

Проблема больших перемещений подземных трубопроводов. Сообщение 2. Устойчивость прямолинейного трубопровода при идеально пластическом деформировании грунта

И. В. Орыняк, А. В. Богдан

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Разработаны аналитические модели оценки потери устойчивости изначально прямолинейного трубопровода в среде. Отмечены недостатки существующих аналитических методов, которые не учитывают возможного продольного перемещения точек трубопровода, ограниченности длины участка и в предельном случае не приводят к известным результатам оценки потери устойчивости на воздухе. Предложенные модели позволяют аналитически оценить критическую нагрузку, длину и форму деформированного трубопровода при горизонтальном и вертикальном поперечном его деформировании с учетом указанных факторов. Полученные результаты проверяли путем численного моделирования процесса деформирования по разработанной ранее в сообщении 1 процедуре и с помощью натурального эксперимента.

Ключевые слова: трубопровод, стержень, потеря устойчивости, сопротивление среды, коэффициент податливости, максимальный прогиб.

Введение. Из-за многочисленных случаев [1–4] выпучивания трубопроводов в слабых грунтах (пески, болота, подводные и оттаиваемые грунты) приобретает актуальность разработка методов оценки их устойчивости. К подобной математической проблеме сводится также задача обеспечения устойчивости прямолинейного надземного участка трубопровода, который лежит на многих опорах. При нагревании трубопровода продольное трение приводит к возникновению продольной сжимающей силы, а поперечное трение на опорах играет роль почти распределенной поперечной силы, аналогично как усилие сопротивления грунта.

Выполнение расчетов на устойчивость трубопроводов предусмотрено нормативными документами на проектирование, однако их требования не всегда являются четкими и логичными. СНиП [5] формулирует следующее критериальное условие для проверки общей устойчивости:

$$N \leq \nu N_{cr}. \quad (1)$$

Здесь N – эквивалентная продольная сила [2] (pre buckling force [1]), учитывающая силу давления на поперечное сечение трубопровода и равная для прямолинейного трубопровода

$$N = FE\alpha T + (0,5 - \mu) FpR/t, \quad (2)$$

где F – площадь поперечного сечения; R – внутренний радиус; E – модуль упругости; α – коэффициент термического расширения; T – перепад температур; μ – коэффициент Пуассона; t – толщина стенки трубы. Величина ν представляет собой коэффициент запаса, N_{cr} – сила потери устойчивости.

Недостаток требования (1) состоит не только в том, что не определены пути нахождения N_{cr} , но и в том, что оно может быть излишне консервативным. С общепринятой точки зрения строительной механики N_{cr} соответствует переходу из одного равновесного состояния в другое, причем последнее может быть достаточно близким к первому, и условия прочности и деформативности для него вполне могут удовлетворяться. Также необоснованно требование учета действия на опору прямолинейной балочной системы фиктивной поперечной силы, равной $0,01N$, что, по мнению авторов СНиП [5], должно учитывать возможную кривизну трубопровода.

Согласно западным нормам, особенно предназначенным для проектирования подводных трубопроводов, также необходимо проводить анализ устойчивости, однако они более консервативны в методах и критериях оценки. Использование известного международного стандарта контролирующей организации DNV [6] позволяет различать потерю устойчивости при жестком (displacement controlled) и мягком (load controlled) нагружении трубопровода. Если второй случай является недопустимым [6], то в первом следует показать, что максимальные поперечные деформации не превышают некоторого допустимого уровня (например, 0,3%). Однако и мягкое и жесткое нагружения являются идеализацией реальной схемы нагружения, обладающей некоторой конечной податливостью. Более правильная постановка проблемы заключается в учете такой податливости. В американском стандарте [7] предусмотрены два вида расчета на устойчивость: полный расчет положения трубопровода и его деформации с последующим анализом недопустимости либо демонстрация того, что при заданных условиях расположения и нагружения он не изменит своего положения в пространстве.

Такая общая формулировка требований к оценке потери устойчивости трубопровода, разные условия его расположения и особенности взаимодействия с различными средами приводят к тому, что главными становятся разработка и применение численных методов при расчете реальных трубопроводов [8]. В трубопроводной индустрии существует ряд коммерческих программ, позволяющих осуществлять полную оценку напряжений, перемещений и деформаций трубопровода [9]. Отметим, что в отличие от многих программ строительной механики, где расчет устойчивости основан на поиске собственных чисел и собственных форм и где потеря устойчивости (бифуркация решения) ассоциируется с отказом конструкции, ее оценка не является отдельной опцией в программах расчета трубопроводов. Они дают непрерывное решение с увеличением нагрузки при любых схемах нагружения. Описанная в сообщении 1 программа также позволяет проводить такие расчеты.

Общий недостаток численных методов состоит в том, что они не позволяют решить два важных вопроса: необходимо ли для конкретных условий проводить такие сложные расчеты на устойчивость (деформируемость) или в данном случае нежелательные перемещения полностью исключены и какова роль влияния размеров трубопровода, жесткости грунта, т.е. не может ли малое отклонение реальных параметров приводить к нежелательным последствиям. Это значит, что инженер должен располагать некоторыми

начальными сведениями о процессе потери устойчивости, чтобы квалифицированно анализировать реальные случаи и предлагать решения. Примером может служить известная формула Эйлера для усилия N_0 потери устойчивости прямолинейного шарнирно закрепленного стержня конечной длины L :

$$N_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (3)$$

где I – момент инерции сечения. Очевидно, что всегда можно сделать прикидочные расчеты, даже если характеристики сечения переменны, условия закрепления разные, величина усилия по длине стержня изменяется и т.д.

Теоретический анализ потери устойчивости изначально прямого бесконечного стержня в упругой среде не представляет сложности, в том числе при его конечной длине. Гораздо сложнее осуществить решение при идеально пластическом взаимодействии стержня и среды. Практическое развитие таких исследований обусловлено явлением бокового выпучивания железнодорожного полотна. Обзор литературы по этому вопросу приведен в работе [10]. Методы решения в основном базируются на численном решении дифференциальных уравнений, и результаты приводятся для конкретных случаев нагружения [11]. Важно отметить, что в отличие от потери устойчивости в упругой среде, критическое усилие существенно зависит от начального несовершенства (отклонение стержня от прямолинейной формы). Численный анализ дифференциальных уравнений потери устойчивости трубопровода в пластической среде проводился в работах [3, 12]. Очевидно, что возможности этих методов по сравнению с универсальными программами ниже, кроме того, их нельзя использовать при прогнозировании.

