

Вплив пластичних властивостей матеріалу на граничний стан нитки скінченної жорсткості

О. В. Шимановський, Н. О. Чабан

ВАТ Український науково-дослідний та проектний інститут сталевих конструкцій ім. В. М. Шимановського, Київ, Україна

Розглянуто роботу поперечного перетину ниток скінченної жорсткості за поперечного згину. Матеріал приймається жорстко- і пружно-пластичним. Виведено рівняння граничних кривих. Наведено результати розрахунків.

Ключові слова: нитка скінченної жорсткості, пластична робота, жорстко-пластичний матеріал.

У сучасному будівництві велику увагу приділяють збільшенню прольотів будівель і споруд [1, 2]. Тому особливий інтерес представляють висячі системи [3]. У порівнянні з традиційними конструкціями ці системи мають ряд переваг: раціональне використання міцнісних властивостей матеріалу; відносна простота виготовлення і мала трудоемність; індустріальність монтажу; можливість створення легких і виразних з естетичної точки зору архітектурних форм; мала чутливість до різноманітних специфічних впливів (сейсмічні навантаження, нерівномірний зсув опор, тощо). Але поряд із перевагами висячі системи мають і недоліки, основні з яких: велика деформативність при дії зосередженого та асиметричного навантаження; наявність великих зусиль розпору, для погашення яких необхідно використовувати відповідні опорні конструкції і анкерні пристрої. Існуючі методи розрахунку ниток скінченної жорсткості в основному розроблено для пружної стадії роботи матеріалу. У багатьох випадках використання методів розрахунку при роботі матеріалу в межах пружності не дозволяє визначити дійсний запас міцності конструкцій.

Із розвитком технологій отримання високоякісних конструктивних сталей і створення матеріалів із нелінійною залежністю напруження – деформація урахування можливості їхньої пластичної роботи набуває актуальності. Особливе значення має розрахунок за межею пружності при перевірці аварійної міцності, коли до конструкції ставиться єдина вимога – забезпечення можливості експлуатації всієї споруди після припинення дії аварійного навантаження.

Метою роботи є вивчення та аналіз роботи перерізів ниток скінченної жорсткості в пружній і пластичній стадіях роботи матеріалу.

Розглянемо роботу довільного поперечного перерізу жорстко-пластичної нитки скінченної жорсткості (рис. 1) [4, 5]. Для такої нитки відповідно до прийнятої моделі матеріалу [6] кривина осі та вигин залишаються незмінними в будь-якому перерізі, доки згинальний момент не досягне граничного значення $M_{гр}$. У граничному стані кривина може приймати будь-яку величину, а нейтральна вісь $n - n$ зміщується від осі $t - t$ на відстань c (рис. 1).

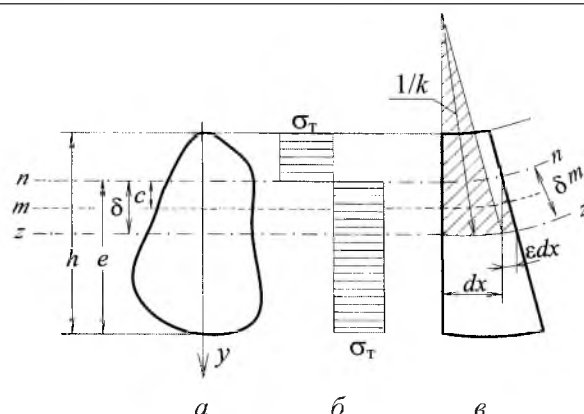


Рис. 1. Довільний поперечний переріз нитки (а), епюра напружень у граничному стані (б) та деформований елемент нитки скінченної жорсткості (в): $n-n$ – нейтральна вісь; $z-z$ – вісь, що проходить через центр ваги перерізу; $m-m$ – вісь, що ділить площу перерізу навпіл.

