , причем  $z_m$  вычислялось по формуле

$$z_m = \frac{\psi(t)}{\alpha_2}. \quad (21)$$

Величина  $z_m(t)$  для  $\beta = 0.1, 0.15, 0.2$  также изображена на рис. 1, а аналогичная кривая для  $\beta = 0.05$  находится ниже оси абсцисс и поэтому не попала в поле графика.

Непосредственно моменты  $t_*$  определялись из решения следующего уравнения:

$$\begin{aligned} \psi(t_*) \left( \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \frac{2}{3} \lambda_2 t_* \right) - \frac{\alpha_2}{1-\beta} \left( \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2 + \right. \\ \left. + \frac{2}{3} \lambda_2 t_* - 1 + \beta \right) \left( \lambda_1 t_* + \frac{\lambda_2 t_*^2}{2} \right) + \\ \left. + \frac{2\lambda_2}{3} \left[ \psi(t_*) - \frac{\alpha_2}{1-\beta} \left( \lambda_1 t_* + \frac{\lambda_2 t_*^2}{2} \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Расчеты профилей  $N_c(z)$  выполнялись по формуле (1) на моменты времени, которые выбирались с учетом значений  $t_*$  согласно (22), а именно:  $t = 0.3$  ( $\beta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$ ),  $t = 1$  ( $\beta = 0.05, 0.1, 0.15$ ) и  $t = 2$  ( $\beta = 0.05, 0.1$ ). Данные расчетов иллюстрируются кривыми на рис. 2. Естественно, что с увеличением  $\beta$  концентрация подвижных частиц возрастает и поэтому профили  $N_c(z)$  при больших  $\beta$  расположены выше. Протяженность аккумулярующей зоны со временем также растет. Концентрация  $N_c$  на нижней границе указанной зоны снижается в связи с уменьшением интенсивности инфильтрации, а на верхней – незначительно увеличивается (в меньшей степени при малых

$\beta$ ). Накопление твердых частиц в нижней части области деформаций обуславливает здесь заметное снижение проницаемости грунта. Величина относительной проницаемости  $K$  рассчитывалась на основе зависимостей для проницаемости однородной и двухфракционной твердых фаз [20], из которых вытекает следующая формула [21]:

$$K = \frac{\lambda_K (1 - \beta N_c)^4 u}{\gamma^4 D^2 N_c^2 + (\beta + \gamma - \beta\gamma N_c)^2 u}, \quad (23)$$

где

$$\lambda_K = \frac{\gamma^4 D^2 + (\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}{(1 - \beta)^4}, \quad \gamma = \frac{m_c}{m_s},$$

$D$  – отношение диаметров структурных и неструктурных частиц. Существенным в формуле (23) есть учет влияния на проницаемость грунта не только содержания и размеров частиц обоих сортов, но и подвижности одной из фракций. Результаты вычислений профилей  $K(z)$  в аккумулярующей зоне для тех же  $t = 0.3, 1, 2$  и  $\beta$  при  $\gamma = 0.2$ ,  $D = 10$  приведены на рис. 3. Очевидно, что высокое содержание суффозионных частиц в недеформированном грунте ведет к быстрому и резкому снижению его проницаемости. В частности, при  $\beta = 0.2$  она вблизи границы  $z = z_b$  уже к моменту  $t = 0.3$  падает более, чем в 10 раз. В меньшей степени меняется проницаемость при малых  $\beta$ , хотя даже при  $\beta = 0.05$  в конце концов  $K$  уменьшается в 3 раза. Вместе с тем у фронта промачивания относительная проницаемость возрастает и со временем стремится к 1. Темпы изменения  $K$ , по сути, диктуются функцией  $I(t)$ .

