УДК 593.3

Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения краевых задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Сформулирована смешанная проекционно-сеточная схема решения краевой задачи термопластичности в квазистатической постановке, когда процесс неизотермического упругопластического деформирования тела представляет собой последовательность равновесных состояний. В этом случае напряженно-деформированное состояние зависит от истории нагружения, и процесс неупругого деформирования должен прослеживаться на всем рассматриваемом интервале времени. Исследованы корректность и сходимость смешанных аппроксимаций для напряжений, деформаций и перемещений применительно к решению нелинейных краевых задач, описывающих неизотермические процессы активного нагружения с учетом начальных деформаций, зависящих от истории деформирования и нагрева. Подробно изучены свойства проектирующих операторов и на этой основе сформулировано условие, обеспечивающее существование, единственность и устойчивость решения дискретной задачи. Представлены результаты анализа специальных формул численного интегрирования интерполяционного типа, применение которых существенно упрощает вычислительную процедуру решения уравнений смешанного метода. Оценки сходимости и точности базируются на результатах теории обобщенных краевых задач и методах функционального анализа. Согласно полученным оценкам точность решения конечномерной задачи на начальных этапах нагружения должна быть достаточной, чтобы не допустить влияния роста первых коэффициентов в разложении суммарной погрешности на точность решения упругопластической задачи на последующих этапах нагружения.

Ключевые слова: теория пластичности, метод конечных элементов, смешанная схема, аппроксимация, устойчивость, сходимость, точность.

В численном анализе задач теории пластичности одним из перспективных направлений является применение смешанных формулировок метода конечных элементов (МКЭ), в которых напряжения и деформации входят в разрешающие уравнения наряду с перемещениями как равноправные неизвестные [1, 2]. Основной выигрыш при использовании смешанных формулировок МКЭ по сравнению с классическим подходом МКЭ в форме метода перемещений состоит в уменьшении погрешности аппроксимации для напряжений и деформаций и возможности точного удовлетворения статических граничных условий на поверхности тела. При этом смешанные схемы МКЭ позволяют обеспечить непрерывность аппроксимации не только для перемещений, но и для напряжений и деформаций. До настоящего времени математическому обоснованию корректности, устойчивости и сходимости смешанных схем МКЭ для задач неизотермической термопластичности уделялось недостаточно внимания, подобные публикации автору неизвестны. Данная работа как раз и посвящена освещению вышеперечисленных теоретических аспектов.

Обобщенная постановка краевой задачи. Пусть исследуемое тело занимает область $\Omega \subset R^3$ и имеет регулярную границу. Вектор-функции, описывающие перемещения точек тела $u(t)$, будем рассматривать как элементы функционального множества U. Множество допустимых тензор-функций для напряжений $\sigma(t)$, полных $\varepsilon(t)$ и начальных $\xi(t)$ деформаций обозначим через X. Полагаем, что U и X – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot;\cdot)_U$ и $(\cdot;\cdot)_X$ соответственно. Обозначим через U^* – пространство, сопряженное к U, и определим $\langle \rho(t), v \rangle$ как значение непрерывного линейного функционала $\rho(t) \in U^*$ на элементе $v \in U$. Тогда при исследовании неизотермических процессов упругопластического деформирования в квазистатической постановке обобщенная краевая задача может быть представлена следующей системой уравнений [3]:

$$\begin{cases} (\varepsilon(t), \eta)_X = (Bu(t), \eta)_X, & \forall \eta \in X; \\ (\sigma(t), \chi)_X = (\Phi(\varepsilon(t), \xi(t), t), \chi)_X, & \forall \chi \in X; \\ (\sigma(t), Bv)_X = \langle \rho(t), v \rangle, & \forall v \in U, \end{cases} \tag{1}$$

где B – непрерывный линейный дифференциальный оператор, действующий из пространства U в X, т.е. оператор вычисления малых деформаций по заданным перемещениям; Φ – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями; $\rho(t) \in U^*$ – линейный функционал, ассоциируемый с работой приложенных к телу нагрузок на возможных перемещениях $v \in U$.

Оператор Φ: $X \to X$ определяется с помощью отображения

$$\eta(t), \zeta(t) \in X \to \Phi(\eta(t), \zeta(t), t) = k_0(T(t))(\eta_S(t) - \zeta_S(t)) +$$

$$+ 2G(\bar{\varepsilon}^a(\eta(t), \zeta(t)), T(t), t)(\eta_D(t) - \zeta_D(t)), \tag{2}$$

где $k_0(T(t))$ – модуль всестороннего объемного расширения, зависящий от температуры $T(t)$; η_S, η_D – шаровая и девиаторная составляющие произвольного тензора деформаций $\eta \in X$; $G(\bar{\varepsilon}^a, q(t), T(t), t) = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q(t), T(t), t)/3\bar{\varepsilon}^a$ – секущий модуль сдвига; $\Psi = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T)$ – уравнение, описывающее мгновенную термомеханическую поверхность с начальным упрочнением q; $\bar{\varepsilon}^a$ – интенсивность девиатора активных деформаций;

$$\eta(t), \zeta(t) \to \bar{\varepsilon}^a(\eta(t), \zeta(t)) = \sqrt{\frac{2}{3}}\, \|\eta_D(t) - \zeta_D(t)\|. \tag{3}$$

В формуле (3) используется скалярное произведение $(\cdot;\cdot)$, определяемое сверткой соответствующих тензоров; $\|\cdot\|$ – норма, ассоциированная с этим скалярным произведением. Приведенные и следующие ниже обозначения более подробно описаны в [3].

Для конкретизации функциональной зависимости $\Psi = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T)$ используем уравнение термомеханической поверхности $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}, T)$, где $\bar{\sigma}$, $\bar{\varepsilon}$ – интенсивности девиаторов напряжений и деформаций [4]. При одноосном растяжении образца полная деформация $\bar{\varepsilon}$ связана с активной деформацией $\bar{\varepsilon}^a$ соотношением $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^a + q$, где q – начальная пластическая деформация. Тогда с учетом линейной зависимости на упругом участке деформирования получаем

$$\Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T) = \begin{cases} 3G_0(T)\bar{\varepsilon}^a, & \bar{\varepsilon}^a \le \bar{\varepsilon}_p(q, T); \\ f(\bar{\varepsilon}^a + q, T), & \bar{\varepsilon}^a > \bar{\varepsilon}_p(q, T), \end{cases} \tag{4}$$

где $G_0(T)$ – начальный модуль сдвига, зависящий в общем случае от температуры; $\bar{\varepsilon}_p(q, T)$ – деформация, соответствующая пределу пропорциональности $\bar{\sigma}_p(q, T)$, зависящему от накопленной пластической деформации q и температуры T.

Поскольку зависимость между $\bar{\sigma}_p(q, T)$ и $\bar{\varepsilon}_p(q, T)$ принимается линейной, получаем уравнение для определения $\bar{\varepsilon}_p(q, T)$:

$$f(\bar{\varepsilon}_p(q, T) + q, T) = 3G_0(T)\bar{\varepsilon}_p(q, T). \tag{5}$$

Сделаем некоторые допущения относительно функции $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}, T)$, описывающей мгновенную термомеханическую поверхность. Полагаем, что при всех $\bar{\varepsilon} \in [0, \infty)$ кроме, быть может, конечного числа изолированных точек функциональная зависимость $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$, описывающая кривую деформирования материала, удовлетворяет условиям

$$0 < \bar{g}_1 \le \bar{g}(\bar{\varepsilon}) \le G(\bar{\varepsilon}) \le G_0 < \infty. \tag{6}$$

Заметим, что неравенства (6) записаны для изотермических условий и допускают простую геометрическую интерпретацию. Для всех значений $\bar{\varepsilon}$ касательный модуль

$$\bar{g}(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{3}\frac{d\bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}} \tag{7}$$

строго положителен и не превышает секущий модуль $G(\bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})/3\bar{\varepsilon}$, который, в свою очередь, не превышает начальный модуль сдвига G_0.