Робота поперечного перерізу нитки скінченної жорсткості характеризується залежністю між розпором, згинальним моментом і кривиною. Для отримання цієї залежності спроєкуємо елементарні сили, які діють у перерізі, на вісь $z-z$ і складемо суму моментів цих сил відносно осі $n-n$ (рис. 1) [5, 7]:

$$\int_F \sigma dF = H; \quad \int_F \sigma y dF = M + H\delta, \quad (1)$$

де σ – нормальне напруження; M , H – відповідно згинальний момент та розпір у нитці; δ – відстань між осями $n-n$ та $z-z$ (рис. 1); dF – площа елемента перерізу, яку представимо у вигляді добутку $dF = b(y)dy$ ($b(y)$ – ширина перерізу на відстані y від нейтральної осі).

Залежність між кривиною, згинальним моментом і розпором має вигляд

$$\sigma_T \left[- \int_{-(h-e)}^0 b(y) dy + \int_0^e b(y) dy \right] = H;$$

$$\sigma_T \left[- \int_{-(h-e)}^0 y b(y) dy + \int_0^e y b(y) dy \right] = M + H\delta,$$

де σ_T – границя текучості.

Якщо перенести початок системи координат із осі $n-n$ на вісь $m-m$ і зберегти вид функції $b(y)$, то останні вирази у новій системі координат можна записати так:

$$\sigma_T \left[- \int_{-(h-e+c)}^{-c} b(y) dy + \int_{-c}^{e-c} b(y) dy \right] = H;$$

$$\sigma_{\tau} \left[- \int_{-(h-e+c)}^{-c} (y+c)b(y)dy + \int_{-c}^{e-c} (y+c)b(y)dy \right] = M + H\delta.$$

Після деяких перетворень остаточно представимо їх у вигляді

$$\sigma_{\tau} \left\{ \left[- \int_{-(h-e+c)}^0 b(y)dy + \int_0^e b(y)dy \right] + 2 \int_{-c}^0 b(y)dy \right\} = H;$$

$$\sigma_{\tau} \left\{ \left[- \int_{-(h-e+c)}^0 yb(y)dy + \int_0^{e-c} yb(y)dy \right] + c \left[- \int_{-(h-e+c)}^{-c} b(y)dy + \int_0^{e-c} b(y)dy \right] + \right.$$

$$\left. + 2 \int_{-c}^0 (y+c)b(y)dy \right\} = M + H\delta.$$

Із урахуванням, що

$$\int_{-(h-e+c)}^0 b(y)dy = \int_0^{e-c} b(y)dy \quad \text{та} \quad \int_{-(h-e+c)}^0 yb(y)dy + \int_0^{e-c} yb(y)dy = W_{\text{гр}},$$

отримаємо

$$\frac{H}{H_{\text{гр}}} = \frac{2}{F} \int_{-c}^0 b(y)dy; \quad \frac{M}{M_{\text{гр}}} = 1 + \frac{2}{W_{\text{гр}}} \int_{-c}^0 (y+c-\delta)b(y)dy, \quad (2)$$

де $M_{\text{гр}}$, $H_{\text{гр}}$, $W_{\text{гр}}$ – відповідно граничні згинальний момент, розпір та момент опору перерізу нитки, $M_{\text{гр}} = \sigma_{\tau} W_{\text{гр}}$; $H_{\text{гр}} = \sigma_{\tau} F$.

За допомогою рівнянь (2) можна встановити у параметричній формі залежність між згинальним моментом та розпором, сумісна дія яких дозволяє реалізувати граничний стан у перерізі.

Після інтегрування (2) і виключення параметра c остаточно отримаємо співвідношення

$$\frac{M}{M_{\text{гр}}} = f \left(\frac{H}{H_{\text{гр}}} \right),$$

яке визначає криву граничного стану перерізу нитки.

Після диференціювання (2) по δ та деяких перетворень отримаємо $\frac{dM}{dH} = -\delta$.

Із подібності заштрихованих трикутників (рис. 1,в) випливає, що $\varepsilon/k = \delta$, звідки маємо $\frac{\varepsilon}{k} = -\frac{dM}{aH}$.

Для ілюстрації отриманого рішення розглянемо граничний стан поперечних перерізів ідеального і прямокутного профілів. При цьому враховуємо, що $c = \delta$, оскільки центр ваги будь-якого симетричного перерізу збігається з віссю $m - m$ (рис. 1).

