НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКИЙ РАЗДЕЛ

УДК 539.37

Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением и начальной поверхностью нагружения

П. П. Лепихин

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложена математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов с начальной поверхностью нагружения и затухающей памятью формы траектории на активном участке деформирования. Деформации и тип симметрии материала – произвольные. Построены физические уравнения материалов, не обладающих памятью формы траектории, со слабой затухающей памятью, с затухающей памятью n-го порядка. На основе разработанных определяющих соотношений получены физические уравнения для изотропных материалов. С позиций затухающей памяти формы траектории дано определение упруго-идеально-пластического материала. Посредством принятия условия малости мер деформации в течение всего "прошлого" разработана теория строгого построения и специализации определяющих соотношений материалов с затухающей памятью формы траектории первого порядка для бесконечно малых деформаций. Особое внимание уделено изотропным материалам.

Ключевые слова: рациональная механика, определяющее соотношение, активное деформирование, затухающая память формы траектории, простой упругопластический материал с начальной поверхностью напряжения, анизотропия.

Ранее [1–4] с использованием подходов рациональной механики континуума разработана математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов (тел) с затухающей памятью (забыванием) формы траектории, в которых пластические деформации возникают после приложения нагрузки и увеличиваются в процессе деформирования. Деформации и тип симметрии материала – произвольные. Для процессов деформирования, близких к пропорциональным и мало отличающихся от ненапряженной и недеформируемой конфигурации, построены физические уравнения тел, которые не обладают памятью формы траектории, со слабой затухающей памятью и с затухающей памятью n-го порядка. На основе построенных определяющих соотношений получены зависимости для изотропных материалов.

В работах [2, 4] на основе физических уравнений линейной теории упругопластичности при конечных деформациях [1] посредством принятия условия малости мер деформации в течение всего "прошлого" для двух вышеуказанных классов процессов деформирования разработана математическая теория строгого построения и специализации определяющих соотношений упрочняющихся упругопластических тел с затухающей памятью формы траектории первого порядка для бесконечно малых деформаций. Тип симметрии материала – произвольный. Особое внимание уделено изотропным материалам. Определены условия приведения построенных соотношений к эндохронной теории пластичности.

Как известно [5, 6], целый ряд широко применяемых в технике конструкционных упрочняющихся упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории обладает начальной поверхностью нагружения. Вместе с тем математическая теория построения физических уравнений таких тел, в первую очередь для произвольных деформаций и типов симметрии свойств материалов, мало разработана. В этой связи представляется целесообразным с научной и прикладной точки зрения разработать методику построения и специализации определяющих соотношений, моделирующих поведение отмеченных тел.

Настоящая работа посвящена разработке математической теории строгого построения и специализации определяющих соотношений простых по Ноллу упрочняющихся упругопластических материалов с начальной поверхностью нагружения и затухающей памятью формы траектории на активном участке деформирования. Деформации и тип симметрии материала – произвольные. Построены физические уравнения тел, не обладающих памятью формы траектории, со слабой затухающей памятью и с затухающей памятью n-го порядка. На основе разработанных определяющих соотношений получены физические уравнения для изотропных материалов. С позиций затухающей памяти формы траектории дано определение упруго-идеально-пластического тела. Посредством принятия условия малости мер деформации в течение всего "прошлого" разработана теория строгого построения и специализации определяющих соотношений материалов с затухающей памятью формы траектории первого порядка для бесконечно малых деформаций. Особое внимание уделено изотропным телам.

Полагаем, что все процессы деформирования начинаются в некоторый момент времени t_0 из ненапряженного и недеформированного начального состояния κ_0 и что при $t < t_0$ материал находился в таком же начальном состоянии. Такое предположение позволяет исключить в рассматриваемых телах, которые проявляют не зависящую от времени память о "прошлом", влияние предшествующего начальному состоянию деформирования (в большинстве случаев неизвестного) на напряжения в материале в конце процесса деформирования.