Если в функциональную зависимость $\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})$ ввести в качестве второго аргумента температуру T, то получим уравнение мгновенной термомеханической поверхности $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}, T)$. Тогда для неизотермических процессов неравенства (6) можно представить в более общем виде:

$$0 < \min_T \bar{g}_1(T) \le \bar{g}(\bar{\varepsilon}, T) \le G(\bar{\varepsilon}, T) \le \max_T G_0(T) < \infty. \tag{8}$$

Кроме того, уравнение $\Psi = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T)$, описывающее мгновенную термомеханическую поверхность с начальным уравнением q, задается соотношениями (4). Следовательно, на основании неравенств (8) получаем

$$0 < \min_T \bar{g}_1(T) \le \bar{g}(\bar{\varepsilon}^a, q, T) \le G(\bar{\varepsilon}^a, q, T) \le \max_T G_0(T) < \infty. \tag{9}$$

Если уравнение $\Psi = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T)$, описывающее мгновенную термомеханическую поверхность с начальным упрочнением q, удовлетворяет условиям (9), то оператор $\eta, \zeta \to \Phi(\eta, \zeta)$ является непрерывно дифференцируемым по Фреше [5], причем существуют три вещественных положительных числа m, M и M_1 такие, что

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu) \ge m\|\mu\|^2, \qquad \forall \eta, \zeta, \mu \in X; \tag{10}$$

$$\|\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu\| \le M\|\mu\|, \qquad \forall \eta, \zeta, \mu \in X; \tag{11}$$

$$\|\Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi\| \le M_1\|\chi\|, \qquad \forall \eta, \zeta, \chi \in X, \tag{12}$$

где $\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\,\mu = d\Phi((\eta, \zeta); (\mu, 0))$ – дифференциал Фреше отображения $\eta \to \Phi(\eta, \zeta)$ в точке (η, ζ) на приращении $(\mu, 0)$; $\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)$ – производная Фреше оператора $\eta \to \Phi(\eta, \zeta)$ в точке (η, ζ); $\Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi = d\Phi((\eta, \zeta); (0, \chi))$ – дифференциал Фреше отображения $\zeta \to \Phi(\eta, \zeta)$ в точке (η, ζ) на приращении $(0, \chi)$; $\Phi'_\xi(\eta, \zeta)$ – производная Фреше оператора $\zeta \to \Phi(\eta, \zeta)$ в точке (η, ζ).

Уравнения (1) позволяют сформулировать обобщенную краевую задачу термопластичности в форме нелинейного операторного уравнения относительно перемещений

$$A(u(t), \xi(t), t) = \rho(t) \quad \text{в} \quad U^*, \quad u(t) \in U, \tag{13}$$

где A: $U \to U^*$ – нелинейный оператор теории пластичности, определяемый с помощью отображения:

$$A(u(t), \xi(t), t)\colon v \in U \to (\sigma(u(t), \xi(t), t), \varepsilon(v))_X =$$

$$= (\Phi(Bu(t), \xi(t), t)Bv)_X = \langle A(u(t), \xi(t), t)t), v\rangle. \tag{14}$$

Существование и единственность обобщенного решения уравнения (13) следуют из свойств сильной монотонности и липшиц-непрерывности оператора A: $U \to U^*$, которые устанавливаются на основании неравенств (10)–(12) и имеют вид:

$$
\begin{cases}
\langle A(v,\zeta)-A(w,\zeta),\, v-w\rangle \le m\|v-w\|_U^2, & \forall v, w \in U; \\
\|A(v,\zeta)-A(w,\zeta)\|_{U^*} \le M\|v-w\|_U, & \forall v, w \in U; \\
\|A(v,\zeta)-A(v,\chi)\|_{U^*} \le M_1\|\zeta-\chi\|_X, & \forall \zeta, \chi \in X.
\end{cases}
\qquad (15)
$$

Использование уравнения (13) для построения сеточных схем приводит к классической формулировке МКЭ в форме метода перемещений. В результате деформации вычисляются дифференцированием приближенных перемещений, найденных из решения задачи в перемещениях, что является основной причиной ухудшения сходимости аппроксимации для деформаций и напряжений по сравнению с таковой для перемещений.

Альтернативный подход состоит в построении проекционно-сеточной схемы, в которой деформации и напряжения являются непосредственными аргументами, а не определяются на основании решения задачи в перемещениях. Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств $U_h \times X_h \times X_h$, удовлетворяющее включению $U_h \times X_h \times X_h \subset U \times X \times X$, где h – определяющий параметр семейства конечномерных пространств, стремящийся в пределе к нулю. Тогда по аналогии с уравнениями (1) определим конечномерную задачу следующим образом.

Найти тройку $(u_h(t), \varepsilon_h(t), \sigma_h(t)) \in U_h \times X_h \times X_h$ такую, что

$$
\begin{cases}
(\varepsilon_h(t), \eta_h)_X = (Bu_h(t), \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\
(\sigma_h(t), \chi_h)_X = (\Phi(\varepsilon_h(t), \xi_h(t), t), \chi_h)_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\
(\sigma_h(t), Bv_h)_X = \langle \rho(t), v_h\rangle, & \forall v_h \in U_h.
\end{cases}
\qquad (16)
$$

Система уравнений (16) определяет смешанную проекционно-сеточную постановку краевой задачи термопластичности относительно перемещений, деформаций и напряжений.

Для формулировки условий устойчивости и разрешимости дискретной задачи (16) введем в рассмотрение проектирующий оператор I_h, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства $Y_h = BU_h$ его проекцию в X_h. Оператор I_h, ассоциируемый со скалярным произведением $(\cdot;\cdot)_X$, определим на основании равенства

$$
(\overline{\tau}_h - I_h\overline{\tau}_h, \eta_h)_X = 0, \quad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h, \quad \forall \eta_h \in X_h. \qquad (17)
$$

Тогда элемент $I_h\overline{\tau}_h$ – суть ортогональная проекция $\overline{\tau}_h \in Y_h$ на пространство X_h, и, следовательно, для произвольного элемента $\overline{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$
\|\overline{\tau}_h - I_h\overline{\tau}_h\|_X = \inf_{\eta_h \in X_h} \|\overline{\tau}_h - \eta_h\|_X. \qquad (18)
$$

С использованием ортопроектора $I_h\colon Y_h \to X_h$ уравнения (16) запишем в эквивалентном виде

$$\begin{cases}(\varepsilon_h(t), \eta_h)_X = (I_h B u_h(t), \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ (\sigma_h(t), \chi_h)_X = (\Phi(\varepsilon_h(t), \xi_h(t), t), \chi_h)_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (\sigma_h(t), I_h B v_h)_X = \langle \rho(t), v_h \rangle, & \forall v_h \in U_h,\end{cases} \tag{19}$$

откуда следует, что элемент $\varepsilon_h(t) = I_h B u_h(t)$ – суть ортогональная проекция $Bu_h(t) \in Y_h$ на пространство X_h. Тогда систему уравнений (19) можно представить в форме одного нелинейного операторного уравнения относительно перемещений:

$$A_h(u_h(t), \xi_h(t), t) = \rho_h(t) \quad \text{в} \quad U_h^*, \quad u_h(t) \in U_h, \tag{20}$$

где $A_h\colon U_h \to U_h^*$ – нелинейный оператор, определяемый с помощью отображения

$$A_h(u_h(t), \xi_h(t), t)\colon v_h \in U_h \to (\sigma_h(u_h(t), \xi_h(t), t), \varepsilon_h(v_h))_X =$$

$$= (\Phi(I_h B u_h(t), \xi_h(t), t), I_h B v_h)_X = \langle A_h(u_h(t), \xi_h(t), t), v_h \rangle. \tag{21}$$

Условие устойчивости. Пусть для всякого h и любого $\overline{\tau}_h \in Y_h$ справедлива оценка

$$d \| \overline{\tau}_h \|_X \le \| I_h \overline{\tau}_h \|_X, \quad 0 < d \le 1, \tag{22}$$

где постоянная d не зависит от h. Тогда при любом h дискретная задача (16) однозначно разрешима при всех $\rho(t) \in U^*$ и $\xi_h(t) \in X$.