Із урахуванням того, що для ідеального профілю [8]

$$\begin{cases} b(y) = 0 & \text{при } -(h - e) < y < e, \\ b(y) = \frac{F}{2} \frac{1}{dy} & \text{при } y = -(h - e), y = e, \end{cases} \quad (3)$$

після інтегрування (2) отримаємо рівняння граничної кривої:

$$\frac{M}{M_{\text{гр}}} + \frac{H}{H_{\text{гр}}} - 1 = 0.$$

Для прямокутного перерізу, в свою чергу, $b(y) = b = \text{const}$, а рівняння (2) після інтегрування набудуть наступного вигляду:





$$\frac{H}{H_{\text{гр}}} = 2 \frac{\delta}{h}; \quad \frac{M}{M_{\text{гр}}} = 1 - 4 \left(\frac{\delta}{h} \right)^2$$

або після деяких перетворень їх можна представити так:

$$\frac{M}{M_{\text{гр}}} + \left(\frac{H}{H_{\text{гр}}} \right)^2 - 1 = 0.$$

Відзначимо, що залежність згинальний момент – розпір у граничному стані перерізу нитки скінченної жорсткості збігається з результатами, отриманими при роботі балок [5, 6]. Таким чином, задача розрахунку жорстко-пластичних балок – це окремий випадок задачі розрахунку жорстко-пластичних ниток скінченної жорсткості. Для розглянутих і деяких інших поперечних перерізів, які широко застосовуються в будівництві, граничні криві наведено у таблиці, а відповідні їм графіки – на рис. 2.

Криві граничного стану для деяких поперечних перерізів ниток скінченної жорсткості

Вид профілю	Залежність $M - H$ у граничному стані перерізу	Вид профілю	Залежність $M - H$ у граничному стані перерізу
	$\frac{M}{M_{\text{гр}}} + \left(\frac{H}{H_{\text{гр}}} \right)^2 - 1 = 0$		$\frac{M}{M_{\text{гр}}} - \left(\frac{H}{H_{\text{гр}}} - 1 \right) \left(3 - 2 \sqrt{\frac{H}{H_{\text{гр}}} - 1} \right) = 0$
	$\frac{M}{M_{\text{гр}}} + \frac{H}{H_{\text{гр}}} - 1 = 0$		$\frac{M}{M_{\text{гр}}} - \cos \frac{\pi H}{2 H_{\text{гр}}} = 0$

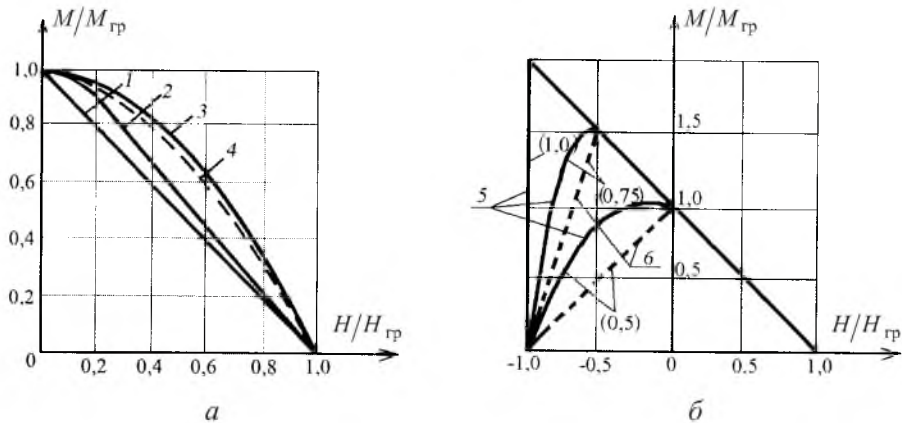


Рис. 2. Граничні криві для симетричних (а) та несиметричних (б) поперечних перерізів: 1 – ідеальний двотавровий; 2 – двотавровий; 3 – прямокутний; 4 – кільцевий; 5 – тавровий (в дужках наведено відношення площі поясу до площі тавра); 6 – несиметричний двотавровий (в дужках наведено відношення площі верхнього поясу до площі нижнього поясу).