Известным является аналитическое решение задачи устойчивости трубопровода в среде [13]. Для случаев поперечной (lateral) и вертикальной (upheaval) потери устойчивости в [13] предложены аналитические формы деформирования трубопровода. Критическое усилие, амплитуда перемещений и длина участка деформирования определяются из условия минимизации критического усилия в зависимости от длины участка деформирования с учетом увеличения общей длины трубопровода при деформировании и результирующей частичной разгрузке. Дальнейшее развитие метод получил в работах [14, 15], где учитываются различные неравномерности в исходной геометрии, усилия взаимодействия трубы с грунтом, а также влияние разных граничных условий защемления трубопровода. Другие модели оценки устойчивости трубопровода предложены в [16, 17]. Заметим, что все аналитические оценки получены для жесткого нагружения.

Несмотря на значительный прогресс в разработке аналитических методов для почти прямолинейных трубопроводов в идеально пластической среде, остаются не выясненными, в частности, такие вопросы.

- Как влияет нежесткость защемления продольных перемещений на критическое усилие и амплитуду перемещений, т.е. где граница между жестким и мягким нагружением. Согласуются ли полученные оценки с известными решениями для трубы на воздухе, например с формулой (3).

• Как влияет ограниченная длина трубопровода на критическое усилие и как деформируется трубопровод при дальнейшем увеличении нагрузки (закритическое поведение).

Целью настоящей работы является решение поставленных вопросов. Дополнительно проводилось сопоставление аналитических и численных результатов, полученных на основе разработанной в сообщении 1 [18] компьютерной программы. Чтобы полученное решение для среды согласовывалось с известными решениями для трубы (стержень) на воздухе, рассмотрим ее поведение.

1. Устойчивость прямолинейного стержня на воздухе. Дифференциальное уравнение равенства моментов при сжатии изначально прямолинейного стержня в линеаризованной постановке имеет вид

$$w'' + \frac{\tilde{N}}{EI} w = 0, \quad (4)$$

где w – прогиб стержня; \tilde{N} – значение силы в процессе деформирования. Его нетривиальное решение для случая шарнирного закрепления представляется формулой (3), при этом уравнение для прогибов описывается синусоидой

$$w = A \sin k_0 s \quad (5)$$

($k_0^2 = N_0 / (EI) = \pi^2 / L^2$, продольная координата s отсчитывается вдоль искривленной оси стержня от точки его закрепления; при этом константа A остается неопределенной).

При изучении закритического поведения стержня важно определить максимальный прогиб A при нагрузке N , превышающей значение N_0 . Введем в рассмотрение параметр $\Delta = (N - N_0) / N_0$, характеризующий “избыток” силы N по сравнению с N_0 . Таким образом, представляет интерес зависимость A от Δ .

Рассмотрим жесткое нагружение. При анализе необходимо различать физическую длину стержня L и геометрическую длину прямолинейного участка B , на который опирается (проецируется) стержень. До нагружения размеры длин одинаковые. Разница в их размерах обусловлена деформацией ε (разгрузкой) стержня, которую легко найти, если известна форма деформированного трубопровода (5):

$$\varepsilon = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{\dot{w}^2}{2} ds = \frac{1}{L} \int_0^L \frac{A^2 k_0^2 \cos^2 k_0 s}{2} ds = \left(\frac{A k_0}{2} \right)^2. \quad (6)$$

Введем N_{new} – продольное усилие в деформированном стержне. Очевидно, что с учетом разгрузки имеем

$$N_{new} = N - \varepsilon EF, \quad (7)$$

где N – первоначальное усилие в стержне.

Поскольку уравнение (4) записано для деформированного состояния, то, подставив в него (7) с учетом (6), получим уравнение деформирования при жестком нагружении:

$$w'' + k_0^2(1 + \Delta - n)w = 0, \quad (8)$$

где $n = \frac{A^2 F}{4I}$; для тонкостенной трубы кругового сечения имеем $n \approx \frac{A^2 2\pi R t}{4\pi R^3 t} = \frac{A^2}{2R^2}$. По-видимому, чтобы труба сохраняла искривленное состояние, потребуем равенства $\Delta = n$. Тогда выражение для максимального прогиба A запишем так:

$$A = R\sqrt{2\Delta}. \quad (9)$$

В случае мягкого нагружения разгрузка не происходит. Тем не менее с ростом усилия выше критического значения перемещения точек стержня остаются конечными. В этом случае линеаризованная постановка задачи (4) является неприслемой. Необходимо рассматривать уравнение равенства моментов в нелинейной постановке.

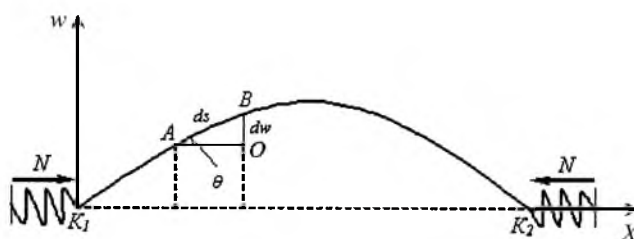


Рис. 1. Геометрия изогнутого трубопровода.

Рассмотрим закритическую геометрию стержня, нагруженного первоначальной силой N через упругие элементы податливостью C . Выделим криволинейный элемент ds (рис. 1) и определим угол θ как угол наклона касательной к оси X (рис. 1). Тогда из треугольника ABO имеем

$$\frac{dw}{ds} = \sin \theta. \quad (10)$$

Дифференцируя (10) по длине стержня, получаем

$$\frac{d^2 w}{ds^2} = \cos \theta \frac{d\theta}{ds}. \quad (11)$$

Поскольку $\frac{d\theta}{ds} = \frac{M(s)}{EI}$, уравнение для моментов в нелинейной постановке запишем так:

$$w'' + \frac{N_{new}}{EI} w \sqrt{1 - w'^2} = 0. \quad (12)$$

Теперь необходимо получить выражение для усилия N_{new} в процессе деформирования стержня, которое зависит от деформации ε . Заметим, что наличие упругих элементов на концах стержня приводит к тому, что они “съезжаются” к центру стержня, причем величина перемещения каждого конца ΔL_C пропорциональна податливости C и изменению усилия $\Delta N = N - N_{new}$, т.е. $\Delta L_C = \Delta N C$. В результате деформации ε физическая длина стержня составила $L(1 + \varepsilon)$. Связывая начало координатной оси X с точкой K_1 ($s = 0$), для деформирования стержня получаем следующее уравнение:

$$w = A \sin\left(\frac{\pi s}{L} \frac{1}{1 + \varepsilon}\right). \quad (13)$$

Геометрическая длина стержня равна интегралу от $ds(x) \approx (x + 0,5w'^2(x))dx$ по x от точки K_1 до точки K_2 (рис. 1). Сопоставляя геометрическую длину стержня с физической, в первом приближении получаем

$$L + \varepsilon L = L - 2\Delta L_C + \int_0^{L-2\Delta L_C} \frac{w'^2}{2} dx, \quad (14)$$