Следуя [1], приведенное (не зависящее от системы отсчета) определяющее соотношение, моделирующее реакцию произвольного простого тела с не зависящим от временной истории поведением, можно записать так:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{R}(\xi)\mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi})\mathbf{R}^{\mathrm{T}}(\xi), \tag{1}$$

где $\mathbf{T}(\xi)$ – тензор напряжений Коши в конце процесса деформирования; $\mathbf{C}^{\xi} = \mathbf{C}^{\xi}(\eta) = \mathbf{C}(\xi - \eta)$ (ξ фиксировано, $\eta = \xi - \xi' \geq 0$) – история правого тензора Коши–Грина вплоть до ξ; $\mathbf{C}(\xi)=\mathbf{U}(\xi)^2$; $\mathbf{R}(\xi)$ – ортогональный тензор поворота в полярном разложении градиента деформации $\mathbf{F}(\xi)= =\mathbf{R}(\xi)\mathbf{U}(\xi)$; $\mathbf{U}(\xi)$ – правый тензор растяжения; $\mathbf{G}$ – отображение истории $\mathbf{C}^{\xi}$ на симметричные тензоры; ξ и ξ' – длины дуг траектории тензора деформаций Грина второго типа $\mathbf{E}=0{,}5(\mathbf{C}-\mathbf{1})$ в конце процесса деформирования и в “прошлом” соответственно. Здесь и далее верхний индекс “т” обозначает транспонированный тензор.

В соответствии с [1] рассмотрим процессы чистого растяжения без вращения ($\mathbf{R}^{\xi}=\mathbf{1}$) с учетом особенностей механической реакции простого материала с не зависящим от временной истории поведением. Здесь $\mathbf{R}^{\xi}$ – история изменения тензора $\mathbf{R}$ вплоть до ξ. Для таких процессов из (1) получим

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi}). \tag{2}$$

В силу (1) $\mathbf{T}(\xi)$ известно для любых историй деформаций. Это свойство материала будем использовать в дальнейшем при построении теории упругопластических тел с затухающей памятью формы траектории и начальной поверхностью нагружения, что позволит в принципе упростить испытания и уменьшить их число для экспериментального определения реакции $\mathbf{G}$ [1, 7].

В рамках подчиняющихся приведенным выше уравнениям материалов с не зависящим от времени поведением выделим класс упругопластических тел, которые кроме не зависящего от времени поведения обладают другими дополнительными (определяющими) свойствами [1, 8]: деформацию тем или иным способом можно разделить на упругую и пластическую составляющие, справедлив некоторый критерий текучести, выполняется какой-либо закон течения.

Первое дополнительное определяющее свойство позволяет выделить как активные (изменяются упругие и пластические деформации), так и пассивные (изменяются только упругие деформации) процессы деформирования.

В соответствии с [1–4] предположим, что в классе упругопластических материалов можно выделить такие, которые в произвольных процессах активного деформирования проявляют затухающую память формы траектории. При этом отмеченная затухающая память представляет собой свойство, которое можно выразить математически с помощью функции реакции простого материала с упругопластическим поведением. Для определения такой затухающей памяти ограничимся активными процессами чистого растяжения без вращения и, следуя [7], введем понятие постоянной истории. Подобно тому как f^{ξ} обозначает историю вплоть до “момента” ξ произвольной функции f, определенной на $(-\infty, +\infty)$, историю постоянной функции f, значение которой всегда равно a, обозначим через a^c: $a^c(\eta)\equiv \equiv a$, $0\le\eta<\infty$.

Таким образом, $(\mathbf{C}^{\xi}(\eta))^c=\mathbf{C}(\xi)^c$ представляет собой постоянную историю (или историю-константу), соответствующую значению $\mathbf{C}(\xi)$ в месте, занимаемом телом-точкой X в отсчетной конфигурации $\mathbf{k}_0$. Для рассмотрения такого случая предположим, что если $\mathbf{C}^{\xi}$ – история, принадлежащая области определения D реакции $\mathbf{G}$, то для каждого η из $[0, \infty)$ постоянная история $(\mathbf{C}^{\xi}(\eta))^c$ также принадлежит D. Значение $\mathbf{G}(\mathbf{C}(\xi)^c)$ реакции $\mathbf{G}$ – это напряжение, которое соответствует пребыванию в состоянии покоя в конфигурации, полученной из $\mathbf{k}_0$ при деформации $\mathbf{C}(\xi)$. Тогда $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$ – постоянная история, соответствующая деформации, при которой в истории $\mathbf{C}^{\xi}$ достигается предел текучести материала $\mathbf{G}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c)$. Поскольку для всех $\mathbf{C}^{\xi}$ из D вплоть до $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})$ упругопластический материал при деформировании проявляет упругие свойства, то в любой постоянной истории $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$ имеем

$$\mathbf{G}(\mathbf{C}(\xi)^c) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi)), \tag{3}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi))$ – произвольная, в общем случае анизотропная, тензорная функция.