Действительно, с использованием неравенств (10)–(12) и условия устойчивости (22) приходим к тому, что оператор $A_h\colon U_h \to U_h^*$ является сильно-монотонным и липшиц-непрерывным, т.е. для любых $v_h, w_h \in U_h$ и ζ_h, $\chi_h \in X$ выполняются неравенства

$$\begin{cases}\langle A_h(v_h, \zeta_h) - A_h(w_h, \zeta_h), v_h - w_h \rangle \le m d^2 \| v_h - w_h \|_U^2; \\ \| A_h(v_h, \zeta_h) - A_h(w_h, \zeta_h) \|_{U^*} \le M \| v_h - w_h \|_U; \\ \| A_h(v_h, \zeta_h) - A_h(v_h, \chi_h) \|_{U^*} \le M_1 \| \zeta_h - \chi_h \|_X.\end{cases} \tag{23}$$

Следовательно, решение операторного уравнения (20) существует и единственно, а также непрерывно зависит от приложенных нагрузок $\rho_h(t) \in U_h^*$ и начальных деформаций $\xi_h(t) \in X$. При этом справедливы априорные оценки

$$\begin{cases}\| u_h(t) \|_U \le \dfrac{1}{md^2}(\| \rho(t) \|_{U^*} + M_1 \| \xi_h(t) \|_X); \\ \| \varepsilon_h(t) \|_X \le \dfrac{1}{md}(\| \rho(t) \|_{U^*} + M_1 \| \xi_h(t) \|_X);\end{cases} \tag{24а}$$

$$\left\{ \|\sigma_h(t)\|_X \le \frac{M}{md} \|\rho(t)\|_{U^*} + M_1 \left(1 + \frac{M}{md}\right) \|\xi_h(t)\|_X . \right. \tag{24б}$$

Замечание 1. С использованием свойств ортопроектора I_h: $Y_h \to X_h$ получаем оценку снизу для d:

$$d^2 \ge 1 - \sup_{\bar{\tau}_h \in Y_h} \frac{\|\bar{\tau}_h - \eta_h\|_X^2}{\|\bar{\tau}_h\|_X^2}, \quad \forall \eta_\eta \in X_h. \tag{25}$$

Замечание 2. Если оператор I_h удовлетворяет условию устойчивости (22), то линейное отображение I_h: $Y_h \to X_h$ взаимно однозначно и непрерывно. Следовательно, существует обратный линейный ограниченный оператор I_h^{-1}, действующий из пространства $\mathrm{Im}(I_h)$ в Y_h, для которого справедлива оценка:

$$\|I_h^{-1}\pi_h\|_X \le \frac{1}{d}\|\pi_h\|_X , \quad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{26}$$

Замечание 3. С использованием оценки (26) находим

$$\|\pi_h - I_h^{-1}\pi_h\|_X \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}\|\pi_h\|_X , \quad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{27}$$

Транспозицию оператора I_h обозначим через I'_h. Оператор I'_h отображает X_h на пространство Y_h и определяется соотношением

$$(I'_h\eta_h, \bar{\tau}_h)_X = (\eta_h, I_h\bar{\tau}_h)_X , \quad \forall \eta_h \in X_h, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{28}$$

С помощью равенств (17) и (28) для любого $\eta_h \in X_h$ получим

$$(\eta_h - I'_h\eta_h, \bar{\tau}_h)_X = 0, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{29}$$

Следовательно, I'_h: $X_h \to Y_h$ – ортогональный проектирующий оператор и $I'_h\eta_h$ – суть ортогональная проекция $\eta_h \in X_h$ на пространство Y_h. Более того, согласно равенству (28) для всякого $\mu_h \in [\mathrm{Im}(I_h)]^\perp$ имеем

$$(I'_h\mu_h, \bar{\tau}_h)_X = (\mu_h, I_h\bar{\tau}_h)_X = 0, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \tag{30}$$

откуда ввиду произвольности выбора $\bar{\tau}_h \in Y_h$ получаем $\mu_h \in \ker(I'_h)$, где $\ker(I'_h)$ – ядро оператора I'_h. Другими словами, $\ker(I'_h) = [\mathrm{Im}(I_h)]^\perp$. Таким образом, ортопроекторы I_h и I'_h порождают разложение пространства X_h в прямую сумму подпространств: $X_h = \mathrm{Im}(I_h) \oplus \ker(I'_h)$.

Сужение I'_h на пространство $\mathrm{Im}(I_h)$ обозначим через $\tilde{I}'_h$. Оператор $\tilde{I}'_h$ отображает $\mathrm{Im}(I_h)$ на пространство Y_h и устанавливает между элементами этих пространств взаимно однозначное соответствие. Определяя в равенстве (28) элемент $\overline{\tau}_h \in Y_h$ по соотношению $\overline{\tau}_h = I_h^{-1}\pi_h \in Y_h$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца [5] и оценкой (26) для произвольного элемента $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ получаем

$$||\pi_h||_X^2 = (\widetilde{I}_h'\pi_h, I_h^{-1}\pi_h)_X \le ||\widetilde{I}_h'\pi_h||_X \, ||I_h^{-1}\pi_h||_X \le \frac{1}{d}||\widetilde{I}_h'\pi_h||_X \, ||\pi_h||_X , \tag{31}$$

откуда следует

$$d||\pi_h||_X \le ||\widetilde{I}_h'\pi_h||_X , \quad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{32}$$

Замечание 4. С помощью оценки (32) находим

$$||\pi_h - \widetilde{I}_h'\pi_h||_X \le \sqrt{1-d^2}\,||\pi_h||_X , \quad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{33}$$

Определим проектирующий оператор на замкнутое линейное подпространство X_h гильбертова пространства X относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$. Для этого отнесем каждому элементу $\eta_h \in X_h$ его ортогональную проекцию на подпространство X_h. Полученное соответствие есть оператор в X. Обозначим его через θ_h и по определению примем

$$(\eta - \theta_h\eta, \eta_h)_X = 0, \quad \forall \eta_h \in X_h. \tag{34}$$

С использованием ортопроектора θ_h: $X \to X_h$ для произвольного элемента $\eta \in X$ имеем

$$||\eta - \theta_h\eta||_X = \inf_{\eta_h \in X_h} ||\eta - \eta_h||_X . \tag{35}$$

Сужение θ_h на Y_h есть оператор I_h, т.е. I_h – оператор с областью определения Y_h, для которого $I_h\overline{\tau}_h = \theta_h\overline{\tau}_h$ при любом $\overline{\tau}_h \in Y_h$. Тогда любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть единственным образом представлен в виде разложения $\eta_h = \pi_h + \mu_h$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I_h')$, причем

$$||\mu_h||_X = ||\eta_h - \pi_h||_X = \inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h} ||\eta_h - I_h\overline{\tau}_h||_X , \quad \forall \eta_h \in X_h. \tag{36}$$

Замечание 5. Пусть $\eta = Bv \in Y$ для любого $v \in U$. Сужение θ_h на множество элементов $\eta - \overline{\tau}_h$ обозначим через $\widetilde{\theta}_h$. Тогда согласно определению элемента $\mu_h \in \ker(I_h')$ для произвольного $\overline{\tau}_h \in Y_h$ получаем

$$||\mu_h||_X^2 \le ||\widetilde{\theta}_h(\eta - \overline{\tau}_h)||_X^2 = ||\eta - \overline{\tau}_h||_X^2 - \inf_{\eta_h \in X_h} ||(\eta - \overline{\tau}_h) - \eta_h||_X^2 , \tag{37}$$

откуда следует

$$||\mu_h||_X \le \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} ||\eta - \bar\tau_h||_X, \tag{38}$$

причем равенство справедливо, если $\eta - \bar\tau_h$ – элемент пространства X_h. Если предположить, что пространства X_h и Y_h “не пересекаются”, то вычитаемое в правой части (37) не может быть равным нулю и, следовательно, в оценке (38) имеет место строгое неравенство, т.е. $||\widetilde\theta_h||_X < 1$.

