

Метод окаймления для решения систем линейных уравнений, порождаемых методом конечных элементов в задаче об изгибе пластины

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Для решения систем линейных алгебраических уравнений, порождаемых методом конечных элементов в задаче об изгибе пластины, предложен комбинированный итерационный алгоритм на основе методов окаймления и сопряженных градиентов. Представлены численные результаты анализа скорости сходимости итерационного процесса при решении модельных задач с использованием классического и модифицированного алгоритма метода сопряженных градиентов. Показана возможность ускорения итерационного алгоритма.

Ключевые слова: метод конечных элементов, метод окаймления, метод сопряженных градиентов, итерационный процесс, сходимость, точность.

Введение. При исследовании прикладных задач об изгибе пластины методом конечных элементов (МКЭ) наиболее трудоемким этапом расчета является решение больших систем линейных алгебраических уравнений с разреженной симметричной положительно определенной матрицей коэффициентов. Для их решения применяются как прямые методы, так и итерационные [1–4]. Основным прямым алгоритмом решения систем линейных уравнений МКЭ является метод Гаусса и его различные модификации – фронтальный метод, метод Холецкого и др. [1–3]. Наибольшее распространение среди итерационных алгоритмов получил метод сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей [4–6].

Блочное исключение неизвестных, наиболее известное как метод окаймления, встречается в самых разнообразных современных прямых и итерационных методах решения систем линейных уравнений, порождаемых методом конечных элементов [1, 2, 7, 8]. Ниже рассматривается метод окаймления для решения систем линейных алгебраических уравнений, возникающих при конечноэлементной аппроксимации самосопряженных эллиптических уравнений четвертого порядка, в частности для задачи об изгибе тонкой пластины [9]. Система уравнений приводится к блочному виду, в котором группы узловых неизвестных соответствуют прогибу и углам поворотов пластины.

Цель работы заключалась в выявлении наибольшей эффективности метода окаймления в сочетании с методом сопряженных градиентов для решения преобразованной системы уравнений меньшей размерности.

Пусть $[A]$ – симметричная положительно определенная матрица, $\{x\}$ – вектор неизвестных, $\{y\}$ – вектор правой части системы линейных уравнений:

$$[A]\{x\} = \{y\}. \quad (1)$$

Представим (1) в блочном виде

$$\begin{bmatrix} [\mathbf{A}_{11}] & [\mathbf{A}_{12}] \\ [\mathbf{A}_{12}]^T & [\mathbf{A}_{22}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\mathbf{x}_1\} \\ \{\mathbf{x}_2\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\mathbf{y}_1\} \\ \{\mathbf{y}_2\} \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

где $[\mathbf{A}_{11}]$, $[\mathbf{A}_{22}]$ – квадратные симметричные положительно определенные матрицы; $[\mathbf{A}_{12}]$ – прямоугольная матрица; $[\mathbf{A}_{12}]^T$ – транспонированная по отношению к $[\mathbf{A}_{12}]$ прямоугольная матрица. Векторы неизвестных $\{\mathbf{x}_1\}$, $\{\mathbf{x}_2\}$ и правых частей $\{\mathbf{y}_1\}$, $\{\mathbf{y}_2\}$ соответствуют узловым значениям прогиба и углов поворотов пластины.

С использованием блочно-гауссового исключения систему уравнений (2) можно привести к системе уравнений следующего вида:

$$[\mathbf{A}_2]\{\mathbf{x}_2\} = \{\mathbf{y}_2\} - [\mathbf{A}_{12}]^T [\mathbf{A}_{11}]^{-1} \{\mathbf{y}_1\}, \quad (3)$$

где

$$[\mathbf{A}_2] = [\mathbf{A}_{22}] - [\mathbf{A}_{12}]^T [\mathbf{A}_{11}]^{-1} [\mathbf{A}_{12}]. \quad (4)$$

Сведение системы (2) к системе уравнений (3) меньшей размерности составляет суть метода окаймления; матрица $[\mathbf{A}_2]$ называется матрицей Шура или дополнением Шура к матрице $[\mathbf{A}_{11}]$. Для решения системы уравнений (3) с симметричной положительно определенной матрицей $[\mathbf{A}_2]$ могут применяться прямой или итерационный методы.