Основную идею затухающей памяти формы траектории примем в следующем виде: когда история $\mathbf{C}^{\xi}$ близка к постоянной истории $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$, то напряжения $\mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi})$ близки к напряжениям $\mathbf{G}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c)$. Другими словами, малое отклонение от постоянной истории $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$ вызывает напряжения, лишь незначительно отличающиеся от предела текучести, который соответствует $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$. Понятия "малости" и "близости" уточняются с помощью топологий. Если введены топологии, можно в точном смысле говорить о непрерывности, и в качестве необходимого условия для затухающей памяти получить точную и общую аксиому непрерывности: реакция $\mathbf{G}$ непрерывна в каждой постоянной истории $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$ из D. Как необходимо интерпретировать "непрерывность" физически, зависит от топологий, исходя из которых она определена.

Следуя [1, 7], введем забывающую меру, запоминание истории и следующее определение. Упругопластический материал при активном деформировании имеет слабо затухающую память, если он удовлетворяет аксиоме непрерывности с непрерывностью, определенной с помощью забывающей меры:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi}) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})) + \mathbf{o}(\mathbf{1}) \quad \text{при} \quad ||\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c|| \to 0, \tag{4}$$

где $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})) = \mathbf{G}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c)$.

Таким образом, при условии, что запоминание разности историй $\mathbf{C}^{\xi}$ и $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$ достаточно мало, напряжения представляют собой приблизительно напряжения, соответствующие $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})$.

В частности, в упруго-идеально-пластическом материале остаточный член в (4) тождественно равен нулю. При этом забывающая мера должна быть такой, что $||\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c|| = 0$. Обратно, если при таком определении запоминания выражение (4) справедливо с остаточным членом, равным нулю, то материал является упруго-идеально-пластическим.

Для описания более высоких, чем (4), приближений затухающей памяти формы траектории примем запоминание в виде [7]

$$||\mathbf{C}^{\xi}||^2 = A|\mathbf{C}(\xi)|^2 + \int_0^{\infty} k(\eta)|\mathbf{C}^{\xi}(\eta)|^2\, d\eta, \tag{5}$$

где A – положительная постоянная; функция $k(\eta)$ называется забывателем, или функцией влияния.

Запоминание в форме (5) введено в качестве постулата в работе [9], где дана первая математическая трактовка общего понятия затухающей памяти, на которой базировались многие более поздние работы.

Далее полагаем справедливым принцип затухающей памяти формы траектории n-го порядка, заключающийся в предположении, что при постоянной истории $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$ реакция $\mathbf{G}$ дифференцируема n раз по Фреше. Тогда

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi}) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})) +$$

$$+\sum_{i=1}^{n} \mathbf{G}_i(\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c) + \mathbf{o}(||\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c||^n), \tag{6}$$

где $\mathbf{G}_i$ – ограниченные однородные полиномиальные отображения степени i, зависящие от $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})$ [7].

Как следует из данных [7], разложение (6) заменяет данное отображение $\mathbf{G}$ суммой более простых отображений с ошибкой, которая стремится к нулю быстрее, чем n-я степень запоминания $||\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c||$ разности между истинной историей $\mathbf{C}^{\xi}$ и историей $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$. Из разложения Фреше (6) нельзя получить какие-либо сведения о значении $\mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi})$ для конкретных историй $\mathbf{C}^{\xi}$. Оно показывает, что если строить последовательность или семейство историй $\mathbf{C}^{\xi}$, запоминание разностей между которыми и историей $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^c$ стремится к нулю, то можно определить некоторую сумму однородных полиномиальных отображений степени n, которая отличается от $\mathbf{G}(\mathbf{C}^{\xi})$ на величину, стремящуюся к нулю быстрее, чем n-я степень этого запоминания.

Свойство затухающей памяти более высокого порядка ничего не говорит о влиянии на напряжения только деформирования или только материала. Оно показывает, как построить более простые определяющие уравнения, которые будут пригодны асимптотически для определенных классов материалов при определенных семействах историй деформаций.