Замечание 6. Для произвольного $\eta \in X$ элемент $\theta_h\eta \in X_h$ допускает ортогональное разложение вида $\theta_h\eta = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \operatorname{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I'_h)$. Поскольку $\eta - \pi_h = \eta - \theta_h\eta + \mu_h$, с учетом свойств ортогональных проекций (35) и (36) получим

$$||\eta - \pi_h||_X \le \inf_{\eta_h \in X_h} ||\eta - \eta_h||_X + \inf_{\bar\tau_h \in Y_h} ||\widetilde\theta_h(\eta - \bar\tau_h)||_X. \tag{39}$$

Проектирующий оператор на замкнутое линейное подпространство U_h гильбертова пространства U обозначим через P_h. Оператор P_h определим для всякого h и любого $v \in U$ на основании равенства

$$(Bv - BP_hv, Bv_h)_X = 0, \quad \forall v_h \in U_h. \tag{40}$$

С помощью ортопроектора P_h: $U \to U_h$ для произвольного элемента $v \in U$ имеем

$$||Bv - BP_hv||_X = \inf_{v_h \in U_h} ||Bv - Bv_h||_X. \tag{41}$$

Замечание 7. Пусть $\eta = Bv \in Y$ для любого $v \in U$, причем $\theta_h\eta = = \pi_h + \mu_h \in X_h$, где $\pi_h \in \operatorname{Im}(I_h)$ и $\mu_h \in \ker(I'_h)$. С использованием ортогонального разложения элемента $\eta - I_h^{-1}\pi_h \in Y$ в виде $\eta - I_h^{-1}\pi_h = = \eta - BP_hv + BP_hv - I_h^{-1}\pi_h$ находим

$$||\eta - I_h^{-1}\pi_h||_X^2 = ||\eta - BP_hv||_X^2 + ||BP_hv - I_h^{-1}\pi_h||_X^2. \tag{42}$$

Оценим сверху второе слагаемое в правой части (42) с помощью равенства

$$(I_hBP_hv - \pi_h, \eta_h)_X = (BP_hv - \eta, \eta_h - \bar\tau_h)_X, \quad \forall \bar\tau_h \in Y_h, \quad \forall \eta_h \in \operatorname{Im}(I_h), \tag{43}$$

в котором полагаем $\bar\tau_h = \widetilde I'_h\eta_h \in Y_h$ и $\eta_h = I_hBP_hv - \pi_h \in \operatorname{Im}(I_h)$. Если для левой части (43) использовать условие устойчивости (22), а для правой – неравенства Коши–Буняковского–Шварца и (33), то приходим к неравенству

$$||BP_h v - I_h^{-1}\pi_h||_X \le \frac{\sqrt{1-d^2}}{d}||\eta - BP_h v||_X \,. \tag{44}$$

Подставляя эту оценку в равенство (42), с учетом свойств ортогональных проекций (41) получаем

$$||\eta - I_h^{-1}\pi_h||_X \le \frac{1}{d}\inf_{\tau_h \in Y_h}||\eta - \overline{\tau}_h||_X \,. \tag{45}$$

Теорема сходимости. Если выполняется условие устойчивости (22), то существуют такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2, ..., C_{10}, что

$$||\varepsilon(t)-\varepsilon_h(t)||_X \le C_1 \inf_{\chi_h \in X_h}||\sigma(t)-\chi_h||_X + C_2(\inf_{\eta_h \in X_h}||\varepsilon(t)-\eta_h||_X +$$

$$+\inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h}||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t)-\overline{\tau}_h)||_X) + C_3||\xi(t)-\xi_h(t)||_X\,; \tag{46}$$

$$||\sigma(t)-\sigma_h(t)||_X \le C_4 \inf_{\chi_h \in X_h}||\sigma(t)-\chi_h||_X + C_5(\inf_{\eta_h \in X_h}||\varepsilon(t)-\eta_h||_X +$$

$$+\inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h}||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t)-\overline{\tau}_h)||_X) + C_6||\xi(t)-\xi_h(t)||_X\,; \tag{47}$$

$$||\varepsilon(t)-Bu_h(t)||_X \le C_7 \inf_{\chi_h \in X_h}||\sigma(t)-\chi_h||_X + C_8(\inf_{\eta_h \in X_h}||\varepsilon(t)-\eta_h||_X +$$

$$+\inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h}||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t)-\overline{\tau}_h)||_X) + C_9\inf_{\overline{\tau}_h \in Y_h}||\varepsilon(t)-\overline{\tau}_h||_X + C_{10}||\xi(t)-\xi_h(t)||_X\,, \tag{48}$$

причем

$$C_1 = \frac{\sqrt{1-d^2}}{md}; \qquad C_2 = \sqrt{\frac{M}{m}}; \qquad C_3 = \frac{M_1}{m};$$

$$C_4 = \frac{\sqrt{M^2 - d^2(M^2-m^2)}}{md}; \qquad C_5 = M\sqrt{\frac{M}{m}}; \qquad C_6 = \frac{MM_1}{m}; \tag{49}$$

$$C_7 = \frac{\sqrt{1-d^2}}{md^2}; \qquad C_8 = \frac{1}{d}\sqrt{\frac{M-m}{m}}; \qquad C_9 = \frac{1}{d}; \qquad C_{10} = \frac{M_1}{md}.$$

◀ Пусть $\theta_h\varepsilon = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\psi_h \in \ker(I'_h)$. С использованием ортогонального разложения $\varepsilon - \varepsilon_h = \varepsilon - \varphi_h + \varphi_h - \varepsilon_h$ имеем

$$||\varepsilon-\varepsilon_h||_X^2=||\varepsilon-\varphi_h||_X^2+||\varphi_h-\varepsilon_h||_X^2. \tag{50}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (50) с помощью равенства, которое справедливо для любого элемента $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$:

$$(\Phi(\varepsilon_h,\xi_h)-\Phi(\varepsilon,\xi),\pi_h)_X=(\sigma-\theta_h\sigma, I_h^{-1}\pi_h-\pi_h)_X. \tag{51}$$

В соответствии с теоремой о среднем [5] следует, что для произвольного $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и некоторых $\widetilde{p}\in[0,1]$, $\widetilde{q}\in[0,1]$ выполняется равенство

$$(\Phi(\varepsilon_h,\xi_h)-\Phi(\varepsilon,\xi),\pi_h)_X=(\Phi'_\varepsilon(\widetilde{p}\varepsilon_h+(1-\widetilde{p})\varepsilon,\xi_h)(\varepsilon_h-\varepsilon),\pi_h)_X+$$
$$+(\Phi'_\xi(\varepsilon,\widetilde{q}\xi_h+(1-\widetilde{q})\xi)(\xi_h-\xi),\pi_h)_X. \tag{52}$$

Тогда соотношение (51) можно представить в следующем виде:

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta,\xi_h)(\varepsilon_h-\varepsilon),\pi_h)_X=(\sigma-\theta_h\sigma, I_h^{-1}\pi_h-\pi_h)_X+$$
$$+(\Phi'_\xi(\varepsilon,\zeta)(\xi-\xi_h),\pi_h)_X,\qquad \forall\pi_h\in\mathrm{Im}(I_h), \tag{53}$$

откуда нетрудно получить равенство

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta,\xi_h)(\varepsilon_h-\varphi_h),\pi_h)_X=(\sigma-\theta_h\sigma, I_h^{-1}\pi_h-\pi_h)_X+$$
$$+(\Phi'_\varepsilon(\eta,\xi_h)(\varepsilon-\varphi_h),\pi_h)_X+(\Phi'_\xi(\varepsilon,\zeta)(\xi-\xi_h),\pi_h)_X,\qquad \forall\pi_h\in\mathrm{Im}(I_h), \tag{54}$$

где $\eta=\widetilde{p}\varepsilon_h+(1-\widetilde{p})\varepsilon\in X$; $\zeta=\widetilde{q}\xi_h+(1-\widetilde{q})\xi\in X$.

Введем в рассмотрение оператор $Q_\omega(\eta,\zeta)$ с помощью отображения

$$\mu\to Q_\omega(\eta,\zeta)\mu=\Phi'_\varepsilon(\eta,\zeta)\mu-\omega\mu,\qquad \forall\eta,\zeta,\mu\in X, \tag{55}$$

где ω – положительная постоянная.