Наконец, именно инфильтрационная функция  $I(t)$  определяет момент времени  $t_0$ , когда действительная скорость течения воды в порах снизится на фронте промачивания до критической. Последующее уменьшение  $I$  способствует образованию слоя кольматажа. Время начала массового осаждения суффозионных частиц вычислялось для разных  $\beta$ ,  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  согласно формулы (6). Так как обычно  $\lambda_1 \gg \beta$ , то при неизменных  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  значения  $t_0$  мало отличаются. Положение неподвижной нижней границы кольматационного слоя устанавливалось исходя из формулы (3) при  $\lambda_1 = 2$ ,  $t = t_0$ , а подвижной верхней – в соответствии с формулой (7). На рис. 4 показано изменение координаты  $z_k$  в зависимости от времени  $\Delta t$ , истекшего с момента  $t_0$ , на протяжении всего периода формирования упомянутого слоя ( $\Delta t_{max} = t_e - t_0$ ) для  $\beta = 0.05, 0.1$ . Продолжительность этого периода нарастает с уменьшением абсолютной величины коэффициента  $\lambda_2$ , причем  $t_e - t_0$  оказывается

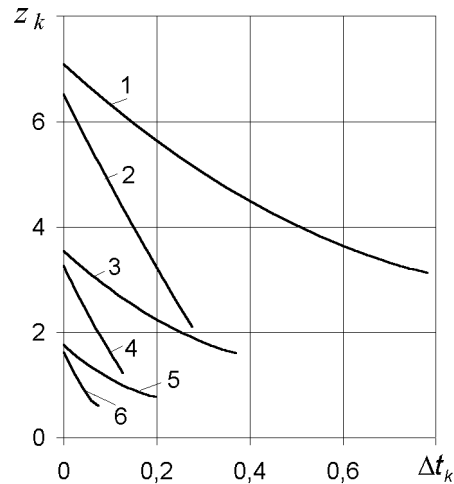


Рис. 4. Изменение положения верхней границы слоя кольматажа во времени: 1, 3, 5 –  $\beta = 0.1$ ; 2, 4, 6 –  $\beta = 0.05$ ; 1, 2 –  $\lambda_2 = -0.25$ ; 3, 4 –  $\lambda_2 = -0.5$ ; 5, 6 –  $\lambda_2 = -1$

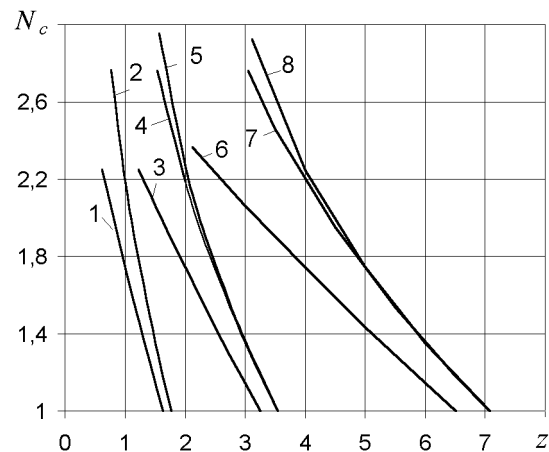


Рис. 5. Профили концентрации подвижных частиц при  $t = t_{kc}$  (1–4, 6, 7) и осажденных при  $t \geq t_{kc}$  (1, 3, 5, 6, 8) суффозионных частиц: 1, 3, 6 –  $\beta = 0.05$ ; 2, 4, 5, 7, 8 –  $\beta = 0.1$ ; 1, 2 –  $\lambda_2 = -1$ ; 3–5 –  $\lambda_2 = -0.5$ ; 6–8 –  $\lambda_2 = -0.25$

практически пропорциональным  $|\lambda_2|$ . Значения  $z_{ke}$ ,  $t_e$  находились по формулам (8), (10). Во всех рассмотренных примерах процесс осаждения неструктурных частиц протекал сравнительно быстро (по отношению к суффозионному процессу). Кстати, продолжающееся в течение периода  $[t_0, t_e]$  перемещение верхней границы аккумулярующей зоны нашло отражение на рис. 1 (участки кривых 5, 7 при  $t > 2.2$  и 2.1 соответственно). Именно высокая скорость протекания кольматационного процесса явилась причиной того, что профили концентрации подвижных частиц, сформировавшиеся к моменту  $t_0$ , не успевают сколько-нибудь