откуда, учитывая, что $ds \approx dx$, $\varepsilon \rightarrow 0$, находим

$$\Delta N \approx \frac{A^2 k_0^2}{4(m_C + 1)} EF, \quad (15)$$

где m_C – безразмерная податливость, $m_C = \frac{2CEF}{L}$, ее смысл заключается в том, что при $m_C = 1$ продольное усилие разгрузится на величину, которая равна половине от разгрузки при нулевой податливости.

Общее уравнение для искривленного стержня с учетом податливости концов и разгрузки продольного усилия в результате деформации примет вид

$$w'' + k_0^2(1 + \Delta - n)w \left(1 - \frac{1}{2}w'^2\right) = 0. \quad (16)$$

Подставив (13) и (15) в (16), получим выражение для максимального прогиба тонкостенной трубы:

$$A = RL \sqrt{\frac{8(m_C + 1)}{4L^2 + R^2 \pi^2 (m_C - 3)}} \Delta. \quad (17)$$

Выражение (17) определяет максимальный прогиб A при любом промежуточном значении податливости. В частности, при $m_C = \infty$ имеем $A = \frac{L}{\pi} \sqrt{8\Delta}$, что полностью совпадает с известным результатом [19, 20]. При

$m_C = 0$ (закрепленные концы) с учетом того что в реальном трубопроводе $L \gg R$, получим $A \approx R\sqrt{2\Delta}$. Отметим, что если имеет место жесткое закрепление ($m_C \rightarrow 0$), то из уравнения разгрузки (7) можно получить $N_{new} = N_0 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}$, т.е. разгрузка происходит до минимального усилия потери устойчивости.

Уравнение (16) можно решить также другим способом, если использовать в нем интегрально усредненное значение $\frac{w^2(x)}{2}$, равное $\left(\frac{Ak_0}{2}\right)^2$, т.е. вместо переменной величины $\left(1 - \frac{1}{2}w'^2(x)\right)$ использовать константу, равную $1 - \left(\frac{Ak_0}{2}\right)^2$. Тогда получим следующее выражение для максимального прогиба тонкостенной трубы:

$$A = 2RL \sqrt{\frac{m_C + 1}{2L^2 + R^2 \pi^2 (m_C - 1)}} \Delta. \quad (18)$$

При $m_C = \infty$ (неограниченная податливость) имеем $A = 2\frac{L}{\pi}\sqrt{\Delta}$, что в $\sqrt{2}$ раза меньше полученного выше значения. При $m_C = 0$ значения A в обоих случаях совпадают.

Анализируя устойчивость стержня на воздухе, отметим следующее. Существуют два фактора, которые влияют на величину максимального прогиба: разгрузка продольного усилия и нелинейный множитель $\sqrt{1 - w^2}$. Заметим, что второй фактор обычно не учитывается в аналитических моделях оценки потери устойчивости трубопровода в среде. Форма потери устойчивости для линейной и нелинейной записи дифференциального уравнения равновесия моментов совпадает. Как следует из (17), нелинейный множитель $\sqrt{1 - w^2}$ в постановочном уравнении (12) можно не учитывать, если $m_C \ll L/R$.

2. Устойчивость прямолинейного трубопровода в грунте. Исследуем бесконечный первоначально прямолинейный трубопровод в однородном грунте. Центр координат $x = 0$ свяжем с центром симметрии деформированного участка трубопровода длиной $2L$ (рис. 2). Как и при рассмотрении стержня на воздухе, полагаем, что концы трубопровода закреплены в продольном направлении с помощью пружин податливостью C . Рассмотрим дифференциальное уравнение равенства моментов в линеаризованной постановке [13]:

$$w'' + k_0^2 w = \frac{M_0}{EI} - \frac{qs^2}{2EI}, \quad (19)$$

где M_0 – неизвестное значение момента в центральном сечении; $k_0^2 = \frac{N_{нев}}{EI}$; q – распределенное усилие сопротивления среды перемещениям трубопровода. При записи уравнения (19) учитывалось, что в силу симметрии значение поперечной силы в этом сечении равно нулю. Постановку задачи следует дополнить граничными условиями.

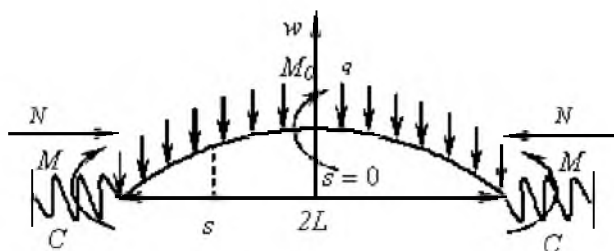


Рис. 2. Нагрузки, действующие на трубопровод в среде.

Для оценки потери устойчивости в поперечном направлении, когда свойства грунта в двух направлениях одинаковы, используется модель шарнирного закрепления концов:

$$\theta|_{x=0} = 0, \quad Q|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=L} = 0, \quad M|_{x=L} = 0, \quad (20a)$$

для случая вертикального деформирования – модель жесткого закрепления:

$$\theta|_{x=0} = 0, \quad Q|_{x=0} = 0, \quad w|_{x=L} = 0, \quad \theta|_{x=L} = 0. \quad (20б)$$

Заметим, что длина деформированного участка L неизвестна. Решив уравнение (19) с граничными условиями (20а) и (20б), получим соответственно две формы искривленного трубопровода: при поперечном деформировании –

$$w = \frac{q}{k_0^2 EI} \left[\frac{\cos k_0 s - \cos k_0 L}{k_0^2 \cos k_0 L} - \frac{L^2 - s^2}{2} \right], \quad (21a)$$