Тогда равенство (54) принимает вид

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta,\xi_h)(\varepsilon_h-\varphi_h),\pi_h)_X=(\sigma-\theta_h\sigma, I_h^{-1}\pi_h-\pi_h)_X+$$
$$+(Q_\omega(\eta,\xi_h)(\varepsilon-\varphi_h),\pi_h)_X+(\Phi'_\xi(\varepsilon,\zeta)(\xi-\xi_h),\pi_h)_X,\qquad \forall\pi_h\in\mathrm{Im}(I_h). \tag{56}$$

Если в (56) положить $\pi_h=\varepsilon_h-\varphi_h\in\mathrm{Im}(I_h)$, то с использованием неравенств Коши–Буняковского–Шварца (12) и (27) получим

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta,\xi_h)(\varepsilon_h-\varphi_h),\varepsilon_h-\varphi_h)_X\le$$

$$\leq \left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \|\sigma - \theta_h \sigma\|_X + M_1 \|\xi - \xi_h\|_X \right) \|\varepsilon_h - \varphi_h\|_X +$$

$$+ \sup_{\eta \in X} \|Q_\omega(\eta, \xi_h)(\varphi_h - \varepsilon_h)\|_X \|\varepsilon - \varphi_h\|_X . \tag{57}$$

Предположим, что для любых $\eta,\ \zeta,\ \mu \in X$ справедливо неравенство

$$\|Q_\omega(\eta, \zeta)\mu\|_X^2 \leq \gamma^2(\omega)(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X , \tag{58}$$

где $\gamma(\omega)$ – положительная постоянная, которую еще нужно оценить.

Тогда в соответствии с (57) и (58) запишем следующую оценку:

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta, \xi_h)(\varepsilon_h - \varphi_h), \varepsilon_h - \varphi_h)_X \leq$$

$$\leq \left(\frac{\sqrt{1-d^2}}{d} \|\sigma - \theta_h \sigma\|_X + M_1 \|\xi - \xi_h\|_X \right) \|\varepsilon_h - \varphi_h\|_X +$$

$$+ \gamma(\omega)(\Phi'_\varepsilon(\eta, \xi_h)(\varepsilon_h - \varphi_h), \varepsilon_h - \varphi_h)_X^{1/2} \|\varepsilon - \varphi_h\|_X , \tag{59}$$

откуда с учетом неравенства (10) получаем

$$\|\varepsilon_h - \varphi_h\|_X \leq \frac{\sqrt{1-d^2}}{md} \|\sigma - \theta_h \sigma\|_X + \frac{\gamma(\omega)}{\sqrt{m}} \|\varepsilon - \varphi_h\|_X + \frac{M_1}{m} \|\xi - \xi_h\|_X . \tag{60}$$

Оценим сверху $\gamma^2(\omega)$. В соответствии с (55) и (58) имеем

$$\gamma^2(\omega) = \sup_{\mu \in X} \frac{\|Q_\omega(\eta, \zeta)\mu\|_X^2}{(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X} =$$

$$= \sup_{\mu \in X} \frac{\|\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu\|_X^2 - 2\omega(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X + \omega^2 \|\mu\|_X^2}{(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X} . \tag{61}$$

Согласно приведенным выше результатам, $\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)$ – самосопряженный положительно определенный оператор при всех $\eta,\ \zeta \in X$, и, значит, для произвольных элементов $\eta,\ \zeta,\ \mu \in X$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} &\|\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu\|_X^2 \leq M(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X ; \\ &\|\mu\|_X^2 \leq \frac{1}{m}(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X . \end{aligned} \tag{62}$$

На основании (61) и (62) получим

$$\gamma^2(\omega) = M - 2\omega + \frac{\omega^2}{m}, \tag{63}$$

причем для любого $\omega \geq 0$ справедлива оценка

$$\gamma^2(\omega) = \left(\sqrt{M} - \frac{\omega}{\sqrt{m}}\right)^2 + 2\omega\left(\sqrt{\frac{M}{m}} - 1\right) \geq 0. \tag{64}$$

Выбирая ω из условия минимума $\gamma^2(\omega)$, находим

$$\gamma^2(m) = \min_{\omega \geq 0} \gamma^2(\omega) = M - m. \tag{65}$$

Согласно неравенствам (60) и (65) имеем

$$||\varepsilon_h - \varphi_h||_X \leq \frac{\sqrt{1-d^2}}{md} ||\sigma - \theta_h \sigma||_X +$$

$$+ \sqrt{\frac{M-m}{m}} ||\varepsilon - \varphi_\eta||_X + \frac{M_1}{m} ||\xi - \xi_h||_X . \tag{66}$$

Подставляя это неравенство в (50), приходим к оценке погрешности для деформаций:

$$||\varepsilon - \varepsilon_h||_X \leq \frac{\sqrt{1-d^2}}{md} ||\sigma - \theta_h \sigma||_X +$$

$$+ \sqrt{\frac{M}{m}} ||\varepsilon - \varphi_h||_X + \frac{M_1}{m} ||\xi - \xi_h||_X , \tag{67}$$

откуда с учетом свойств ортогональных проекций (35) и (39) получаем оценку (46).

Для доказательства оценки (47) используем равенство

$$||\sigma - \sigma_h||_X^2 = ||\sigma - \theta_h \sigma||_X^2 + ||\theta_h \sigma - \sigma_h||_X^2 . \tag{68}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (68) с помощью соотношения, которое выполняется для любого элемента $\eta_h \in X_h$:

$$(\theta_h \sigma - \sigma_h, \eta_h)_X = (\Phi(\varepsilon, \zeta) - \Phi(\varepsilon_h, \xi_h), \eta_h)_X . \tag{69}$$

Если в (69) положить $\eta_h = \theta_h\sigma - \sigma_h \in X_h$, то в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца имеем

$$||\theta_h\sigma - \sigma_h||_X \leq ||\Phi(\varepsilon, \xi) - \Phi(\varepsilon_h, \xi_h)||_X . \tag{70}$$

Кроме того, если для оценки правой части (70) использовать неравенство треугольника, а затем формулу конечных приращений и неравенства (11), (12), то получим

$$||\Phi(\varepsilon, \xi) - \Phi(\varepsilon_h, \xi_h)||_X \leq ||\Phi(\varepsilon, \xi_h) - \Phi(\varepsilon_h, \xi_h)||_X +$$

$$+||\Phi(\varepsilon, \xi) - \Phi(\varepsilon, \xi_h)||_X \leq \sup_{\eta\in X} ||\Phi'_\varepsilon(\eta, \xi_h)||_X \, ||\varepsilon - \varepsilon_h||_X +$$

$$+ \sup_{\zeta\in X} ||\Phi'_\xi(\varepsilon, \zeta)||_X \, ||\xi - \xi_h||_X \leq M||\varepsilon - \varepsilon_h||_X + M_1||\xi - \xi_h||_X . \tag{71}$$

На основании (67)–(71) приходим к неравенству

$$||\sigma - \sigma_h||_X \leq \frac{\sqrt{M^2 - d^2(M^2 - m^2)}}{md} ||\sigma - \theta_h\sigma||_X +$$

$$+ M\left(\sqrt{\frac{M}{m}} ||\varepsilon - \varphi_h||_X + \frac{M_1}{m} ||\xi - \xi_h||_X\right), \tag{72}$$

откуда согласно свойствам ортогональных проекций (39) и (35) получаем оценку (47).

Для доказательства оценки (48) используем неравенство треугольника и оценку (26). Тогда приходим к неравенству

$$||\varepsilon - Bu_h||_X \leq ||\varepsilon - I_h^{-1}\varphi_h||_X + \frac{1}{d}||\varphi_h - \varepsilon_h||_X , \tag{73}$$

и, значит, с учетом оценок (44) и (65) находим

$$||\varepsilon - Bu_h||_X \leq \frac{\sqrt{1-d^2}}{md^2} ||\sigma - \theta_h\sigma||_X + \frac{1}{d}\sqrt{\frac{M-m}{m}} ||\varepsilon - \varphi_h||_X +$$

$$+ \frac{1}{d}||\varepsilon - BP_h u||_X + \frac{M_1}{md}||\xi - \xi_h||_X , \tag{74}$$

откуда с использованием свойств ортогональных проекций (35), (39) и (41) получаем оценку (48). ▶

Замечание 8. Согласно (46) и (47), оценки погрешностей смешанной аппроксимации для деформаций и напряжений включают слагаемое $\|\psi_h\|_X$. В этом и заключается их принципиальное отличие от аналогичных оценок при построении классических схем МКЭ в перемещениях. Погрешность $\varepsilon - Bu_h$ "неулучшаема" в том смысле, что в ее оценке (48) присутствует слагаемое $\|\varepsilon - BP_h u\|_X$. Однако оценки погрешностей для деформаций и напряжений таким членом не располагают, в чем и состоит их особенность.