существенно трансформироваться за время  $t_e - t_0$ . На рис. 5 представлены профили  $N_c(z)$ ,  $N_{ck}(z)$ , рассчитанные также для  $\beta = 0.05, 0.1$  при  $\lambda_2 = -0.25, -0.5, -1$  на моменты  $t_0$  и  $t_e$ . При меньшем  $\beta$  кривые  $N_c(z)$  и  $N_{ck}(z)$  практически совпадают и поэтому показаны едиными линиями (кривые 1, 3, 6). При  $\beta = 0.1$  различия между указанными профилями становятся хорошо заметными, особенно в верхних их частях, где фильтрационное течение дольше транспортирует суффозионные частицы. Вследствие этого верхняя граница аккумулирующей зоны успевает за весь период  $[t_0, t_e]$  сместиться, например при  $\lambda_2 = -0.25$ , на  $\Delta z_b = 0.068$ , а концентрация  $N_c$  при этом увеличивается на  $\Delta N_c = 0.068$ . Отмеченные приращения, по крайней мере в рассмотренных условиях, настолько малосущественны, что при решении практических задач ими можно пренебрегать и в качестве окончательного распределения неструктурных частиц (после прекращения деформаций) принимать профиль концентрации этих частиц на момент  $t_0$ , когда они еще находятся в подвижном состоянии. Безусловно, что с ростом первоначальной доли таких частиц в твердой фазе грунта профили  $N_c(z, t_0)$  и  $N_{ck}(z)$  будут все больше отличаться. К сожалению, реализуемая в данной работе математическая модель из-за своей ограниченности не позволяет тщательно проанализировать кольматационный процесс даже в двухфракционном суффозионном грунте при  $\beta > 0.12$ . Зато удастся четко очертить границы применимости этой модели. Эффективно она будет работать при соблюдении условия

$$z_b \leq z_m,$$

где  $z_b$  формально находится из решения уравнения (4), а  $z_m$  — согласно (2), (21). Судя по поведению функций  $z_b(t)$ ,  $z_m(t)$ , должны существовать взаимосвязанные предельные момент времени  $t_*$  и координата  $z_*$ , которые как раз ограничивают длительность расчетного периода и область допустимых положений верхней границы аккумулирующей зоны. Это означает, что расчет физико-механических характеристик с использованием формул из первого раздела при  $t > t_*$  и  $z_b < z_*$  по физическим соображениям, вообще говоря, невозможен. Как следует из полученного решения математической задачи, к моменту  $t_*$  суффозионные частицы в окрестности границы  $z = z_b$  распределяются чрезвычайно неравномерно (при  $z \rightarrow z_*$ ,  $t \rightarrow t_*$   $\partial N_c / \partial z \rightarrow \infty$ ) и последующее их перераспределение будет уже контролироваться и диффузионным механизмом массопереноса. Указанные предельные величины тесно связаны с па-

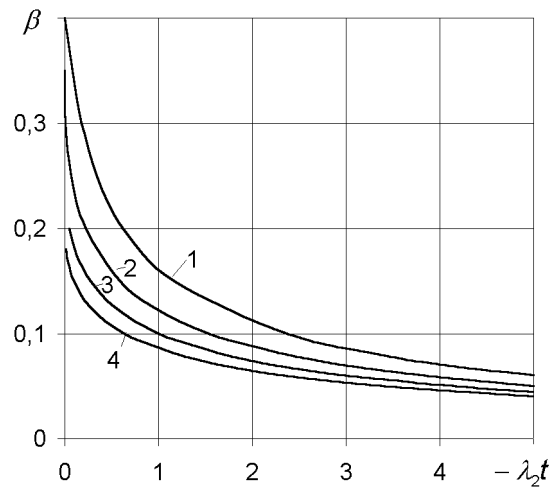


Рис. 6. Кривые зависимости  $\beta(-\lambda_2 t)$ :  
1 —  $\lambda_1 = 1$ ; 2 —  $\lambda_1 = 2$ ; 3 —  $\lambda_1 = 3$ ; 4 —  $\lambda_1 = 4$

раметром  $\beta$ . Очевидно, что в грунте с большим содержанием неструктурных частиц они быстрее накапливаются в аккумулирующей зоне, причем преимущественно в ее верхней части. Поэтому и момент  $t_*$  наступит быстрее, и верхняя граница данной зоны будет расположена ближе к поверхности грунта. Таким образом, имеют место  $t_* = t_*(\beta)$ ,  $z_* = z_*(\beta)$ . Рис. 6 дает весьма полное представление о соотношении между  $t$  и  $\beta$ , в ходе расчетов которых было установлено наличие однозначной зависимости  $\beta$  не только от  $t_*$ , но и от приведенного  $-\lambda_2 t_*$ . Вид кривых  $\beta(-\lambda_2 t_*)$  для различных фиксированных  $\lambda_1$  иллюстрируется рис. 6. Эти кривые построены чисто формальным путем и физический смысл имеют только их отдельные участки. Выделить указанные участки легко, исходя из величин  $I$  и  $t_0$ . Принимая во внимание относительно высокую скорость протекания кольматационного процесса и с целью упрощения анализа в качестве времени окончания фильтрационных деформаций выбирался момент  $t_0$ . Тогда весь расчет деформационных процессов от их начала и вплоть до завершения осаждения взвешенных частиц можно проводить при условии, что