при вертикальном –

$$w = \frac{q}{k_0^2 EI} \left[\frac{L(\cos k_0 s - \cos k_0 L)}{k_0 \sin k_0 L} - \frac{L^2 - s^2}{2} \right]. \quad (21б)$$

Форму искривленного трубопровода удобно представить в общем виде:

$$w = AL^4 g\left(m, \frac{s}{L}\right), \quad (22)$$

где для шарнирного закрепления концов имеем

$$A = \frac{q}{EI(\pi m/2)^4}; \quad g\left(m, \frac{s}{L}\right) = \frac{\cos \frac{\pi m s}{2L} - \cos \frac{\pi m}{2}}{\cos \frac{\pi m}{2}} - \frac{\left(\frac{\pi m}{2}\right)^2 - \left(\frac{\pi m s}{2L}\right)^2}{2}; \quad (23a)$$

$$k_0 L = \pi m/2,$$

для жесткого закрепления –

$$A = \frac{q}{EI(\pi m)^4}; \quad g\left(m, \frac{s}{L}\right) = \frac{\pi m \left(\cos \pi m \frac{s}{L} - \cos \pi m\right)}{\sin \pi m} - \frac{(\pi m)^2 - \left(\pi m \frac{s}{L}\right)^2}{2}; \quad (23б)$$

$$k_0 L = \pi m.$$

В уравнениях (22) введены дополнительные неизвестные m , определяющие форму искривления трубопровода. Значения m должны быть такими, чтобы $w(x) > 0$ при всех значениях $x < L$. Легко показать, что минимальное значение m должно быть больше единицы.

Дальнейшие расчеты будем выполнять для формы (21а). Для формы (21б) приведем только конечные результаты. Чтобы использовать уравнение (7), из которого находится приращение усилия, следует определить величину

$$\overline{w^2} = \frac{1}{L} \int_0^L w^2 ds = \frac{1}{L} A^2 L^6 \int_0^L \left(g'\left(m, \frac{s}{L}\right)\right)^2 ds = A^2 L^6 \overline{\left(g'\left(m, \frac{s}{L}\right)\right)^2}. \quad (24)$$

Обозначим $t(m) = \overline{\left(g'\left(m, \frac{s}{L}\right)\right)^2}$, что равняется интегрально усредненному значению функции $\left(g'\left(m, \frac{s}{L}\right)\right)^2$. Подставив (24) в уравнение (7) с учетом податливости системы, получим общий вид зависимости критического усилия от длины L :

$$N = N_{new} + \frac{A^2 L^6 t(m) EF}{2(m_C + 1)}, \quad (25)$$

где по определению числа m значение $N_{new} = \frac{(\pi m/2)^2}{L^2} EI$.

Определим минимальное значение продольного усилия, при котором возможна потеря устойчивости. Для этого продифференцируем по L выражение (25):

$$\frac{dN}{dL} = -\frac{2(\pi m/2)^2}{L^3} EI + \frac{3A^2 L^5 t(m) EF}{(m_C + 1)} = 0. \quad (26)$$

Тогда оптимальную длину L , которая отвечает минимальному критическому усилию, определим по зависимости

$$L = 8 \sqrt{\frac{2(\pi m/2)^2 (m_C + 1)I}{3A^2 t(m)F}}. \quad (27a)$$

С учетом того, что $k_0 L = \frac{\pi m}{2}$, запишем

$$N_{new} = 4 \sqrt{\frac{3}{2} \frac{t(m)}{2(\pi m/2)^2} \frac{q^2 E^2 IF}{(m_C + 1)}}. \quad (27б)$$

а из уравнения (25) следует

$$N = \frac{4}{3} N_{new}. \quad (27в)$$

Теперь необходимо определить значение m , при котором величина N_{new} будет минимальной. Анализ графических построений показал (рис. 3), что таким числом есть $m \approx 1,71$, при этом условие $w(x) > 0$ выполняется при всех $x < L$. В этом случае величина $\frac{t(m)}{(\pi m/2)^2} \approx 5,5$, и выражения для иско-
мых неизвестных таковы:

$$N = 2,2594 \sqrt{\frac{q^2 E^2 IF}{m_C + 1}}; \quad L = 2,068 \sqrt{\frac{E^2 I^3}{q^2 F} (m_C + 1)}; \quad w_0 = 1,42R \sqrt{m_C + 1}, \quad (28a)$$

где w_0 – величина максимального перемещения трубопровода в точке $s = 0$.

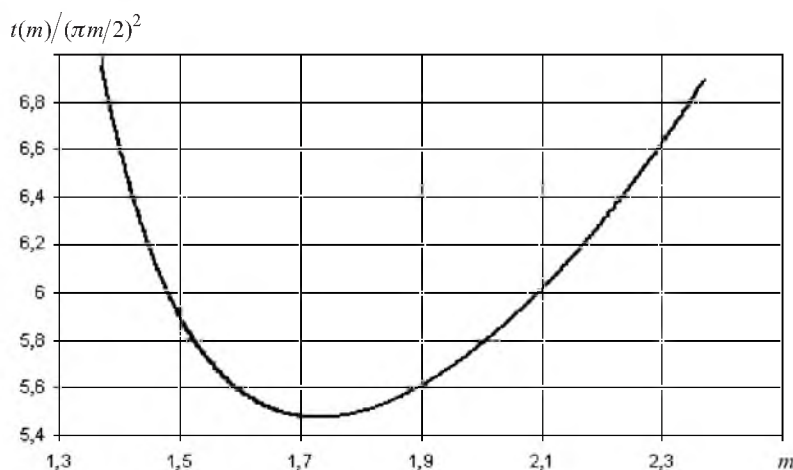


Рис. 3. Графическое определение оптимального значения параметра m для поперечного деформирования.

Повторяя аналогичные преобразования для формы (21б), получаем выражения соответственно для критического усилия, длины и максимального перемещения:

$$N = 2,984 \sqrt{\frac{q^2 E^2 I F}{m_C + 1}}; \quad L = 3,058 \sqrt{\frac{E^2 I^3}{q^2 F} (m_C + 1)}; \quad w_0 = 2,24R \sqrt{m_C + 1} \quad (28б)$$

при значении $m = 1,45$, определяющем форму деформирования, при которой критическое усилие является минимальным. При этом значение $\frac{i(m)}{(\pi m)^2} \approx \approx 16,6$.