Замечание 9. Пусть $u_I \in U_h$ и $\varepsilon_I \in X_h$ – интерполянты для элементов $u \in U$ и $\varepsilon \in Y$ соответственно. Тогда для оценки $\|\psi_h\|_X$ могут быть использованы неравенства

$$\|\psi_h\|_X \le \sup_{\eta_h \in X_h} \frac{|(B(u-u_I),\eta_h)_X|}{\|\eta_h\|_X} \le \|\varepsilon - \varepsilon_I\|_X + \sup_{\eta_h \in X_h} \frac{|(\varepsilon_I - Bu_I,\eta_h)_X|}{\|\eta_h\|_X}. \tag{75}$$

Замечание 10. При использовании уравнений (1) весь процесс нагружения разбивается на временные этапы таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы нагружения и разгрузки, по возможности совпадали с моментами времени изменения направления процесса деформирования элементов тела от нагружения к разгрузке, и наоборот. Тогда для m-го этапа нагружения тензор начальных деформаций $\xi(t_m)$ определяется с помощью соотношения [1]

$$\xi(t_m) = \varepsilon_S^T(t_m) + \varepsilon_D^p(t_{m-1}), \tag{76}$$

где $\varepsilon_S^T(t_m)$ – шаровой тензор нестесненных термических деформаций; $\varepsilon_D^p(t_{m-1})$ – девиатор пластических деформаций,

$$\varepsilon_D^p(t_{m-1}) = \varepsilon_D(t_{m-1}) - \frac{1}{2G_0(t_{m-1})}\sigma_D(t_{m-1}). \tag{77}$$

Оценим погрешность $\xi(t_m) - \xi_h(t_m)$, где элемент $\xi_h(t_m)$ находим по выражению

$$\xi_h(t_m) = (\varepsilon_S^T)_h(t_m) + P((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), (\xi_h)_D(t_{m-1})), \tag{78}$$

где P – оператор вычисления пластических деформаций, определяемый с помощью отображения

$$\eta_D, \zeta_D \in X \to P(\eta_D, \zeta_D) = \eta_D - \frac{1}{2G_0}\Phi(\eta_D, \zeta_D). \tag{79}$$

В соответствии с (76)–(78) имеем

$$\xi(t_m) - \xi_h(t_m) = \varepsilon_S^T(t_m) - (\varepsilon_S^T)_h(t_m) +$$

$$+ P(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})) - P((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), (\xi_h)_D(t_{m-1})). \qquad (80)$$

С использованием неравенства треугольника

$$||P(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})) - P((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), (\xi_h)_D(t_{m-1}))||_X \le$$

$$\le ||P(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})) - P((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1}))||_X +$$

$$+ ||P((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})) - P((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), (\xi_h)_D(t_{m-1}))||_X \qquad (81)$$

и формулы конечных приращений находим

$$||P(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})) - P((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), (\xi_h)_D(t_{m-1}))||_X \le$$

$$\le \sup_{\eta_D \in X} ||P'_\varepsilon(\eta_D, \xi_D(t_{m-1}))||_X \, ||\varepsilon_D(t_{m-1}) - (\varepsilon_h)_D(t_{m-1})||_X +$$

$$+ \sup_{\zeta_D \in X} ||P'_\xi((\varepsilon_h)_D(t_{m-1}), \zeta_D)||_X \, ||\xi_D(t_{m-1}) - (\xi_h)_D(t_{m-1})||_X \,, \qquad (82)$$

где $P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)$ и $P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)$ – производные оператора P в произвольной точке (η_D, ζ_D).

Согласно (79) операторы $P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)$ и $P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)$ определяются с помощью отображений

$$\begin{aligned} &\mu_D \in X \to P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D = \mu_D - \frac{1}{2G_0}\Phi'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D; \\ &\chi_D \in X \to P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D = \frac{1}{2G_0}\Phi'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D, \end{aligned} \qquad (83)$$

откуда следует, что $P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)$ и $P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)$ – самосопряженные операторы при всех $\eta_D, \zeta_D \in X$, причем

$$||P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D||_X \le 1 - \gamma; \qquad ||P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)||_X \le 1, \qquad (84)$$

где γ – вещественная положительная постоянная, для которой справедлива оценка $\gamma \ge m/M_1$.

Неравенство (82) с учетом оценок (84) принимает вид

$$||\xi(t_m) - \xi_h(t_m)||_X \le ||\varepsilon_S^T(t_m) - (\varepsilon_S^T)_h(t_m)||_X +$$

$$+ (1-\gamma)||\varepsilon(t_{m-1}) - \varepsilon_h(t_{m-1})||_X + ||\xi(t_{m-1}) - \xi_h(t_{m-1})||_X \,. \qquad (85)$$

Если для оценки второго слагаемого в правой части (85) использовать неравенство (46), то получим

$$||\xi(t_m)-\xi_h(t_m)||_X \le ||\varepsilon_S^T(t_m)-(\varepsilon_S^T)_h(t_m)||_X +$$

$$+K_1 \inf_{\chi_h\in X_h} ||\sigma(t_{m-1})-\chi_h||_X + K_2\left(\inf_{\eta_h\in X_h} ||\varepsilon(t_{m-1})-\eta_h||_X +\right.$$

$$\left.+\inf_{\chi_h\in X_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_{m-1})-\overline{\tau}_h||_X\right) + K_3||\xi(t_{m-1})-\xi_h(t_{m-1}||_X , \qquad (86)$$

где K_1, K_2, K_3 – положительные постоянные,

$$K_1 = C_1(1-\gamma); \qquad K_2 = C_2(1-\gamma); \qquad K_3 = 1 + C_3(1-\gamma) \le \frac{M_1}{m}. \qquad (87)$$

Если в формуле (86) каждое $\xi(t_{m-1})-\xi_h(t_{m-1})$ выразить через предыдущее, то получим неравенство

$$||\xi(t_m)-\xi_h(t_m)||_X \le \sum_{n=1}^{m} K_3^{m-n} ||\varepsilon_S^T(t_n)-(\varepsilon_S^T)_h(t_n)||_X +$$

$$+\sum_{n=1}^{m-1} K_3^{m-n}\left(K_1 \inf_{\chi_h\in X_h} ||\sigma(t_n)-\chi_h||_X +\right.$$

$$\left.+K_2\left(\inf_{\eta_h\in X_h} ||\varepsilon(t_n)-\eta_h||_X + \inf_{\overline{\tau}_h\in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_n)-\overline{\tau}_h)||_X\right)\right). \qquad (88)$$

На основании (46) и (88) приходим к оценке суммарной погрешности для деформаций в конце этапа нагружения:

$$||\varepsilon(t_m)-\varepsilon_h(t_m)||_X \le \sum_{n=1}^{m} C_1(t_n) \inf_{\chi_h\in X_h} ||\sigma(t_n)-\chi_h||_X +$$

$$+C_2(t_n)\left(\inf_{\eta_h\in X_h} ||\varepsilon(t_n)-\eta_h||_X + \inf_{\overline{\tau}_h\in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_n)-\overline{\tau}_h)||_X\right)+$$

$$+C_3(t_n)||\varepsilon_S^T(t_n)-(\varepsilon_S^T)_h(t_n)||_X , \qquad (89)$$

где $C_1(t_n)$, $C_2(t_n)$ и $C_3(t_n)$ – положительные коэффициенты,

$$\begin{gathered} C_1(t_n) = K_3^{m-n} K_1 C_3; \qquad C_2(t_n) = K_3^{m-n} K_2 C_3; \\ C_3(t_n) = K_3^{m-n} C_3, \qquad 1 \le n \le m-1; \\ C_1(t_m) = C_1; \qquad C_2(t_m) = C_2; \qquad C_3(t_m) = C_3. \end{gathered} \qquad (90)$$