$$\beta \geq I(t_*) - 1.$$

Следовательно, нижняя (права) часть каждой кривой  $\beta(-\lambda_2 t)$ , условно отделяемая от остальной части точкой с абсциссой  $\lambda_1 + \lambda_2 t_* - 1$ , не несет полезной информационной нагрузки. Также и предельное из допускаемых принятой моделью положений верхних границ аккумулирующей зоны и слоя кольматажа в зависимости от  $\beta$  можно охарактеризовать кривыми, показанными на рис. 7.



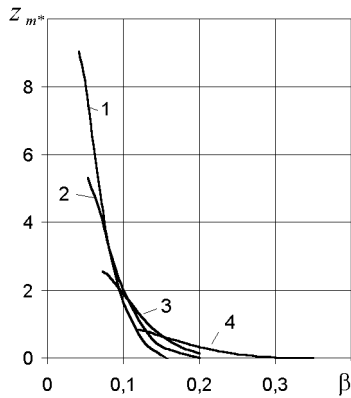


Рис. 7. Кривые зависимости  $z_m(\beta)$ :  
 1 -  $\lambda_1 = 5$ ; 2 -  $\lambda_1 = 4$ ; 3 -  $\lambda_1 = 3$ ; 4 -  $\lambda_1 = 2$

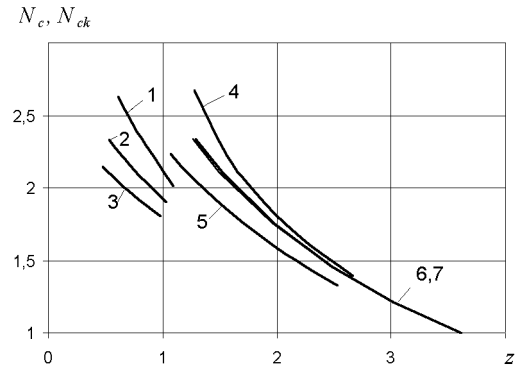


Рис. 9. Профили относительной концентрации подвижных частиц  $N_c(z)$  (кривые 1–5, 7) и осажденных  $N_{ck}(z)$  (кривая 6):  
 1–3 -  $t = 0.5$ ; 4, 5 -  $t = 1.5$ ; 7 -  $t = 2.433$ ;  
 1 -  $\beta = 0.15$ ; 2, 4 -  $\beta = 0.1$ ; 3, 5, 7 -  $\beta = 0.05$

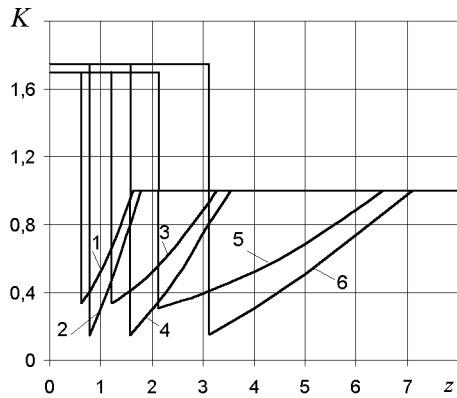


Рис. 8. Конечные профили относительной проницаемости грунта:  
 1, 3, 5 -  $\beta = 0.05$ ; 2, 4, 6 -  $\beta = 0.1$ ; 1, 2 -  $\lambda_2 = -1$ ;  
 3, 4 -  $\lambda_2 = -0.5$ ; 5, 6 -  $\lambda_2 = -0.25$

Получены эти кривые уже с учетом накладываемых на модель ограничений, и лишний раз свидетельствуют о ее высокой эффективности прежде всего в области низких значений  $\beta$ .