Интересно сопоставить форму потери устойчивости при жестком закреплении, полученную в данном решении, т.е. определяемую по формуле (21б) с учетом $m = 1,45$, с соответствующей формой, принятой в работе [13]:

$$w = w_0 [0,707 - 0,2617 \pi^2 s^2 / L^2 + 0,293 \cos(2,86 \pi s / L)], \quad (29а)$$

и с формой [16]:

$$w = w_0 [0,5 + 0,5 \cos(\pi s / L)]. \quad (29б)$$

Соответствующие графики приведены на рис. 4. Как видно, формы (21б) и (29а) полностью совпадают. Значения максимальных перемещений w_0 и длины L при $m_C = 0$ равны [13]:

$$w_0 = 2,23R, \quad L = 3,08 \sqrt{\frac{E^2 I^3}{q^2 F}}, \quad (30)$$

что достаточно близко к полученным оценкам (28б).

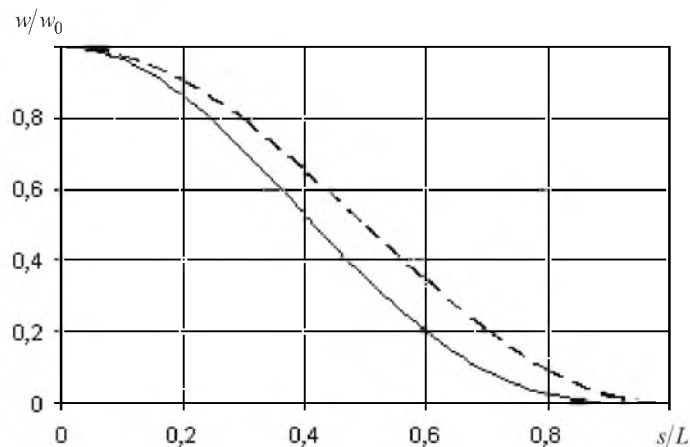


Рис. 4. Сравнение форм потери устойчивости. (Сплошная линия – формы (21б) и (29а), штриховая – форма (29б).)

Очень часто сила сопротивления среды пропорциональна погонному весу трубопровода, т.е. $q = k\rho gF$, где k – коэффициент пропорциональности; ρ – плотность металла; g – ускорение свободного падения. Это имеет место при прокладке трубопроводов с утяжелителями на болотистых участках или для длинных прямолинейных трубопроводов, лежащих на опорах, когда усилие q в поперечном направлении определяется весом трубопровода и коэффициентом трения. С помощью выражения для критического усилия (28а) находим эквивалентную температуру потери устойчивости (см. выражение (2)):

$$\Delta T = \frac{1,9}{\alpha_T \sqrt[4]{m_C + 1}} \sqrt{\frac{k\rho gR}{E}}. \quad (31)$$

Анализ полученных выражений (28) показал, что при $m_C \rightarrow \infty$ результат некорректен. Согласно ему критическое значение $N \rightarrow 0$ или $\Delta T \rightarrow 0$. Причина этого установлена при рассмотрении потери устойчивости стержня на воздухе при мягком режиме нагружения и заключается в неучете множителя $\sqrt{1-w^2}$ в исходном дифференциальном уравнении. Исследуем его влияние при идеально мягком режиме нагружения, т.е. при $C \rightarrow \infty$ (рис. 2).

Для деформированного трубопровода в среде дифференциальное уравнение имеет вид

$$w'' + k_0^2 w \sqrt{1-w^2} = \left(\frac{M_0}{EI} - \frac{qs^2}{2EI} \right) \sqrt{1-w^2}. \quad (32)$$

Примем $\sqrt{1-w^2} = f^2$ – усредненный нелинейный множитель. Тогда уравнение (32) преобразуется следующим образом:

$$w'' + (k_0^{new})^2 w = \left(\frac{M_0}{EI} - \frac{qs^2}{2EI} \right) f^2, \quad (33)$$

где $k_0^{new} = k_0 f$.

Следовательно, получили уравнение в линейной постановке, но уже с другим значением критического усилия. Продольное усилие с учетом нелинейности для жестко закрепленного стержня запишем в виде

$$N = N_{new} = \frac{(\pi m)^2 EI}{L^2 (f(L))^2}. \quad (34)$$

Затем с использованием выражения (22) находим

$$(f(L))^2 = \sqrt{1 - A^2 L^6 \left(g' \left(m, \frac{x}{L} \right) \right)^2}.$$

Определим минимальное критическое усилие, при котором возможна потеря устойчивости. Для этого подифференцируем (34) по L :

$$\frac{dN}{dL} = -\frac{2(\pi m)^2}{L^2 (f(L))^2} EI \left[\frac{1}{L} + \frac{f'(L)}{f(L)} \right] = 0, \quad (35)$$

откуда получим оптимальную длину полуволны потери устойчивости:

$$L = \sqrt[6]{\frac{2}{5A^2 t(m)}}. \quad (36)$$

Подставив (36) в выражение для усредненного нелинейного множителя, имеем $(f(L))^2 \approx 0,774$. Тогда выражение для критического продольного усилия при горизонтальном деформировании примет вид

$$N = 3,095 \sqrt[3]{q^2 EI}; \quad L = 1,73 \sqrt[3]{\frac{EI}{q}}; \quad w = 0,983 \sqrt[3]{\frac{EI}{q}}. \quad (37a)$$

Если q выражается через часть от веса трубы, то $\Delta T = \frac{2,456}{\alpha_T} \left(\frac{k \rho g R}{E} \right)^{2/3}$.

Критическое усилие для случая вертикального деформирования определяется аналогично:

$$N = 4,473 \sqrt[3]{q^2 EI}; \quad L = 2,44 \sqrt[3]{\frac{EI}{q}}; \quad w = 1,33 \sqrt[3]{\frac{EI}{q}}. \quad (37b)$$

Таким образом, сначала рассматривалось линейное уравнение (19) при произвольной схеме нагружения (с любой податливостью пружин, присоединенных к концам участка), затем – нелинейное уравнение при идеально мягкой схеме нагружения. К сожалению, анализ нелинейного уравнения при произвольной схеме нагружения приводит к громоздким решениям. Поэтому они не имеют инженерной ценности. Более того, исследуемые два случая дают представление о пределах расположения общего решения.

Рассмотрим соотношение между критическими усилиями, найденными по линейному и нелинейному уравнениям. Качественная зависимость критических усилий от параметра q/E приведена на рис. 5 (характер кривой l изменен с целью наглядности).