Зауважимо, що граничні криві можна продовжити в область від’ємних значень згинального моменту та розпору, в результаті чого отримуємо повні замкнуті криві. Усі граничні криві мають властивість центральної симетрії. Криві симетричних профілів окрім того симетричні відносно координатних осей.

Область, яка обмежена граничними кривими, визначає можливі сполучення згинального моменту і розпору, за яких поперечний переріз нитки не може бути приведений до граничного стану. Гранична ж крива визначає значення моменту і розпору, за спільної дії яких пластичні деформації розповсюджуються по всьому перерізу. У більшості випадків збільшення розпору призводить до зменшення величини згинального моменту, який зумовлює в перерізі граничний стан (рис. 2,а). Коли розглядається несиметричний переріз, збільшення розпору може призвести не тільки до зменшення, але й до збільшення згинального моменту, який дозволяє реалізувати граничний стан у перерізі (рис. 2,б).

Отримані рівняння використовуються для визначення напружено-деформованого стану нитки скінченної жорсткості при жорстко-пластичній роботі матеріалу і, як наслідок, дозволяють знайти тільки граничне навантаження нитки. Окрім того, відомо, що дана схематизація діаграми наближено відображає властивості реальних матеріалів [6, 7]. Тому при розрахунку нитки в області малих деформацій необхідно використовувати пружно-пластичну діаграму роботи матеріалу, що дозволяє простежити поведінку нитки у діапазоні зміни навантаження.

З огляду на вищезазначене розглянемо роботу поперечного перерізу нитки з врахуванням обох (пружної та пластичної) складових деформації. Отримати залежність згинальний момент–розпір–кривина в загальному вигляді, подібно тому, як це було зроблено у випадку жорстко-пластичної роботи матеріалу, можливо, але кінцеві вирази не вдається звести до компактного, зручного для практичного використання виду. Тому дану залежність краще отримувати спеціально у кожному окремому випадку.

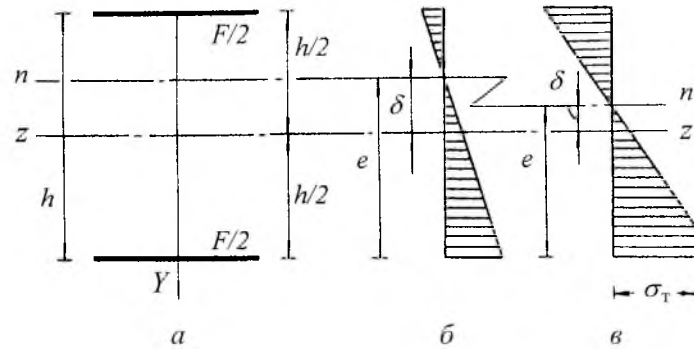


Рис. 3. Ідеальний поперечний переріз нитки (а) та епори напружень для пружної (б) і пружно-пластичної (в) стадій роботи.

Розглянемо роботу ідеального перерізу пружно-пластичної нитки скінченної жорсткості (рис. 3) [7], для якого виконуються умови (3).

Підставимо умови (3) в (1) і отримаємо

$$\begin{aligned} \{\sigma[-k(h-e)] + \sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= H; \\ \{-(h-e)\sigma[-k(h-e)] + e\sigma[ke]\} \frac{F}{2} &= M + H\delta. \end{aligned} \quad (4)$$

Залежність для нормального напруження σ у випадку ідеального пружно-пластичного матеріалу можна записати у вигляді

$$\sigma = Eky \quad \text{при} \quad |y| \leq \frac{\sigma_T}{Ek}; \quad (5)$$

$$\sigma = \sigma_T \operatorname{sign} y \quad \text{при} \quad |y| \geq \frac{\sigma_T}{Ek}, \quad (6)$$

де k – кривина осі нитки; $\operatorname{sign} y = 1$ при $y > 0$; $\operatorname{sign} y = -1$ при $y < 0$.