Если принять, что материал имеет затухающую память первого порядка, то (6) аппроксимирует отклонение от напряжений $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}))$ с помощью ограниченного линейного функционала. Совокупность всех историй деформаций с конечным запоминанием образует гильбертово пространство и, согласно теореме Фреше–Рисса [7], каждый ограниченный линейный функционал в нем допускает представление в виде скалярного произведения. Чтобы применить эту теорему в нашем случае, предположим, что рассматривается затухающая память типа Колемана–Нолла (5). Тогда получим

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})) + \int_{-0}^{\xi-\xi_{\text{т}}} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}), \eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}]d\eta +$$

$$+ \mathbf{o}(||\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}||), \tag{7}$$

где ядро $\underline{\mathbf{K}}$ – тензор четвертого ранга такой, что

$$\int_{-0}^{\infty} |\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}), \eta)|^{2}\, d\eta < \infty. \tag{8}$$

Если пренебречь поправочным членом в (7), то получим соотношение, не зависящее от системы отсчета, которое можно использовать для задания специального воображаемого материала. Такое определяющее соотношение назовем подобно тому, как это сделали Колеман и Нолл в теории вязкоупругости [7], линейной теорией упругопластичности при конечных деформациях. Последняя от соответствующей теории вязкоупругости отличается тем, что она справедлива только для активных процессов чистого растяжения без вращения упругопластических материалов, поведение которых не зависит от времени и в которых после достижения начальной поверхности нагружения имеют место пластические деформации и затухающая память формы траектории.

В отличие от затухающей по времени памяти в вязкоупругости, когда забывание наблюдается и после прекращения процесса деформирования, в моделируемых здесь упругопластических материалах затухающая память проявляется только при активном деформировании, после его прекращения нет и забывания формы траектории.

Построенные определяющие соотношения справедливы для произвольных активных процессов чистого растяжения без вращения материалов с любым типом симметрии свойств при больших деформациях.

С использованием (1), зная для конкретного процесса историю изменения тензора $\mathbf{R}$, для произвольных активных процессов деформирования простых упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории, начальной поверхностью нагружения и любым типом симметрии свойств, как следует из вышеизложенного и данных [1, 7], тензор напряжений Коши на основе (7) может быть определен следующим образом:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{R}(\xi)\left\{\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})) + \int_{-0}^{\xi-\xi_{\text{т}}} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}), \eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}]d\eta +\right.$$

$$\left. + \mathbf{o}(\| \mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c} \|) \right\} \mathbf{R}^{\text{т}}(\xi). \qquad (9)$$

Для изотропного материала, следуя данным [10], соотношение (7) может быть приведено к такому выражению:

$$\mathbf{T}(\xi) = \mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}})) + \int_{-0}^{\xi - \xi_{\text{т}}} h(\eta) \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}), \eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] d\eta. \qquad (10)$$

Отметим, что уравнение (10) получено для активных процессов чистого растяжения без вращения, в которых $\mathbf{R}^{\xi} = \mathbf{1}$ и $\mathbf{B} = \mathbf{C}$.

При записи (10) опущен поправочный член.

Тензорная функция $\mathbf{f}(\,)$ и линейный функционал, заданный интегралом в уравнении (10), изотропные в том смысле, что подчиняются тождествам [10]:

$$\mathbf{Q}\mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}))\mathbf{Q}^{\text{т}} = \mathbf{f}(\mathbf{Q}\mathbf{B}(\xi_{\text{т}})\mathbf{Q}^{\text{т}}); \qquad (11)$$

$$\mathbf{Q} \int_{-0}^{\xi} h(\eta) \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}), \eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] d\eta \, \mathbf{Q}^{\text{т}} =$$

$$= \int_{-0}^{\xi} h(\eta) \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{Q}\mathbf{B}(\xi_{\text{т}})\mathbf{Q}^{\text{т}}, \eta) \mathbf{Q}[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] \mathbf{Q}^{\text{т}} d\eta \qquad (12)$$

для всех ортогональных тензоров $\mathbf{Q}$.

Согласно фундаментальной теореме теории изотропных тензорных функций [7] $\mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}))$ представляется следующим образом:

$$\mathbf{f}(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}})) = h_0 \mathbf{1} + h_1 \mathbf{B}(\xi_{\text{т}}) + h_2 \mathbf{B}(\xi_{\text{т}})^2, \qquad (13)$$

где h_0, h_1, h_2 – функции таких скалярных инвариантов:

$$tr\,\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}),\ tr\,\mathbf{B}(\xi_{\text{т}})^2,\ tr\,\mathbf{B}(\xi_{\text{т}})^3. \qquad (14)$$

Как следует из данных [10], $h(\eta)\underline{\mathbf{K}}$ в соотношении (12) может быть записано так:

$$h(\eta) \underline{\mathbf{K}}(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}), \eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] = \mathbf{f}_1(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}), \eta)[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] +$$

$$+ [\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] \mathbf{f}_1(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}), \eta) + tr\,\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] \mathbf{f}_2(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}), \eta)\} \mathbf{1} +$$

$$+ tr\,\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta) - \mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}] \mathbf{f}_3(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}), \eta)\} \mathbf{B}(\xi) +$$

$$+tr\{[\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}]\mathbf{f}_4(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}),\eta)\}\mathbf{B}^2(\xi), \quad (15)$$

где для каждого η тензорные функции $\mathbf{f}_i(\mathbf{B}(\xi_{\text{т}}),\eta)$ изотропны в смысле уравнения (11) и, следовательно, имеют представление в форме (13). Специальный случай $\underline{\mathbf{K}}\equiv\mathbf{0}$ в уравнении (10) соответствует теории упруго-идеально-пластического изотропного материала при конечных деформациях.