Очевидно, что пренебрежение одним из факторов (разгрузка или нелинейность) приводит к снижению критического усилия потери устойчивости. Поэтому при определенном значении параметра q/E необходимо выбирать критическое усилие, которое больше двух значений критического усилия, найденных по идеально мягкой и идеально жесткой схемам нагружения.

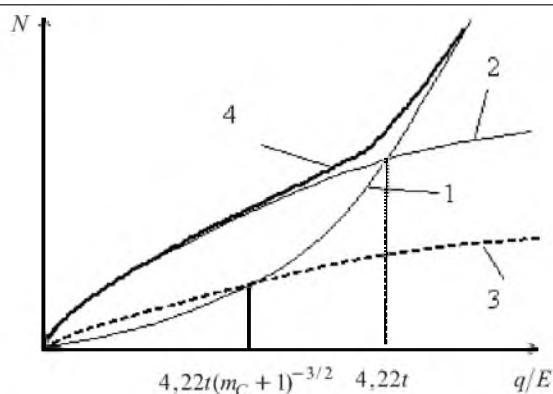


Рис. 5. Зависимость продольного усилия N от параметра q/E для трубопровода: 1 – усилие, найденное по уравнению в нелинейной постановке; 2 – то же по уравнению в линейной постановке; 3 – то же с учетом податливости по уравнению в линейной постановке; 4 – совместное решение.

Из рис. 5 видно, что кривые 1 и 2 пересекаются в точке $q/E = 4,22t$. Поэтому для реальных грунтов необходимо, чтобы $q \ll 4,22Et$. При $m_C \rightarrow 0$, как и на воздухе, влиянием нелинейного множителя $\sqrt{1-w^2}$ можно пренебречь. Учет податливости в линейной постановке приводит к тому, что кривая 2 переходит в кривую 3. Тогда точка пересечения смещается в точку $q/E = 4,22t(m_C + 1)^{-3/2}$, и для некоторых значений параметра m_C (> 1000) именно нелинейный фактор определяет значение критического усилия. Таким образом, в основном для расчета критического усилия используется линейная схема. Поэтому рассмотрим дополнительный анализ решения в линейной постановке с учетом податливости.

3. Анализ потери устойчивости для линейной схемы.

3.1. *Ограниченная длина участка трубопровода.* Поскольку реальный трубопровод проходит через участки различной длины с разными свойствами среды (болота, слабый грунт, малая высота засыпки и т.п.), может иметь место случай, когда длина выбранного для анализа участка с особыми свойствами среды меньше расчетной длины L_C . Ясно, что в таком случае нельзя пользоваться предложенной выше схемой определения критического усилия. Рассмотрим соответствующий алгоритм для ограниченной длины участка $l < L_C$ и схему поперечного деформирования. Суть алгоритма состоит в том, что условие минимальности N в (26) должно выполняться, однако t при уменьшении L уменьшается, что приводит к увеличению N в (27б), так как любое отклонение t от оптимального значения (1,71) приводит к росту значения $\frac{t(m)}{(\pi m/2)^2}$.

Таким образом, найдем новое значение безразмерного параметра t и соответственно новое значение критического продольного усилия, которое отвечает заданной длине l , используя для этого принцип минимальности критического усилия. Из выражения (27а) получаем значение параметра t при известном l и затем по (27б) и (27в) – N .

Зависимость безразмерного параметра m и отношения критических усилий N/N_0 (N – усилие, соответствующее длине l ; N_0 – усилие, соответствующее потере устойчивости на воздухе (см. (3)) от величины l/L_C для формы (21а) представлена на рис. 6,а. Для формы (21б) критическое усилие N_0 определяется по выражению $N_0 = \frac{\pi^2 EI}{(0,5l)^2}$. Аналогичные зависимости

для формы (21б) приведены на рис. 6,б. Данные на рис. 6 иллюстрируют также равенство продольного усилия при $m=1$ усилию потери устойчивости на воздухе, т.е. выполнение граничного перехода со среды на воздух (для воздуха ($q \rightarrow 0$) расчетная длина $L_C \rightarrow \infty$ (28), (37), а значит, $l/L_C \rightarrow 0$).

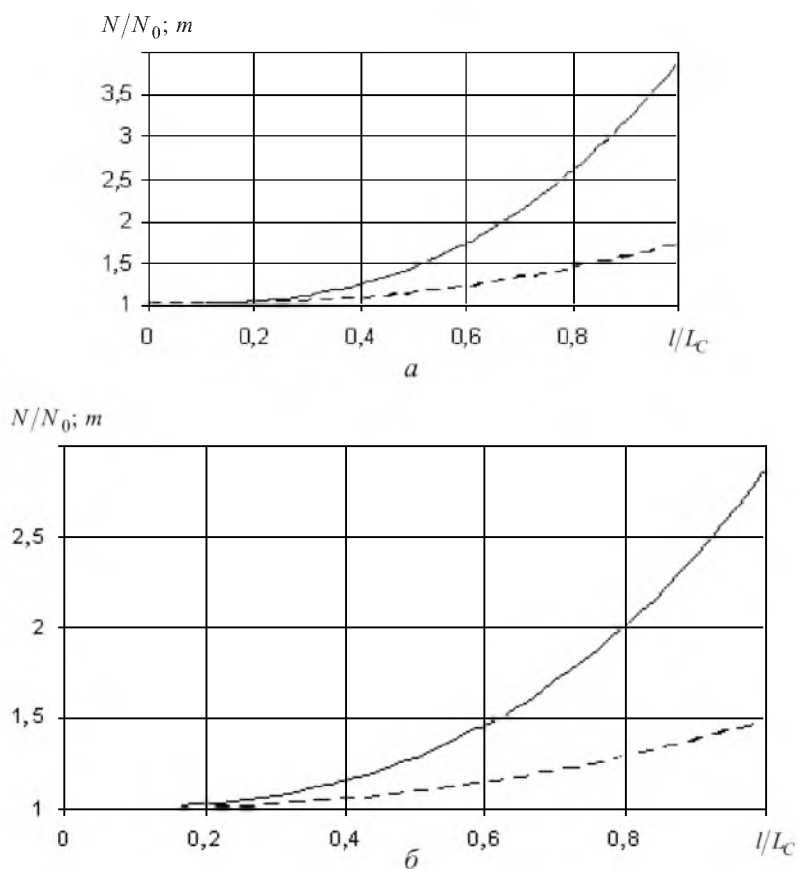


Рис. 6. Зависимость m (штриховая линия) и N/N_0 (сплошная линия) от l/L_C : а, б – соответственно поперечная и вертикальная формы деформирования.