В заключение в первой серии расчетов определялись полные профили относительной проницаемости грунта  $K(z)$ , которые наблюдаются в нем после прекращения фильтрационных деформаций. В пределах кольматационного слоя эта величина рассчитывалась на основе формулы (23), причем в ней вследствие неподвижности суффозионных частиц полагалось  $u = 1$ . Проницаемость грунта в верхней части области деформаций, из которой все неструктурные частицы вынесены фильтрационным потоком (суффозионная зона), вычислялась следующим образом [21]:

$$K = \frac{\gamma^4 D^2 + (\beta + \gamma - \beta\gamma)^2}{(1 - \beta)^4 (\beta + \gamma)^2}$$

В вычислениях принимались:  $\lambda_1 = 2$ ;  $\gamma = 0.2$ ;  $D = 10$ ;  $\beta = 0.05, 0.1$ ;  $\lambda_2 = -0.25, -0.5, -1$ . Искомые профили изображены на рис. 8. Первые их части, относящиеся к суффозионной зоне, представляют собой прямые отрезки, параллельные оси абсцисс. Находятся они на одном уровне при разных  $\lambda_2$ . Разница же в значениях  $K$  здесь имеет место при  $\beta = 0.05$ , и составляет всего 0.064, что объясняется малым исходным содержанием суффозионных частиц в обоих случаях. В среднем проницаемость грунта в суффозионной зоне выросла в 1,7 раза. Вместе с тем в слое кольматации она уменьшилась, причем в заметно большей степени. Здесь значения  $K$  на верхней границе этого слоя при  $\beta = 0.05, 0.1$  различаются в 2 раза. Рост  $\lambda_2$  обуславливает удлинение слоя кольматации и более равномерное распределение осажденных частиц в нем. Наклон кривых  $K(z)$  уменьшается, а максимальное их значение достигается на нижней границе данного слоя ( $z = z_{ko}$ ) Именно на этой глубине начинается недеформированный грунт, так что при  $z \geq z_{ko}$  (третья часть профилей  $K(z)$  на рис. 8)  $K = 1$ . Следует иметь в виду, что вообще величина  $K$  очень чувствительна по отношению к  $\beta$ , и с его увеличением будет происходить резкое снижение проницаемости грунта в верхней части кольматационного слоя.

При выборе для функции  $I(t)$  экспоненциальной формы поведение физико-механических величин заметно меняется, а область применимости исходной модели может сократиться. Чтобы иметь возможность сопоставить данные расчетов первой и второй серий примеров, значения коэффициентов  $\nu_1, \nu_2$  специально подбирались с учетом ранее использованных значений  $\lambda_1, \lambda_2$ . В частности, коэффициент  $\nu_1$ , характеризующий влияние на суффо-

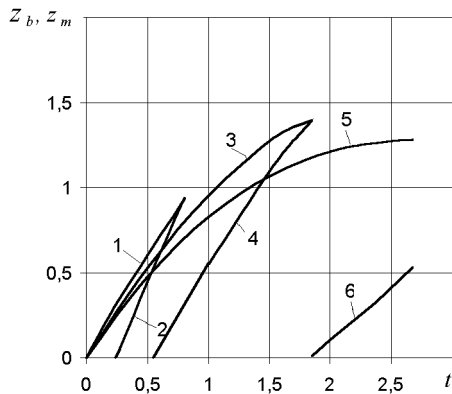


Рис. 10. Изменения во времени  $z_b$  (кривые 1, 3, 5) и  $z_m$  (кривые 2, 4, 6): 1, 2 –  $\beta = 0.15$ ; 3, 4 –  $\beta = 0.1$ ; 5, 6 –  $\beta = 0.05$