Аналогичную оценку можно получить также для напряжений. Действительно, с использованием неравенств (47) и (88) имеем оценку суммарной погрешности для напряжений в конце этапа нагружения:

$$
\begin{gathered}
\|\sigma(t_m)-\sigma_h(t_m)\|_X \leq \sum_{n=1}^{m} C_4(t_n) \inf_{\chi_h\in X_h} \|\sigma(t_n)-\chi_h\|_X + \\
+C_5(t_n)\left(\inf_{\eta_h\in X_h}\|\varepsilon(t_n)-\eta_h\|_X+\inf_{\bar{\tau}_h\in Y_h}\|\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_n)-\bar{\tau}_h)\|_X\right)+ \\
+C_6(t_n)\|\varepsilon_S^T(t_n)-(\varepsilon_S^T)_h(t_n)\|_X\,, \qquad (91)
\end{gathered}
$$

где $C_4(t_n)$, $C_5(t_n)$, $C_6(t_n)$ – коэффициенты,

$$
\begin{gathered}
C_4(t_n)=K_3^{m-n}K_1C_6; \qquad C_5(t_n)=K_3^{m-n}K_2C_6; \\
C_6(t_n)=K_3^{m-n}C_6, \qquad 1\leq n\leq m-1; \qquad (92)\\
C_4(t_m)=C_4; \qquad C_5(t_m)=C_5; \qquad C_6(t_m)=C_6.
\end{gathered}
$$

Неравенства (89), (91) позволяют установить сходимость смешанной аппроксимации применительно к задаче термопластичности, описывающей неизотермические процессы упругопластического деформирования с учетом начальных деформаций, зависящих от истории деформирования и нагрева. Согласно этим оценкам, точность решения конечномерной задачи (16) на начальных этапах нагружения должна быть достаточной, чтобы не допустить влияния роста первых коэффициентов в разложении суммарной погрешности (89) и (91) на точность решения упругопластической задачи на последующих этапах нагружения.

Применение численного интегрирования. Далее обозначение $[\cdot;\cdot]_X$ следует понимать так, что для вычисления скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$ применяется численное интегрирование. Ограничимся рассмотрением квадратурных (кубатурных) формул, для которых выполняются следующие соотношения:

$$
\begin{aligned}
&[\eta_h,\bar{\tau}_h]_X=(\eta_h,\bar{\tau}_h)_X\,, \quad \forall\eta_h\in X_h, \qquad \forall\bar{\tau}_h\in Y_h;\\
&[\bar{\eta}_h,\bar{\tau}_h]_X=(\bar{\eta}_h,\bar{\tau}_h)_X\,, \quad \forall\bar{\eta}_h,\bar{\tau}_h\in Y_h.
\end{aligned} \qquad (93)
$$

Кроме того, будем рассматривать только такие формулы, в которых точки взвешивания совпадают с узлами интерполяции [6]. Тогда справедливы равенства

$$
\begin{aligned}
&[\eta_I,\chi_h]_X=[\eta,\chi_h]_X\,, \quad \forall\eta\in X, \qquad \eta_I\in X_h, \qquad \forall\chi_h\in X_h;\\
&[\eta_I,\chi_I]_X=[\eta,\chi]_X\,, \quad \forall\eta,\chi\in X, \quad \eta_I,\chi_I\in X_h.
\end{aligned} \qquad (94)
$$

Отметим, что применение формул численного интегрирования, удовлетворяющих свойствам (93) и (94), существенно упрощает процедуру численного решения уравнений смешанного метода (16).

Полагаем, что билинейная форма $[\cdot;\cdot]_X$ на $X_h \times X_h$ индуцирует скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_X$ и норму $[\cdot]_X = [\cdot;\cdot]_X^{1/2}$, эквивалентную основной норме $||\cdot||_X$, причем

$$||\eta_h||_X \le [\eta_h]_X \le R||\eta_h||_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h, \tag{95}$$

где R – вещественная положительная постоянная, не зависящая от параметра h. Тогда X_h – гильбертово пространство, в котором скалярное произведение и норма задаются формой $[\cdot;\cdot]_X$.

По аналогии с уравнениями (16) определим дискретную задачу следующим образом. Найти тройку $(\underline{u}_h(t), \underline{\varepsilon}_h(t), \underline{\sigma}_h(t)) \in U_h \times X_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{cases} [\underline{\varepsilon}_h(t), \eta_h]_X = (B\underline{u}_h(t), \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\underline{\sigma}_h(t), \chi_h]_X = [\Phi(\underline{\varepsilon}_h(t), \xi_h(t), t), \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (\underline{\sigma}_h(t), Bv_h)_X = \langle \rho(t), v_h \rangle, & \forall v_h \in U_h. \end{cases} \tag{96}$$

Для формулировки условий устойчивости и сходимости решения дискретной задачи (96) введем в рассмотрение проектирующий оператор $\underline{I}_h$, который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его проекцию в X_h. Оператор $\underline{I}_h$: $Y_h \to X_h$, ассоциируемый со скалярным произведением $[\cdot;\cdot]_X$, определим из равенства

$$[\bar{\tau}_h - \underline{I}_h\bar{\tau}_h, \eta_h]_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{97}$$

Тогда элемент $\underline{I}_h\bar{\tau}_h$ – суть ортогональная проекция $\bar{\tau}_h \in Y_h$ на пространство X_h, в котором введено скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_X$, и, следовательно, для произвольного элемента $\bar{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$[\bar{\tau}_h - \underline{I}_h\bar{\tau}_h]_X = \inf_{\eta_h \in X_h} [\bar{\tau}_h - \eta_h]_X. \tag{98}$$

С помощью первой формулы (93) устанавливаем взаимосвязь между операторами $\underline{I}_h$ и I_h, которая в дальнейшем играет важную роль в анализе погрешности аппроксимации:

$$(\eta_h, I_h\bar{\tau}_h)_X = (\eta_h, \bar{\tau}_h)_X = [\eta_h, \underline{I}_h\bar{\tau}_h]_X, \quad \forall \eta_h \in X_h, \quad \forall \bar{\tau}_\eta \in Y_h. \tag{99}$$

С использованием ортопроектора $\underline{I}_h$: $Y_h \to X_h$ уравнения (96) запишем в эквивалентном виде

$$\begin{cases} [\underline{\varepsilon}_h(t), \eta_h]_X = [\underline{I}_h B\underline{u}_h(t), \eta_h]_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\underline{\sigma}_h(t), \chi_h]_X = [\Phi(\underline{\varepsilon}_h(t), \xi_h(t), t), \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ [\underline{\sigma}_h(t), \underline{I}_h Bv_h]_X = \langle \rho(t), v_h \rangle, & \forall v_h \in U_h, \end{cases} \tag{100}$$

откуда следует, что элемент $\underline{\varepsilon}_h(t)=\underline{I}_h B\underline{u}_h(t)$ – суть ортогональная проекция $B\underline{u}_h(t)\in Y_h$ на пространство X_h относительно скалярного произведения.

Систему уравнений (100) можно представить в форме одного нелинейного операторного уравнения относительно перемещений:

$$\underline{A}_h(\underline{u}_h(t), \xi_h(t), t)=\rho_h(t) \quad \text{в} \quad U_h^*, \quad \underline{u}_h(t)\in U_h, \tag{101}$$

где $\underline{A}_h$: $U_h \to U_h^*$ – нелинейный оператор, определяемый с помощью отображения

$$\underline{A}_h(\underline{u}_h(t), \xi_h(t), t)\colon v_h \in U_h \to [\underline{\sigma}_h(\underline{u}_h(t), \xi_h(t), t), \underline{\varepsilon}_h(v_h)]_X =$$

$$=[\Phi(\underline{I}_h B\underline{u}_h(t), \xi_h(t), t), \underline{I}_h Bv_h]_X = \left\langle \underline{A}_h(\underline{u}_h(t), \xi_h(t), t), v_h \right\rangle. \tag{102}$$

Условия устойчивости. Если выполняется условие устойчивости (22) и билинейная форма $[\cdot;\cdot]_X$ на $X_h \times X_h$ индуцирует скалярное произведение и норму $[\cdot]_X$, удовлетворяющую неравенствам (95), то дискретная задача, описываемая уравнениями (96), однозначно разрешима при любом h и всех $\rho(t)\in U^*$ и $\xi_h(t)\in X$.