3.2. Закритическое поведение. Рассмотрим изменение величины максимального прогиба с увеличением продольного усилия для расчетной схемы без учета нелинейного множителя. Безразмерный параметр m полагаем постоянным, его значение равно оптимальному значению параметра m при обычной линейной схеме расчета. Понятно, что с ростом продольного усилия увеличивается и длина дуги деформирования трубопровода. Обозначим ее $L + \Delta L$, где L – длина дуги, которая отвечает минимальному крити-

ческому усилию N . Тогда уравнение типа (7) для продольного усилия примет вид

$$N_{appl} = \frac{(\pi m/2)^2}{(L + \Delta L)^2} EI + \frac{A^2 (L + \Delta L)^6 t(m)}{2} EF, \quad (38)$$

где N_{appl} – приложенное усилие, большее критического N . Величину N_{appl} удобно характеризовать безразмерным значением $\Delta = (N_{appl} - N)/N$.

Используя выражение $w = DA^2 L^4 \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^4$, где D – максимальное значение

функции $g\left(m, \frac{s}{L}\right)$, можно найти зависимость максимального прогиба от

продольного усилия, большего, чем критическое. С помощью такого подхода можно получать верные решения для любых Δ .

Отметим, что для малых значений Δ выражение (38) примет вид

$$N_{appl} = \frac{(\pi m/2)^2}{L^2} EI \left(1 - 2 \frac{\Delta L}{l}\right) + \frac{A^2 L^6 \left(1 + 6 \frac{\Delta L}{l}\right) t(m)}{2} EF. \quad (39)$$

С использованием зависимости между минимальным критическим усилием и усилием в деформированном трубопроводе (27в) получим простое выражение для определения величины максимального прогиба при известном Δ :

$$\frac{w}{w_0} = \left(1 + \frac{\Delta L}{L}\right)^4 = \left(1 + \frac{4}{3} \Delta\right)^4, \quad (40)$$

где w_0 – величина максимального прогиба при минимальном критическом усилии N .

4. Применение численной процедуры в расчетах на устойчивость.

Как отмечалось выше, при расчете на устойчивость используются численные методы. Рассмотрим решение некоторых задач об оценке потери устойчивости с использованием численной процедуры, разработанной авторами в сообщении 1.

Заметим, что каким бы большим ни было сжимающее продольное усилие, идеально прямолинейный трубопровод не может потерять устойчивость. Поэтому исследуем трубопровод с некоторым начальным прогибом w_0 .

Очевидно, что формы в виде (21а) или (21б) представляют собой равновесную форму трубопровода, потерявшего устойчивость. Если заранее известна величина максимального прогиба w_0 , то, например, по выражению (28б) легко найти полудлину волны трубопровода в таком состоянии:

$$L = 4 \sqrt{\frac{w_0}{Ag(m,0)}}. \quad (41)$$

Подставляя значения параметра A и функции $g(m, 0)$ в (41), получаем

$$L = 2,28 \sqrt[4]{\frac{EIw_0}{q}}. \quad (42)$$

Тогда критическое усилие можно легко определить с помощью выражения (25):

$$N = 3,96 \sqrt{\frac{EIq}{w_0}}. \quad (43)$$

С использованием программного комплекса выполним расчет устойчивости трубопровода со следующими параметрами: радиус 0,51 м; толщина стенки 0,016 м; предельное сопротивление среды $q = 30000$ Н/м; модуль упругости материала трубопровода $E = 2 \cdot 10^{11}$ Н/м². Начальный максимальный прогиб равнялся 0,16 м. Трубопровод сохранял устойчивое состояние до эквивалентного усилия 495°С. Согласно формуле (40) оно составляет 485°С. Решение этой задачи свидетельствует о возможности потери устойчивости при усилиях, близких к найденным аналитически.

Очевидно, что критические продольные усилия, полученные по формулам (28а) и (28б), являются нижними пределами, т.е. это те минимальные значения, при которых возможно существование равновесного состояния, отличающегося от начального. Для их проверки в программном комплексе используем метод движения сверху: сначала зададим критическое усилие, в несколько раз превышающее минимальное, а затем путем постепенного его снижения найдем минимальное значение, при котором будет существовать равновесное состояние трубопровода, отличающееся от начального.

При расчетах используется трубопровод с теми же параметрами, что и в предыдущем примере. Для такой модели с помощью формулы (42) была рассчитана критическая длина потери устойчивости ($L_0 = 22,6$ м) и критическое эквивалентное усилие ($\Delta T = 186^\circ\text{C}$). С целью нейтрализации эффекта упругих граничных условий длина рассчитываемого участка выбиралась большей и составляла 150 м. Для возможности потери устойчивости задавалась сдвигка грунта пренебрежимо малой интенсивности по сравнению с геометрическими параметрами трубопровода. В результате расчета получено критическое эквивалентное усилие, равное 220°С. Как видно, результаты численного и аналитического решений достаточно хорошо согласуются.

Рассмотрим систему, в которой концы трубопровода могут вытягиваться с определенной податливостью, зависящей от обобщенной характеристики защемления грунта γ . Коэффициент безразмерной податливости m_C выберем таким, чтобы критическое продольное усилие уменьшалось в два раза по сравнению с таковым абсолютно неподатливой системы. Из выражения (28а) следует, что значение m_C равно 15. Связь этого параметра с параметром грунта γ описывается формулой

$$\Delta N = \gamma \Delta L E F. \quad (44)$$

Из сопоставления (42) и зависимости $\Delta L = \Delta NC$ получаем $C = \frac{1}{\gamma EF} \cdot C$

использованием выражения для безразмерной податливости $m_C = \frac{2CEF}{L}$

находим $\gamma = \frac{2}{m_C L}$.

Оптимальную длину волны ($L = 31,7$ м) для этой податливой системы определим по выражению (24). При расчете использовался трубопровод длиной 150 м в грунте. С помощью программного комплекса рассчитывалось критическое продольное усилие при значении параметра γ , которое отвечает $m_C = 15$. В результате получено $\Delta T = 137^\circ\text{C}$, что в 1,6 раза меньше, чем продольное усилие при жестком закреплении ($\Delta T = 220^\circ\text{C}$). Такая погрешность в численном расчете возникла вследствие влияния упругих граничных условий на концах трубопровода и рассмотрения не одной, а нескольких волн деформируемого трубопровода.