При разработке теории бесконечно малых деформаций упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории первого порядка и начальной поверхностью нагружения на основе уравнения (7), подобно тому, как это сделано в [7] для вязкоупругих материалов, будем строить семейства смещений, которые соответствуют малым мерам деформации в течение всего "прошлого", полагая

$$\mathbf{H}\equiv\Delta\mathbf{u}=\mathbf{F}-\mathbf{1}, \qquad \widetilde{\mathbf{E}}\equiv\frac{1}{2}(\mathbf{H}+\mathbf{H}^{\text{т}}), \qquad \widetilde{\mathbf{R}}\equiv\frac{1}{2}(\mathbf{H}-\mathbf{H}^{\text{т}}), \quad (16)$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещения; $\widetilde{\mathbf{E}}$ и $\widetilde{\mathbf{R}}$ – тензоры бесконечно малых деформации и поворота.

Через ε обозначим наименьшую верхнюю грань норм градиента смещения $\mathbf{H}$, соответствующих всем деформациям, которым подвергался материал:

$$\varepsilon\equiv\sup|\mathbf{H}^{\xi}(\eta)|, \qquad \eta\geq 0. \quad (17)$$

Рассмотрим семейства историй градиента такие, что $\varepsilon\to 0$.

С использованием данных [7] можно показать, что

$$\mathbf{C}^{\xi}(\eta)-\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})^{c}=2[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)-\widetilde{\mathbf{E}}^{c}(\xi-\eta)]+\mathbf{0}(\varepsilon^2)=\mathbf{0}(\varepsilon); \quad (18)$$

$$\mathbf{R}(\xi)=\mathbf{1}+\widetilde{\mathbf{R}}(\xi)+\mathbf{0}(\varepsilon^2)=\mathbf{1}+\mathbf{0}(\varepsilon). \quad (19)$$

Тогда, подставив (18) в (7), получим

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}))+2\int\limits_{-0}^{\xi-\xi_{\text{т}}}h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}),\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)-\widetilde{\mathbf{E}}^{c}(\xi-\eta)]d\eta+\mathbf{o}(\varepsilon). \quad (20)$$

В случае бесконечно малых деформаций можно показать, что замена $\mathbf{C}(\xi_{\text{т}})$ на $\mathbf{1}$ в $\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}),\eta)$ приводит к ошибке порядка $\mathbf{o}(\varepsilon)$ [11]. С учетом этого, а также связи правого тензора Коши–Грина с тензором бесконечно малой деформации в виде

$$\mathbf{C}(\xi)=\mathbf{1}+2\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)+\mathbf{0}(\varepsilon^2)=\mathbf{1}+\mathbf{0}(\varepsilon) \quad (21)$$

соотношение (20) можно преобразовать следующим образом:

$$\mathbf{T}(\xi)=\mathbf{g}(\widetilde{\mathbf{E}}(\xi_{\text{т}}))+2\int_{-0}^{\xi-\xi_{\text{т}}} h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)-\widetilde{\mathbf{E}}^{c}(\xi-\eta)]d\eta+\mathbf{o}(\varepsilon). \quad (22)$$

Аналогично [7] для бесконечно малых деформаций применим линеаризацию первого слагаемого $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}))$, описывающего упругую деформацию, и обозначим функцию забывания $\underline{\mathbf{M}}(\eta)$ через [1]:

$$\underline{\mathbf{M}}(\eta)=-2\int_{\eta}^{\infty} h(z)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},z)dz,\qquad \dot{\underline{\mathbf{M}}}(\eta)=\frac{d}{d\eta}\underline{\mathbf{M}}(\eta)=2h(\eta)\underline{\mathbf{K}}(\mathbf{1},\eta), \quad (23)$$

где $\underline{\mathbf{M}}(\eta)$ – функция забывания.