Отметим, что при использовании итерационных алгоритмов явного вычисления матрицы $[\mathbf{A}_2]$ можно избежать. С этой целью матрица $[\mathbf{A}_{11}]$ представляется в виде произведения двух треугольных матриц с помощью факторизации Холецкого:

$$[\mathbf{A}_{11}] = [\mathbf{C}_{11}]^T [\mathbf{C}_{11}], \quad (5)$$

где $[\mathbf{C}_{11}]$ – верхняя треугольная матрица; $[\mathbf{C}_{11}]^T$ – транспонированная по отношению к $[\mathbf{C}_{11}]$ нижняя треугольная матрица.

Тогда процедура умножения матрицы $[\mathbf{A}_2]$ на произвольный вектор $\{\mathbf{g}_2\}$ разбивается на три этапа:

$$\begin{cases} [\mathbf{C}_{11}]^T \{\mathbf{q}_1\} = [\mathbf{A}_{12}]\{\mathbf{g}_2\}; \\ [\mathbf{C}_{11}]\{\mathbf{g}_1\} = \{\mathbf{q}_1\}; \\ [\mathbf{A}_2]\{\mathbf{g}_2\} = [\mathbf{A}_{22}]\{\mathbf{g}_2\} - [\mathbf{A}_{12}]^T \{\mathbf{g}_1\}, \end{cases} \quad (6)$$

где $\{\mathbf{g}_1\}$ и $\{\mathbf{q}_1\}$ – вспомогательные векторы, имеющие такую же размерность, как и векторы $\{\mathbf{x}_1\}$, $\{\mathbf{y}_1\}$.

Заметим, что порядок и ширина ленты матрицы $[\mathbf{A}_{11}]$ в три раза меньше исходной матрицы $[\mathbf{A}]$, и, значит, вычислительные затраты при факторизации матрицы $[\mathbf{A}_{11}]$ в 27 раз меньше, чем при решении исходной

системы уравнений (1). При этом в девять раз сокращаются потребности в ресурсах памяти компьютера.

Для решения системы уравнений (3) рассмотрим метод сопряженных градиентов. Пусть $\{\mathbf{x}_2^0\}$ – произвольное начальное приближение к решению $\{\mathbf{x}_2\}$. Тогда вектор $\{\mathbf{x}_1^0\}$ определяется на основании соотношений

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{11}]^T \{\mathbf{q}_1\} &= \{\mathbf{y}_1\} - [\mathbf{A}_{12}] \{\mathbf{x}_2^0\}; \\ [\mathbf{C}_{11}] \{\mathbf{x}_1^0\} &= \{\mathbf{q}_1\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Вектор начальной невязки $\{\mathbf{r}_2^0\}$ вычисляется с помощью формулы

$$\{\mathbf{r}_2^0\} = [\mathbf{A}_{22}] \{\mathbf{x}_2^0\} + [\mathbf{A}_{12}]^T \{\mathbf{x}_1^0\} - \{\mathbf{y}_2\}. \quad (8)$$

Вектор начального направления $\{\mathbf{g}_2^0\}$ и начальное значение итерационного параметра γ_0 определяются по соотношению

$$\{\mathbf{g}_2^0\} = \{\mathbf{r}_2^0\}; \quad \gamma_0 = \{\mathbf{r}_2^0\}^T \{\mathbf{r}_2^0\}. \quad (9)$$