5. Эксперимент. Разработанная методика определения параметров трубопровода при потере устойчивости проверялась при проведении натурного эксперимента. В качестве модели трубопровода использовался стальной стержень (плотность $\rho = 7800$ кг/м³, диаметр $d = 4$ мм). Роль сопротивления среды выполняла сила трения стержня о горизонтальную поверхность. Коэффициент трения определялся экспериментально и составил 0,1. Концы стержня шарнирно закреплялись. Продольное сжимающее усилие задавалось пропусканием через него постоянного электрического тока.

Расчетная температурная нагрузка потери устойчивости стержня определялась по соотношению $\Delta T = \frac{1,61}{\alpha_T} \sqrt{\frac{k\rho g R}{E}}$, в нашем случае она состав-

ляла $1,12^\circ\text{C}$. Длину полуволны находили по формуле $L = 1,23 \sqrt[4]{\frac{ER^3}{k\rho g}}$, для

экспериментального стержня $L = 0,82$ м. В эксперименте использовался стержень длиной 3,30 м, для которого критическое усилие составляло 4°C . Такое соответствие между расчетными и экспериментальными данными можно считать удовлетворительным.

Выводы

1. Получено аналитическое решение для закритического поведения сжатого стержня на воздухе при сопряжении его концов с упругими элементами (конечная податливость нагружения). Показано, что формы потери устойчивости при критическом и закритическом характере поведения совпадают, а амплитуда (максимальный прогиб) поперечных перемещений пропорциональна корню квадратному из относительного превышения действующей сжимающей силой критического значения потери устойчивости.

2. Предложены модели поведения бесконечного трубопровода в идеально пластической среде при горизонтальной и вертикальной форме поперечного деформирования и получены аналитические выражения для крити-

ческой нагрузки, формы и длины участка потери устойчивости трубопровода с учетом податливости концов этого участка в продольном направлении. Для случая, когда предельное сопротивление среды пропорционально весу стержня, предложены удобные формулы для оценки потери устойчивости подводных трубопроводов и длинных воздушных трубопроводов на опорах.

3. Если длина участка с ослабленными свойствами грунта меньше, чем длина, рассчитанная по модели бесконечного трубопровода, предложены оригинальный подход и зависимости критического усилия от длины участка, которые в предельном случае сводятся к решению, полученному для трубы на воздухе.

Резюме

Розроблено аналітичні моделі оцінки втрати стійкості початково прямолінійного трубопроводу у середовищі. Відмічено недоліки відповідних аналітичних методів, які не враховують можливе поздовжнє переміщення точок трубопроводу, обмеженість довжини ділянки і не приводять до відомих результатів оцінки втрати стійкості на повітрі. Запропоновані моделі дозволяють аналітично оцінити критичне навантаження і форму здеформованого трубопроводу при горизонтальному і вертикальному його деформуванні з урахуванням цих факторів. Отримані результати перевіряли шляхом числового моделювання процесу деформування за розробленою раніше в повідомленні 1 процедурою та за допомогою натурного експерименту.

1. *Palmer A. C. and Baldry J. A. S.* Lateral buckling of axially constrained pipelines // *J. Petroleum Techn.* – 1974. – **26**. – P. 1283 – 1284.
2. *Айнбиндер А. Б., Камерштейн А. Г.* Расчет магистральных трубопроводов на прочность и устойчивость. Справочное пособие. – М.: Недра, 1982. – 341 с.
3. *Віслобіцький П. А.* Розрахунки граничних станів колон труб та трубопроводів. – Київ: Логос, 1997. – 364 с.
4. *Хренов Н. Н.* Газопроводы севера Западной Сибири: всплытие или выпучивание // *Газовая пром-сть.* – 2001. – № 8. – С. 35 – 36.
5. *СНиП 2.05.06-85.* Строительные нормы и правила. Магистральные трубопроводы. – М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1988. – 52 с.
6. *Offshore Standard DNV-OS-F101.* Submarine Pipeline System. – 2000. – 41 p.
7. *ABS Guide for Building and Classing.* Subsea Pipeline Systems and Risers. – 2001. – 53 p.
8. *Kalliontzis C.* Nonlinear static stress analysis of submarine high pressure pipelines // *Comp. Struct.* – 1997. – **63**, No. 3. – P. 397 – 411.
9. *Einsfeld R. A., Murray D. W., and Yoosef-Ghodsi N.* Buckling analysis of high-temperature pressurized pipelines with soil-structure interaction // *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* – 2003. – **25**, No. 2. – P. 164 – 169.

10. *Kerr A. D.* Lateral buckling of railroad tracks due to constrained thermal expansion // *Railroad Track Mechanics and Technology / A. D. Kerr (Ed.)* – Oxford: Pergamon Press, 1978. – P. 315 – 328.
11. *Tvergaard V. and Needleman A.* On localized thermal track buckling // *Int. J. Mech. Sci.* – 1981. – **23**. – P. 577 – 587.
12. *Hunt G. W. and Blackmore A.* Homoclinic and heteroclinic solutions of upheaval buckling // *Phil. Trans. Royal Soc. London.* – 1997. – **A355**. – P. 2185 – 2195.
13. *Hobbs R. E.* In-service buckling of heated pipelines // *J. Transport Eng.* – 1984. – **110**. – P. 175 – 189.
14. *Taylor N. and Tran V.* Experimental and theoretical studies in subsea pipeline buckling // *Marine Struct.* – 1996. – **9**. – P. 211 – 257.
15. *Hobbs R. E. and Liang F.* Thermal buckling of pipelines close to restraints // *Proc. OMAE, Paper OMAE-89-812.* – Hague, 1989.
16. *Croll J. G. A.* A simplified model of upheaval thermal buckling of subsea pipelines // *Thin-Walled Struct.* – 1997. – **29**, No. 1-4. – P. 59 – 78.
17. *Бородавкин П. П.* Подземные магистральные трубопроводы. – М.: Недра, 1982. – 384 с.
18. *Орыняк И. В., Богдан А. В.* Проблема больших перемещений подземных трубопроводов. Сообщ. 1. Разработка численной процедуры // *Пробл. прочности.* – 2007. – № 3. – С. 51 – 74.
19. *Тимошенко С. П.* Устойчивость стержней, пластин и оболочек. – М.: Наука, 1967. – 808 с.
20. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

Поступила 21. 11. 2005