С учетом разрывности тензорной функции $\underline{\mathbf{M}}(\xi)$ при $\xi=0$ и данных [12] можно записать

$$d\underline{\mathbf{M}}(\eta)=\dot{\underline{\mathbf{M}}}(\eta)d\eta+\underline{\mathbf{M}}(\eta)\delta(\eta-0)d\eta, \quad (24)$$

где $\delta(\eta-0)$ – δ-функция Дирака.

Тогда с учетом (24) и возможности линеаризации функции $\mathbf{g}(\mathbf{C}(\xi_{\text{т}}))$ соотношение (22) примет вид

$$\mathbf{T}(\xi)=\underline{\mathbf{L}}[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi_{\text{т}})]+\int_{-0}^{\xi-\xi_{\text{т}}} d\underline{\mathbf{M}}(\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)-\widetilde{\mathbf{E}}^{c}(\xi-\eta)]+\mathbf{o}(\varepsilon). \quad (25)$$

Принимая во внимание данные [12] и используя интегрирование δ-функции Дирака, входящей в дифференциал функции забывания $d\underline{\mathbf{M}}(\eta)$, можно, пренебрегая поправочным членом, переписать (25) в виде

$$\mathbf{T}(\xi)=(\underline{\mathbf{L}}-\underline{\mathbf{M}}(\xi-\xi_{\text{т}}))[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi_{\text{т}})]+\underline{\mathbf{M}}(0)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi)]+\int_{0}^{\xi-\xi_{\text{т}}} d\underline{\mathbf{M}}(\eta)[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi-\eta)]. \quad (26)$$

Иные способы перехода от (25) к (26) отмечены в [12].

Другую форму соотношений, определяющих напряжения, можно получить из (25) заменой переменной $\tau=\xi-\eta$ и интегрированием по частям:

$$\mathbf{T}(\xi)=\underline{\mathbf{L}}[\widetilde{\mathbf{E}}(\xi_{\text{т}})]+\int_{\xi_{\text{т}}}^{\xi}\underline{\mathbf{M}}(\xi-\tau)\left[\frac{d\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)}{d\tau}d\tau\right]. \quad (27)$$

В случае $\underline{\mathbf{M}}=\mathbf{0}$ (26), (27) сводятся к реакции упруго-идеально-пластического материала.

Большой практический интерес представляют изотропные формы упругопластических соотношений между напряжениями и деформациями. В этом случае линейные тензорные функции $\underline{\mathbf{L}}[\,]$ и $\underline{\mathbf{M}}(\,)[\,]$ – изотропные.

Каждая линейная изотропная тензорная функция $\underset{=}{\mathbf{L}}[\mathbf{A}]$ имеет, согласно [11], такое представление

$$\underset{=}{\mathbf{L}}[\mathbf{A}] = c_0(tr\,\mathbf{A})\mathbf{1} + c_1\mathbf{A}, \tag{28}$$

где c_0 и c_1 – константы.

С использованием (28) из (27) получим

$$\mathbf{T}(\xi) = \left[\lambda\, tr\,\widetilde{\mathbf{E}}(\xi_{\text{т}}) + \int_{\xi_{\text{т}}}^{\xi} \bar{\lambda}(\xi - \tau)\frac{d}{d\tau} tr\,\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)\,d\tau\right]\mathbf{1} +$$

$$+ 2\mu\widetilde{\mathbf{E}}(\xi_{\text{т}}) + 2\int_{\xi_{\text{т}}}^{\xi} \bar{\mu}(\xi - \tau)\frac{d}{d\tau}[\widetilde{\mathbf{E}}(\tau)]\,d\tau, \tag{29}$$

где λ и μ – коэффициенты Ламе материала; $\bar{\lambda}(\xi - \tau)$, $\bar{\mu}(\xi - \tau)$ – скалярные функции материала.

Разложив тензоры напряжений и бесконечно малых деформаций в соотношении (29) на шаровую и девиаторную составляющие и приравняв соответствующие составляющие в правой и левой частях полученного соотношения, запишем

$$\mathbf{s}(\xi) = 2\mu\mathbf{e}(\xi_{\text{т}}) + 2\int_{\xi_{\text{т}}}^{\xi} \bar{\mu}(\xi - \tau)\frac{d\mathbf{e}(\tau)}{d\tau}\,d\tau; \tag{30}$$

$$T_0(\xi) = tr\,\mathbf{T}(\xi) = 3K\varepsilon_0(\xi_{\text{т}}) + 3\int_{\xi_{\text{т}}}^{\xi} \bar{K}(\xi - \tau)\frac{d\varepsilon_0(\tau)}{d\tau}\,d\tau, \tag{31}$$