Тогда формулы метода сопряженных градиентов могут быть записаны в следующем виде:

$$\left\{ \begin{aligned} &[\mathbf{C}_{11}]^T \{\mathbf{q}_1\} = [\mathbf{A}_{12}] \{\mathbf{g}_2^k\}; \\ &[\mathbf{C}_{11}] \{\mathbf{g}_1^k\} = \{\mathbf{q}_1\}; \\ &\{\mathbf{q}_2\} = [\mathbf{A}_{22}] \{\mathbf{g}_2^k\} - [\mathbf{A}_{12}]^T \{\mathbf{g}_1^k\}; \\ &\lambda_k = \frac{\gamma_k}{\{\mathbf{q}_2\}^T \{\mathbf{g}_2^k\}}; \\ &\{\mathbf{x}_2^{k+1}\} = \{\mathbf{x}_2^k\} - \lambda_k \{\mathbf{g}_2^k\}; \\ &\{\mathbf{r}_2^{k+1}\} = \{\mathbf{r}_2^k\} - \lambda_k \{\mathbf{q}_2\}; \\ &\gamma_k = \{\mathbf{r}_2^{k+1}\}^T \{\mathbf{r}_2^{k+1}\}; \\ &\beta = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}; \\ &\{\mathbf{g}_2^{k+1}\} = \{\mathbf{r}_2^{k+1}\} + \beta \{\mathbf{g}_2^k\}. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

В методе сопряженных градиентов для окончания итерационного процесса целесообразно использовать критерий

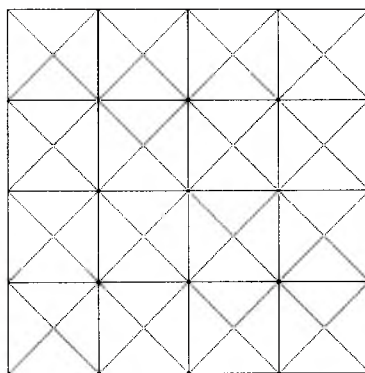
$$(\{\mathbf{x}_2^{k+1}\} - \{\mathbf{x}_2^k\})^T [\mathbf{A}_2] (\{\mathbf{x}_2^{k+1}\} - \{\mathbf{x}_2^k\}) \leq \varepsilon \{\mathbf{x}_2^k\}^T [\mathbf{A}_2] \{\mathbf{x}_2^k\}, \quad (11)$$

где ε – малое наперед заданное положительное число, $\varepsilon = 10^{-12} \dots 10^{-13}$.

На основании формул (10) и (11) получаем

$$\lambda_k \gamma_k \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m \gamma_m. \quad (12)$$

Численный анализ. Все значения в приведенных ниже модельных задачах безразмерные. Например, модуль упругости материала, толщина пластины и интенсивность равномерно распределенной нагрузки принимались равными единице. Коэффициент Пуассона задавался 0,3. Использовался трехузловой треугольный конечный элемент, построенный на основе треугольника Зенкевича [10]. Применялась равномерная треугольная сетка типа “крест” (рисунок).



Равномерная треугольная сетка типа “крест”.

Факторизация матрицы $[A_{11}]$ осуществлялась с помощью алгоритма профильного метода, предложенного Дженнингсом [11], а для сжатия профиля матрицы использовался обратный алгоритм Катхилла–Макки [12]. Для хранения матриц $[A_{22}]$ и $[A_{12}]$ применялся разреженный строчный формат, предложенный Чэнгом [13]. Такая схема хранения предъявляет минимальные требования к памяти компьютера и оказывается весьма эффективной при умножении разреженной матрицы на вектор.

При сравнении численных результатов используются обозначения: КМСГ – классический метод сопряженных градиентов; ММСГ – модифицированный метод сопряженных градиентов (10). Эффективность ММСГ по сравнению с КМСГ оценивалась по коэффициенту ускорения, который определялся как отношение времени решения задачи с помощью КМСГ и ММСГ. Расчеты проводились на IBM Pentium 4, CPU 3 ГГц, 512 МБ ОЗУ в среде WindowsXP.

Квадратная пластина. Рассматривалась квадратная пластина под действием равномерно распределенной нагрузки при различных условиях ее закрепления. Результаты расчетов представлены в табл. 1–4. Там же приведены разбиения вдоль стороны квадрата. Из данных табл. 1–4 видно, что при всех разбиениях ММСГ превалирует. При сгущении сетки эффективность ММСГ по сравнению с КМСГ возрастает.