Нитка працює в пружній стадії (рис. 3,б), коли діючі зусилля не викликають у жодному волокні поперечного перерізу напружень текучості. Підставимо (5) і (6) в (1) і отримаємо

$$[-Ek(h-e) + Eke] \frac{F}{2} = H; \quad [Ek(h-e)^2 + Eke^2] \frac{F}{2} = M + H\delta.$$

Враховуючи, що параметр e можна записати у вигляді $e = h/2 + \delta$, де $\delta = \varepsilon/k$, після деяких перетворень отримаємо наступні рівняння, що визначають кривину і відносне подовження осі нитки:

$$\frac{EIk}{M_{\text{гр}}} = \frac{M}{M_{\text{гр}}}; \quad (7)$$

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{H}{H_{гр}}, \quad (8)$$

де $I = Fh^2/4$; $M_{гр} = \sigma_T Fh/2$; $H_{гр} = \sigma_T F$ – відповідно момент інерції, граничний згинальний момент і розпір нитки з ідеальним поперечним перерізом.

Коли напруження в нижньому (найбільш віддаленому від нейтральної осі) волокні досягнуть границі текучості, робота профілю в пружній стадії закінчиться. Після цього відповідно до прийнятої моделі матеріалу їхня величина зростати не буде. Тому при подальшому збільшенні зусиль у нитці має місце друга пружно-пластична стадія деформування, коли на нижній поверхні профілю з'являється так зване пластичне волокно, з ростом згинальних моментів і розпору це волокно перетворюється у пластичний шар.

Умову появи перших пластичних деформацій можна визначити за допомогою (5), якщо прийняти $y = e$; $\sigma = \sigma_T$; $Eke = \sigma_T$. Виключимо e та k і за допомогою (8) отримаємо

$$\frac{M}{M_{гр}} + \frac{H}{H_{гр}} - 1 = 0. \quad (9)$$

Отже, при досягненні зовнішнім навантаженням величини, за якої починає виконуватися останнє рівняння, настає друга пружно-пластична стадія деформування, коли в перерізі розвивається ділянка, охоплена пластичними деформаціями (рис. 3,в). Підставимо формулу (6) у рівняння рівноваги (4) і отримаємо

$$[-Ek(h - e) + \sigma_T] \frac{F}{2} = H; \quad [Ek(h - e)^2 + \sigma_T e] \frac{F}{2} = M + H\delta.$$

Виконаємо з останніми співвідношеннями перетворення, аналогічні вищенаведеним, і отримаємо наступні залежності, що характеризують кривину та відносне подовження осі нитки:

$$\frac{M}{M_{гр}} + \frac{H}{H_{гр}} - 1 = 0; \quad (10)$$

$$\frac{E\varepsilon_0}{\sigma_T} = \frac{EIk}{M_{гр}} + 2 \frac{H}{H_{гр}} - 1. \quad (11)$$

Зауважимо, що умова (9), при виконанні якої з'являються перші пластичні деформації у поперечних перерізах, та залежність (10), яка характеризує кривину нитки на пружно-пластичній стадії деформування (вироджується в цьому випадку в залежність між згинальним моментом і розпором), тотожні. Це свідчить про те, що поява в перерізі нитки скінченної жорсткості ідеального профілю перших пластичних деформацій дозволяє реалізувати в ньому граничний стан. Отже, деформування нитки з ідеальним поперечним перерізом супроводжується утворенням у її прольоті тільки

двох типів ділянок: пружних і пластичних. Цей факт полегшує подальший розв'язок задачі, тому що дозволяє уникнути розгляду пружно-пластичних ділянок без принципових змін у розрахункових залежностях.

Із використанням залежностей (10) і (11) побудовано графіки граничних кривих для ідеального поперечного перерізу нитки скінченної жорсткості (рис. 4). Зазначимо, що співвідношення (10) і (11) збігаються з результатами, отриманими в [1–3, 8, 9]. Таким чином, задача розрахунку пружно-пластичних, як і розглянутих вище жорстко-пластичних, балок – це окремий випадок задачі розрахунку пружно-пластичних ниток скінченної жорсткості.