где $\mathbf{e}(\;) = \widetilde{\mathbf{E}}(\;) - \frac{1}{3}\varepsilon_0\mathbf{1}$ – девиатор тензора бесконечно малых деформаций (далее девиатор деформаций); тензор $\frac{1}{3}\varepsilon_0\mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора деформации, скаляр $\frac{1}{3}\varepsilon_0$ – среднюю деформацию;

$$3K = 3\lambda + 2\mu, \qquad 3\bar{K}(\;) = 3\bar{\lambda}(\;) + 2\bar{\mu}(\;); \tag{32}$$

$\mathbf{s}(\;) = \mathbf{T}(\;) - \frac{1}{3}T_0(\;)\mathbf{1}$ – девиатор напряжений; тензор $\frac{1}{3}T_0(\;)\mathbf{1}$ представляет собой шаровую составляющую тензора напряжений, скаляр $\frac{1}{3}T_0(\;)$ – среднее напряжение; K – модуль объемного сжатия.

При выполнении условия (17) не различают отсчетную, разгруженную и актуальную конфигурации и, как следует, например, из [13], с точностью до бесконечно малых второго порядка малости в упругопластическим материале можно разделить полные деформации так:

$$\widetilde{\mathbf{E}} = \widetilde{\mathbf{E}}^e + \widetilde{\mathbf{E}}^p, \tag{33}$$

где $\widetilde{\mathbf{E}}^e$ и $\widetilde{\mathbf{E}}^p$ – тензоры бесконечно малых упругих и пластических деформаций соответственно; здесь и далее верхние индексы e и p при соответствующем математическом объекте обозначают его упругие и пластические составляющие.

Применив разложение тензоров в уравнении (33) на девиаторные и шаровые составляющие и приравняв такие составляющие правой и левой частям, получим

$$\mathbf{e} = \mathbf{e}^e + \mathbf{e}^p; \tag{34}$$

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e + \varepsilon_0^p. \tag{35}$$

В общем случае при деформировании реальных материалов с упругопластическим поведением, как отмечалось в [14], имеем

$$\varepsilon_0^e \neq 0; \tag{36}$$

$$\varepsilon_0^p \neq 0. \tag{37}$$

Для несжимаемого в разгруженном состоянии (пластически несжимаемого) упругопластического материала запишем

$$\varepsilon_0^p = 0 \tag{38}$$

и, как следует из соотношения (35), –

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_0^e. \tag{39}$$

При этом

$$\widetilde{\mathbf{E}}^p = \mathbf{e}^p. \tag{40}$$

Согласно (40) тензор пластических деформаций является девиатором.

С учетом данных [7] при достаточно малых деформациях любых упругопластических материалов можно принять, что упругая составляющая тензора полных деформаций связана с тензором напряжений законом Гука. Тогда получим

$$\mathbf{s} = 2\widetilde{G}\mathbf{e}^e; \tag{41}$$

$$T_0 = 3\widetilde{K}\varepsilon_0^e, \tag{42}$$

где $\widetilde{G}$ и $\widetilde{K}$ – зависящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия. Причем при нулевом значении тензора упругих деформаций тензор напряжений также нулевой. Это следует из определений разгруженной конфигурации и тензора упругих деформаций.

При записи (41) и (42) полагали, что в процессе деформирования упругопластических материалов сохраняется изотропия упругих свойств с изменением последних в процессе активного деформирования. Зависимость упругих свойств ряда материалов с упругопластическим поведением от пластической деформации обнаружена экспериментально [15–17]. Систематические исследования такой зависимости в настоящее время отсутствуют.

Если пренебречь зависимостью упругих свойств от пластической деформации, то из (41), (42) получим

$$\mathbf{s} = 2G\mathbf{e}^{e}; \qquad (43)$$

$$T_0 = 3K\varepsilon_0^{e}, \qquad (44)$$

где G и K – не зависящие от пластической деформации модули сдвига и объемного сжатия.

Для пластически несжимаемого материала, когда согласно [18] $\overline{K}(\,) = \mathrm{const} = K$, соотношение (31) примет вид

$$T_0(\xi) = 3K\varepsilon_0(\xi). \qquad (45)$$

При этом зависимость (30) остается без изменения.

Приняв $\mathbf{R}^{\xi} \neq \mathbf{1}$, с учетом (9) и (19) можно заключить, что с точностью до бесконечно малых второго порядка малости полученные для активных процессов чистого растяжения без вращения в случае бесконечно малых деформаций выражения для напряжений не изменятся и, следовательно, применимы для моделирования общего случая деформирования упрочняющихся упругопластических материалов с затухающей памятью формы траектории и начальной поверхностью нагружения.