Т а б л и ц а 1

Сравнение эффективности КМСГ и ММСГ при решении задачи о заземленной квадратной пластине под воздействием равномерно распределенной нагрузки

Сетка	Количество уравнений	Количество итераций КМСГ	Количество итераций ММСГ	Коэффициент ускорения
40×40	9843	602	82	2,67
50×50	15303	917	102	3,33
60×60	21963	1300	121	3,92
70×70	29823	1747	142	4,09
80×80	38883	2257	161	5,50
90×90	49143	2835	181	6,00
100×100	60603	3470	200	6,33
110×110	73263	4177	220	6,83
120×120	87123	4947	239	7,12
130×130	102183	5783	257	7,36
140×140	118443	6684	277	7,71

Т а б л и ц а 2

Сравнение эффективности КМСГ и ММСГ при решении задачи о свободно опертой квадратной пластине под воздействием равномерно распределенной нагрузки

Сетка	Количество уравнений	Количество итераций КМСГ	Количество итераций ММСГ	Коэффициент ускорения
40×40	9843	644	90	2,50
50×50	15303	976	111	3,28
60×60	21963	1377	133	3,43
70×70	29823	1847	154	3,91
80×80	38883	2384	175	5,50
90×90	49143	2984	196	6,33
100×100	60603	3652	217	6,44
110×110	73263	4397	238	6,61
120×120	87123	5197	259	6,77
130×130	102183	6073	280	7,00
140×140	118443	7016	301	7,53

Консольная прямоугольная пластина. Рассматривалась прямоугольная пластина под воздействием равномерно распределенной нагрузки, заземленная вдоль короткой стороны. Результаты расчетов для различных соотношений сторон пластины представлены в табл. 5, 6. Там же приведены разбиения вдоль длинной и короткой сторон прямоугольника. Из данных табл. 5, 6 видно, что при всех разбиениях превалирует ММСГ, причем для более вытянутого прямоугольника его эффективность возрастает.

Т а б л и ц а 3

**Сравнение эффективности КМСГ и ММСГ при решении задачи
о заземленной в вершинах квадратной пластине
под воздействием равномерно распределенной нагрузки**

Сетка	Количество уравнений	Количество итераций КМСГ	Количество итераций ММСГ	Коэффициент ускорения
40×40	9843	757	135	2,00
50×50	15303	1133	169	3,00
60×60	21963	1578	204	3,33
70×70	29823	2094	238	3,76
80×80	38883	2683	271	4,00
90×90	49143	3367	305	4,40
100×100	60603	4149	339	4,50
110×110	73263	4990	373	4,66
120×120	87123	5910	406	4,92
130×130	102183	6937	440	5,10
140×140	118443	8036	473	5,22

Т а б л и ц а 4

**Сравнение эффективности КМСГ и ММСГ при решении задачи о консольной
квадратной пластине под воздействием равномерно распределенной нагрузки**

Сетка	Количество уравнений	Количество итераций КМСГ	Количество итераций ММСГ	Коэффициент ускорения
40×40	9843	2518	252	4,00
50×50	15303	3849	315	5,00
60×60	21963	5448	376	6,50
70×70	29823	7320	438	7,00
80×80	38883	9498	501	7,50
90×90	49143	11976	561	8,44
100×100	60603	14732	620	9,07
110×110	73263	17868	683	9,33
120×120	87123	21217	743	9,96
130×130	102183	24864	805	10,26
140×140	118443	28913	864	10,42

Заключение. Приведенные выше тестовые примеры и опыт решения практических задач об изгибе пластины свидетельствуют об эффективности применения модифицированного алгоритма сопряженных градиентов (10) по сравнению с классическим методом сопряженных градиентов. Существенная эффективность итерационного процесса обычно проявляется при решении задач об изгибе пластин, имеющих вытянутую конфигурацию, а также при сгущении сетки конечных элементов. Если характерный размер

Т а б л и ц а 5

Сравнение эффективности КМСГ и ММСГ при решении задачи о консольной прямоугольной пластине с отношением сторон 1/2 под воздействием равномерно распределенной нагрузки