зионный процесс переходных процессов в начальный период деформаций, принимался равным 2, так что  $I(0)$  во второй серии и большинстве примеров первой серии является одинаковым. Значение же  $\nu_2$  задавалось таким образом, чтобы обеспечить поступление в грунт одного и того же количества инфильтрационной влаги при линейной и экспоненциальной аппроксимациях  $I(t)$  в течение характерного периода времени  $[0, T]$ . В качестве момента времени  $T$  использовалось значение  $t_{k0}$ , которое вычислялось по формуле (6). Исходя из  $\lambda_2 = -0.5$  для  $\beta = 0.05, 0.1, 0.15, 0.2$  были получены  $\nu_2 = -0.306, -0.31, -0.313, -0.317$  соответственно. Из большого количества результатов расчетов при реализации второй формы  $I(t)$  выбраны, пожалуй, наиболее показательные результаты – профили относительной концентрации подвижных частиц  $N_c(z)$  на разные моменты времени и осажденных частиц после окончания кольматационного процесса  $N_{ck}(z)$  (рис. 9). Вследствие ускоренного убывания интенсивности  $I$  (по сравнению с первой формой) даже при  $\beta = 0.1$  не удается рассчитать фильтрационные деформации в полном объеме. Поэтому на рис. 9 приведен только профиль  $N_{ck}(z)$  для  $\beta = 0.05$  (кривая 6). Время осаждения взвешенных частиц оказалось настолько малым, что профиль  $N_c(z, t_0)$ , трансформируясь в профиль  $N_{ck}(z)$ , не успевает сколько-нибудь заметно видоизмениться. В итоге кривые 6, 7, отвечающие указанным профилям, практически совпали. Несколько более сложным было определение функции  $z_m(t)$  и установление границ, в которых оправдано применение принятой модели. На рис. 10 даны кривые изменения  $z_m$  и  $z_b$  во времени для  $\beta = 0.05, 0.1, 0.15$ . В рассматриваемом случае величина  $z_m$  находилась путем решения следую-

щей системы уравнений:

$$\frac{1}{u_m - I} - 2 \ln(u_m - I) = 1 + 2 \ln \frac{1 - \beta}{\beta \nu_1} - 2\nu_2 t,$$

$$z_m = \frac{1}{\nu_2} \left( u_m - \frac{\nu_1}{1 - \beta} \right) + (2u_m - 2I - 1) \times$$

$$\times \left[ t - \frac{1}{\nu_2} \ln \frac{(1 - \beta)(u_m - I)}{\beta \nu_1} \right],$$

где  $u_m$  – действительная скорость фильтрационного течения на уровне  $z = z_m$  в момент  $t$ . Составив рис. 1 и 10, можно заключить, что  $z_m$  при экспоненциальной форме  $I$  растет быстрее и, принимая при  $\beta = 0.05$  со временем уже положительные значения, успевает значительно приблизиться к  $z_b(t)$ . В целом результаты расчетов обеих серий примеров подтверждают важное значение для фильтрационных свойств суффозионных грунтов взаимосвязанных фильтрационных и деформационных процессов особенно на начальной стадии их протекания.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Интенсивный водоисточник, действующий на поверхности или внутри суффозионного грунта, как правило, способствует возникновению значительных фильтрационных деформаций. Со временем суффозионные частицы относятся все дальше от источника и первоначально равномерное их распределение становится существенно неравномерным. При этом образуются две характерные зоны – суффозионная (указанные частицы полностью вынесены) и аккумулирующая (сосредоточены все подвижные частицы из области деформаций). Накопление неструктурных частиц в удаленной от источника части фильтрационного потока обуславливает здесь резкое снижение прежде всего проницаемости грунта, а, следовательно, и скоростей впитывания воды, течения грунтовых вод. Характер перераспределения таких частиц при деформировании грунта во многом зависит от особенностей протекания фильтрационных и суффозионных процессов на их начальной стадии. Постепенное снижение скорости притока воды в промачиваемый грунт ведет к преимущественной концентрации подвижных частиц в верхней части аккумулирующей зоны. При высоком исходном содержании неструктурных частиц градиент их концентрации на верхней границе этой зоны неограниченно растет, и поэтому вблизи указанной границы важную роль в массопереносе начинает

играть диффузионный механизм. В рамках принятой модели учесть диффузионный процесс удается только в интегральном смысле, наращивая протяженность аккумулирующей зоны на основе условия баланса массы (объема) мобильных частиц в области деформаций. Для строгого же учета данного фактора необходимо соответствующее усовершенствование модели, что серьезно осложнит ее реализацию теоретическими методами. При уменьшении действительной скорости течения воды в порах до критического значения взвешенные частицы начинают осаждаться сначала у фронта промачивания, а затем и выше него. Таким образом формируется слой кольматажа, причем характерное время кольматационного процесса заметно больше аналогичного времени суффозионного процесса. Поэтому профили концентрации осажденных частиц в кольматационном слое и подвижных частиц в аккумулирующей зоне к моменту начала их осаждения мало отличаются по крайней мере при небольших значениях параметра  $\beta$ . Отмеченные особенности перераспределения суффозионных частиц в пределах области деформаций более рельефно проявляются при неравномерном впитывании воды в грунт.