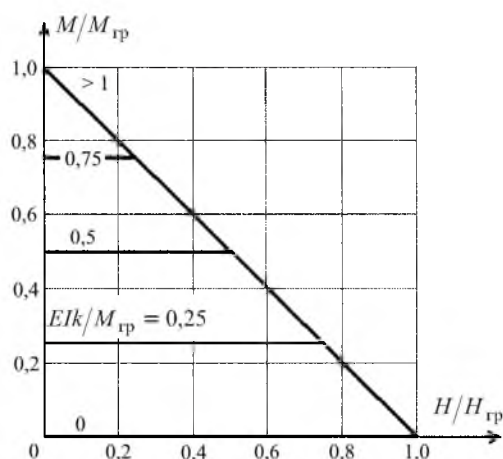


Рис. 4. Граничні криві для ідеального поперечного перерізу при різному відношенні $EI_k/M_{гр}$.

На основі вищевикладеного зазначимо, що основна особливість врахування пластичних властивостей матеріалу при практичних розрахунках полягає у можливості достовірного обґрунтування дійсного запасу міцності ниток скінченної жорсткості. Загальну картину їх поведінки в процесі навантаження при малих деформаціях дає розрахунок за допомогою пружно-пластичної схематизації діаграми. Але при появі текучості і її зростанні деформації та переміщення теоретично можуть бути нескінченно великими. У цьому випадку можна знехтувати пружними складовими деформацій та переміщень порівняно з пластичними, тобто використовувати схему роботи жорстко-пластичної нитки скінченної жорсткості. Оскільки робота пружно-пластичної нитки скінченної жорсткості в стані граничної рівноваги асимптотично наближається до роботи жорстко-пластичної нитки, в загальному випадку в залежності від величини зовнішнього навантаження нитку скінченної жорсткості слід розраховувати з використанням двох моделей матеріалу: пружно-пластичної моделі – при $0 \leq q \leq 0,875q_{гр}$ і жорстко-пластичної моделі – при $0,875q_{гр} < q \leq q_{гр}$.

Висновки

1. На основі класичної теорії пластичності та аналізу відомих розв'язків для ниток скінченної жорсткості, які працюють у межах та поза межами пружності, побудовано граничні криві для різноманітних поперечних пере-

різів із застосуванням гіпотез пружно-пластичного і жорстко-пластичного матеріалу.

2. Показано, що граничні криві дозволяють визначати значення згинального моменту та розпору, дія яких призводить до розповсюдження пластичних деформацій по всьому перерізу.

3. Виявлено взаємовплив силових чинників при симетричних і несиметричних типах поперечних перерізів.

Резюме

Рассмотрена работа поперечного сечения нитей конечной жесткости при поперечном изгибе. Материал принимается жесткопластическим и упруго-пластическим. Выведены уравнения граничных кривых. Приведены результаты расчетов.

1. *International Symposium on Theory, Design and Realization Shell and Spatial Structures*. – Nagoya, 2001. – 444 p.
2. *International Symposium on Shell and Spatial Structures “Theory, Technique, Valuation, and Maintenance”*. – Bucharest, 2005. – 1. – 428 p.
3. *IASS Symposium “New Olympics. New Shell and Spatial Structures”*. – Beijing; China, 2006. – 1. – 500 p.
4. Шимановський В. Н., Соколов А. А. Расчет висячих конструкций за пределом упругости. – Киев: Будівельник, 1975. – 104 с.
5. Шимановський В. Н., Смирнов Ю. В., Харченко Р. Б. Расчет висячих конструкций (нитей конечной жесткости). – Киев: Будівельник, 1973. – 198 с.
6. Качанов Л. М. Основы теории пластичности. – М.: Гостехиздат, 1956. – 324 с.
7. Шимановський А. В., Оглобля А. И. Теория и расчет несущих элементов большепролетных пространственных конструкций. – Киев: Сталь, 2002. – 372 с.
8. Дикович И. Л. Статика упругопластических балок судовых конструкций. – Л.: Судостроение, 1967. – 264 с.
9. Беленький Л. М. Расчет судовых конструкций в пластической стадии. – Л.: Судостроение, 1983. – 448 с.

Поступила 12. 07. 2005