Сетка	Количество уравнений	Количество итераций КМСГ	Количество итераций ММСГ	Коэффициент ускорения
40×20	4893	1393	202	3,00
60×30	11073	2964	305	3,91
80×40	19563	5185	407	5,50
100×50	30453	8095	508	7,50
120×60	43743	11683	610	9,28
140×70	59433	15885	711	9,38
160×80	77523	20656	812	9,54
180×90	98013	26676	913	10,29
200×100	120903	32499	1014	10,36
220×110	146193	39245	1115	10,84
240×120	173883	46802	1216	11,20

Т а б л и ц а 6

Сравнение эффективности КМСГ и ММСГ при решении задачи о консольной прямоугольной пластине с отношением сторон 1/4 под воздействием равномерно распределенной нагрузки

Сетка	Количество уравнений	Количество итераций КМСГ	Количество итераций ММСГ	Коэффициент ускорения
40×10	851	812	162	3,00
80×20	9903	3081	326	7,91
120×30	22053	6917	488	9,00
160×40	39003	12380	648	9,50
200×50	60753	19519	806	10,86
240×60	87303	28367	964	12,03
280×70	118653	39296	1121	13,86
320×80	154803	51215	1279	14,13
360×90	195753	67065	1436	15,31
400×100	241503	80987	1593	15,54

сетки обозначить через $h < 1$, то согласно полученным выше результатам количество требуемых итераций при использовании классического и модифицированного методов сопряженных градиентов имеет величину порядка $O(h^{-2})$ и $O(h^{-1})$ соответственно. Другими словами, при сгущении сетки в два раза количество итераций для классического метода сопряженных градиентов увеличивается в четыре раза, в то время как применение модифициро-

ванного алгоритма сопряженных градиентов (10) приводит к росту количества требуемых итераций только в два раза. Расчеты показали, что оценки подобного типа имеют место и при решении практических задач об изгибе тонкой пластины методом конечных элементов.

Резюме

Для розв'язку систем лінійних алгебраїчних рівнянь, породжуваних методом скінченних елементів у задачі про згин пластини, запропоновано комбінований ітераційний алгоритм на основі методів облямування та спряжених градієнтів. Представлено числові результати аналізу швидкості збіжності ітераційного процесу при розв'язанні модельних задач із використанням класичного і модифікованого алгоритмів методу спряжених градієнтів. Показано можливість прискорення ітераційного алгоритму.

1. *Meurant G.* Computer solution of large linear systems // *Studies in Mathematics and Its Applications.* – Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo, 1999. – 753 p.
2. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.
3. *Писсанецки С.* Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 411 с.
4. *Хейгеман Л., Янг Д.* Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 446 с.
5. *Hestens M. and Stiefel E.* Methods of conjugate gradients for solving linear system // *Nat. Bur. Std. J. Res.* – 1952. – **49**. – P. 409 – 436.
6. *Reid J. K.* On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations // *Large Sparse Sets Linear Equations.* – London; New York: Academic Press, 1971. – P. 231 – 252.
7. *Дьяконов Е. Г.* О некоторых прямых и итерационных методах, основанных на окаймлении матрицы // *Численные методы в математической физике / Под ред. Г. И. Марчука.* – Новосибирск: СО АН СССР, 1979. – С. 45 – 68.
8. *Мацюкин А. М., Непомнящих С. В.* Применение окаймления при решении сеточных систем уравнений // *Вычислительные алгоритмы в задачах математической физики.* – Новосибирск: СО АН СССР, 1983. – С. 99 – 109.
9. *Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластинки и оболочки. – М.: Наука, 1966. – 635 с.
10. *Чирков А. Ю.* Построение смешанной аппроксимации МКЭ для решения задачи об изгибе пластины на основе треугольника Зенкевича // *Пробл. прочности.* – 2004. – № 4. – С. 125 – 144.
11. *Jennings A.* A compact storage scheme for the solution of symmetric linear simultaneous equations // *Comput. J.* – 1966. – **9**. – P. 281 – 285.

12. *Cuthill E. and McKee J.* Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices // Proc. 24th Nat. Conf. Assoc. Comput. Mach. – ACM Publ. – 1969. – P. 157 – 172.
13. *Chang A.* Application of sparse matrix methods in electric power system analysis // Willoughby. – 1969. – P. 113 – 122.

Поступила 26. 12. 2005