1. Кривоног А.И. Механическая кольматация тонкого волокнистого фильтра из полиэтилена // Мелиорация и вод.хоз-во.– 1987.– N 67.– С. 59–62.
2. Михайлов Н.Н. Изменение физических свойств горных пород в окколскважинных зонах.– М.: Недра, 1987.– 280 с.
3. Тугай А.М. Расчет напоров и дополнительных сопротивлений в условиях механического кольматажа скважин // Науковий вісник будівництва.– Харків: АТ "Издательский дом "Ватерпас".– 2002.– N 16.– С. 30–40.
4. Fox D.M., Bissonais Y.Le. Process-based analysis of aggregate stability effects on sealing, infiltration and interrill erosion // Soil Sci. Soc. Am. J.– 1998.– 62.– P. 717–724.
5. Nemati M.R., Caron J., Gallichand J. Stabilité of structural form during infiltration: laboratory measurements on the effect of de-inking sludge // Soil Sci. Soc. Am. J.– 2000.– 64.– P. 543–552.
6. Капранов Ю.И. Модели кольматации пористых сред // Сб. науч. тр. "Математические модели фильтрации и их приложения.– Новосибирск: Изд-во СО РАН.– 1999.– С. 89–97.
7. Хужаёров Б.Х. О модели кольматационно-суффозионной фильтрации дисперсных систем в пористой среде // Инж.-физ. журн.– 2000.– 73, N 4.– С. 680–685.
8. McDowell L.M., Hunt J.R., Sitar N. Particle transport through porous media // Water Resour. Res.– 1986.– 22, 13.– P. 1901–1921.
9. Алексеев В.С., Коммунар Г.М., Шержуков Б.С. Массоперенос в водонасыщенных горных породах. Итоги науки и техники. Сер. Гидрогеология, инженерная геология.– М.: ВИНТИ, 1989.– 143 с.
10. Веригин Н.Н., Васильев С.В., Саркисян В.С. и др. Гидродинамические и физико-химические свойства горных пород.– М.: Недра, 1977.– 271 с.
11. Кремез В.С. Моделирование влияния кольматации грунта на уровень грунтовых вод при фильтрации из водохранилища // Гидравлика и гидротехника.– К.: Техніка.– 1999.– N 60.– С. 67–71.
12. Bahr J. M., Rubin J. Direct comparison of kinetic and local equilibrium formulations for solute transport affected by surface reactions // Water Resour. Res.– 1987.– 23, N 3.– P. 438–452.
13. Дмитрієв Д.А. Дослідження одномірної фільтрації в незв'язних суфозійних грунтах // Вісник УДУВГП.– 2002.– Вип. 5(18), 5.– С. 50–56.
14. Trzaska A. Experimental research on the phenomenon of colmatage // Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Techn.– 1965.– 13, N 9.– P. 451–457.
15. Поляков В.Л. Промачивание суффозионных грунтов. 1. Суффозия // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Т. 5(77), N 3.– С. 72–82.
16. Веригин Н.Н. и др. Методы прогноза солевого режима грунтов и грунтовых вод.– М.: Колос, 1979.– 336 с.
17. Simon W., Reichert P., Hinz C. Properties of exact and approximate travelling wave solutions for transport with nonlinear and nonequilibrium sorption // Water Resour. Res.– 1997.– 33, N 5.– P. 1139–1147.
18. Toride N., Zeij F. J., Genuchten van M. T. A comprehensive set of analytical solutions for nonequilibrium solute transport with first-order decay and zero-order production // Water Resour. Res.– 1993.– 29, N 7.– P. 2167–2182.
19. Van der Zee S. E. A., Riemsdijk van W. H. Transport of reactive solute in spatially variable soil systems // Water Resour. Res.– 1987.– 23, N 11.– P. 2059–2069.
20. Романков П.Г., Курочкина М.И. Гидродинамические процессы химической технологии.– Л.: Химия, 1982.– 288 с.
21. Поляков В.Л. О фильтрационных деформациях грунта с образованием аккумулирующих зон // Прикладна гідромеханіка.– 2003.– Т. 5(77), N 2.– С. 45–56.