Резюме

Запропоновано математичну теорію строгої побудови і спеціалізації визначальних співвідношень простих по Ноллу зміцнюваних пружно-пластичних матеріалів із початковою поверхнею навантаження та згасаючою пам'яттю форми траєкторії на активній ділянці деформування. Деформації і тип симетрії матеріалу – довільні. Побудовано фізичні співвідношення матеріалів, які не мають пам'яті форми траєкторії, зі слабкою згасаючою пам'яттю та зі згасаючою пам'яттю n-го порядку. На основі розроблених визначальних співвідношень отримано фізичні рівняння для ізотропних матеріалів. Із позицій згасаючої пам'яті форми траєкторії дано визначення

пружно-ідеально-пластичного матеріалу. Завдяки прийняттю умови малості мір деформації впродовж усього “минулого” розроблено теорію строгої побудови і спеціалізації визначальних співвідношень матеріалів із згасаючою пам’яттю форми траєкторії першого порядку для нескінченно малих деформацій. Особливу увагу приділено ізотропним матеріалам.

1. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 1. Конечные деформации // Пробл. прочности. – 2004. – № 5. – С. 63 – 77.
2. *Lepikhin P. P.* Simulation of fading path shape memory in theory of simple elastoplastically deforming materials: Abstracts Euromech (European Mechanics Society) Colloquium 458 “Advanced Methods in Validation and Identification of Nonlinear Constitutive Equations in Solid Mechanics”. – Moscow: Moscow University Press, 2004. – 115 p.
3. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти в теории простых по Ноллу материалов с упругопластическим поведением // Прогрессивная техника и технология машиностроения, приборостроения и сварочного производства: Тр. Междунар. науч.-техн. конф., посвященной 100-летию механико-машиностроительного и 50-летию сварочного факультетов (25–28 мая 1998 г.). – Киев: Нац. техн. ун-т Украины “КПИ”, 1998. – Т. 3. – С. 105 – 109.
4. *Лепихин П. П.* Моделирование затухающей памяти формы траектории в теории простых материалов с упругопластическим поведением. Сообщ. 2. Бесконечно малые деформации // Пробл. почности. – 2004. – № 6. – С. 87 – 98.
5. *Трощенко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка. – 1993. – Т. 1. – 286 с.
6. *Трощенко В. Т., Красовский А. Я., Покровский В. В. и др.* Сопротивление материалов деформированию и разрушению. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка. – 1994. – Т. 2. – 701 с.
7. *Truesdell C.* A First Course in Rational Continuum Mechanics. – Baltimore: The Johns Hopkins University, 1972.
8. *Lucchesi M., Owen D. R., and Podio-Guidugli P.* Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Pt. 3: Approximate constitutive relations // Arch. Rat. Mech. Analysis. – 1992. – **117**. – P. 53 – 96.
9. *Coleman B. D. and Noll W.* An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics // Ibid. – 1960. – **6**. – P. 355 – 370.
10. *Coleman B. D. and Noll W.* Foundations of linear viscoelasticity // Reviews Modern Phys. – 1961. – **33**. – P. 239 – 249.
11. *Truesdell C. and Noll W.* The Non-Linear Field Theories of Mechanics. – New York: Springer, 1992.

12. *Christensen R. M.* Theory of Viscoelasticity. An Introduction. – New York; London: Academic Press, 1971.
13. *Casey J.* Approximate kinematical relation in plasticity // Int. J. Solids Struct. – 1985. – **21**, No. 7. – P. 671 – 682.
14. *Коларов Д.*, *Балтов А.*, *Бончева Н.* Механика на пластичните среди. – София: Изд-во на българската академия на науките, 1975.
15. *Жуков А. М.* Некоторые особенности поведения металлов при упруго-пластическом деформировании // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 30 – 57.
16. *Ленский В. С.* Экспериментальная проверка основных постулатов общей теории упругопластических деформаций // Вопросы теории пластичности. – М.: Изд-во АН СССР, 1961. – С. 58 – 82.
17. *Шишмарев О. А.*, *Кузьмин Е. Я.* О зависимости упругих постоянных металла от пластической деформации // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. – 1961. – № 3. – С. 167 – 169.
18. *Valanis K. C.* A theory of viscoplasticity without a yield surface. Pt. 1. General theory // Arch. Mech. – 1971. – **23**. – No. 4. – P. 517 – 533.

Поступила 18. 04. 2006