Действительно, принимая в равенствах (99) элемент $\eta_h \in X_h$ в виде $\eta_h = I_h\overline{\tau}_\eta \in \mathrm{Im}(I_h)$, согласно неравенству Коши–Буняковского–Шварца и правому неравенству (94), для произвольного элемента $\overline{\tau}_h \in Y_h$ находим

$$||I_h\overline{\tau}_h||_X^2 = [I_h\overline{\tau}_h, \underline{I}_h\overline{\tau}_h]_X \le [I_h\overline{\tau}_h]_X [\underline{I}_h\overline{\tau}_h]_X \le R||I_h\overline{\tau}_h||_X [\underline{I}_h\overline{\tau}_h]_X, \tag{103}$$

откуда с учетом условия (22) получим

$$\frac{d}{R}||\overline{\tau}_h||_X \le [\underline{I}_h\overline{\tau}_h]_X, \qquad \forall\overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{104}$$

Тогда с использованием неравенств (10)–(12) и условия устойчивости (104) приходим к тому, что оператор $\underline{A}_h$: $U_h \to U_h^*$, определяемый соотношением (102), является сильномонотонным и липшиц-непрерывным, т.е. для любых v_h, $w_h \in U_h$ и ζ_h, $\chi_h \in X$ выполняются неравенства

$$\begin{cases} \left\langle \underline{A}_h(v_h, \xi_h) - \underline{A}_h(w_h, \zeta_h), v_h - w_h \right\rangle \ge m\dfrac{d^2}{R^2}||v_h - w_h||_U^2; \\ ||\underline{A}_h(v_h, \zeta_h) - \underline{A}_h(w_h, \zeta_h)||_{U^*} \le M||v_h - w_h||_U; \\ ||\underline{A}_h(v_h, \zeta_h) - \underline{A}_h(v_h, \chi_h)||_{U^*} \le M_1||\zeta_h - \chi_h||_X. \end{cases} \tag{105}$$

Следовательно, решение операторного уравнения (101) существует и единственно, а также непрерывно зависит от приложенных нагрузок

$\rho_h(t) \in U_h^*$ и начальных деформаций $\xi_h(t) \in X$. При этом справедливы априорные оценки

$$\begin{cases} \|\underline{u}_h(t)\|_U \le \dfrac{R^2}{md^2}(\|\rho(t)\|_{U^*} + M_1\|\xi_h(t)\|_X); \\ \|\underline{\varepsilon}_h(t)\|_X \le \dfrac{R}{md}(\|\rho(t)\|_{U^*} + M_1\|\xi_h(t)\|_X; \\ \|\underline{\sigma}_h(t)\|_X \le \dfrac{R^2 M}{md}\|\rho(t)\|_{U^*} + RM_1(1+\dfrac{M}{md})\|\xi_h(t)\|_X. \end{cases} \tag{106}$$

Транспозицию оператора $\underline{I}_h$ обозначим через $\underline{I}'_h$. Оператор $\underline{I}'_h$ отображает X_h на Y_h и определяется соотношением

$$(\underline{I}'_h \eta_h, \overline{\tau}_h)_X = [\eta_h, \underline{I}_h \overline{\tau}_h]_X, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{107}$$

Тогда для произвольного элемента $\eta_h \in X_h$ справедливо равенство

$$(\eta_h - \underline{I}'_h \eta_h, \overline{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h. \tag{108}$$

Таким образом, $\underline{I}'_h$: $X_h \to Y_h$ – проектирующий оператор и $\underline{I}'_h \eta_h$ – ортогональная проекция элемента $\eta_h \in X_h$ на пространство Y_h. Более того, согласно равенству (107) для всякого $\underline{\mu}_h \in [\mathrm{Im}(\underline{I}_h)]^{\perp}$ имеем

$$(\underline{I}'_h \underline{\mu}_h, \overline{\tau}_h)_X = [\underline{\mu}_h, \underline{I}_h \overline{\tau}_h]_X = 0, \qquad \forall \overline{\tau}_h \in Y_h, \tag{109}$$

откуда ввиду произвольности выбора $\overline{\tau}_h \in Y_h$ получаем $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$, где $\ker(\underline{I}'_h)$ – ядро оператора $\underline{I}'_h$, т.е. $\ker(\underline{I}'_h) = [\mathrm{Im}(\underline{I}_h)]^{\perp}$.

Итак, ортопроекторы $\underline{I}_h$: $Y_h \to X_h$ и $\underline{I}'_h$: $X_h \to Y_h$ порождают разложение пространства X_h, в котором введено скалярное произведение $[\cdot;\cdot]_X$, в прямую сумму подпространств $X_h = \mathrm{Im}(\underline{I}_h) \oplus \ker(\underline{I}'_h)$. Иначе говоря, любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть представлен в виде разложения $\eta_h = \underline{\pi}_h + \underline{\mu}_h$, где $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$, причем

$$[\underline{\mu}_h]_X = [\eta_h - \underline{\pi}_h]_X = \inf_{\tau_h \in Y_h} [\eta_h - \underline{I}_h \overline{\tau}_h]_X, \qquad \forall \eta_h \in X_h. \tag{110}$$

Поскольку оператор $\underline{I}_h$ удовлетворяет условию устойчивости (104), существует обратный линейный ограниченный оператор $\underline{I}_h^{-1}$, действующий из пространства $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ в Y_h, для которого справедлива оценка:

$$\|\underline{I}_h^{-1} \underline{\pi}_h\|_X \le \frac{R}{d}[\underline{\pi}_h]_X, \qquad \forall \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{111}$$

Сужение $\underline{I}'_h$ на $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ обозначим через $\tilde{\underline{I}}'_h$. Оператор $\tilde{\underline{I}}'_h$ отображает $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на пространство Y_h и устанавливает между элементами этих пространств взаимно однозначное соответствие. Определяя в равенстве (99) элемент $\bar{\tau}_h \in Y_h$ с помощью соотношения $\bar{\tau}_h = \underline{I}_h^{-1}\underline{\pi}_h \in Y_h$, в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца и оценкой (111) находим

$$\frac{d}{R}[\underline{\pi}_h]_X \le \|\tilde{\underline{I}}'_h \underline{\pi}_h\|_X, \qquad \forall \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{112}$$

Любой элемент $\eta_h \in X_h$ может быть представлен как

$$\begin{aligned} \eta_h &= \pi_h + \mu_h, \quad \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h), \quad \mu_h \in \ker(I'_h); \\ \eta_h &= \underline{\pi}_h + \underline{\mu}_h, \quad \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h), \quad \underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h). \end{aligned} \tag{113}$$

Тогда можно установить взаимосвязь между элементами $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$. Действительно, согласно соотношениям (99) и (113), для всякого $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ определяется из равенства

$$[\underline{\pi}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = (\pi_h, I_h \bar{\tau}_h)_X, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{114}$$

С использованием ортопроекторов $\tilde{I}'_h$ и $\tilde{\underline{I}}'_h$ приходим к операторному уравнению

$$\tilde{\underline{I}}'_h \underline{\pi}_h = \tilde{I}'_h \pi_h \quad \text{в} \quad Y_h, \tag{115}$$

откуда следует соотношение, с помощью которого определяется элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$:

$$\underline{\pi}_h = \underline{I}_h (\tilde{\underline{I}}'_h \underline{I}_h)^{-1} \tilde{I}'_h \pi_h, \qquad \forall \pi_h \in \mathrm{Im}(I_h). \tag{116}$$

На основании (115) получаем обратное отображение из пространства $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ в $\mathrm{Im}(I_h)$. Другими словами, для каждого $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ существует единственный элемент $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$, определяемый выражением

$$\pi_h = I_h (\tilde{I}'_h I_h)^{-1} \tilde{\underline{I}}'_h \underline{\pi}_h, \qquad \forall \underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h). \tag{117}$$

Соотношения (115)–(117) устанавливают взаимно однозначное соответствие между элементами пространств $\mathrm{Im}(I_h)$ и $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$. Покажем, что линейные биективные отображения $\mathrm{Im}(I_h) \to \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ и $\mathrm{Im}(\underline{I}_h) \to \mathrm{Im}(I_h)$ являются проектирующими операторами.

Действительно, согласно определению элемента $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ для произвольного $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ справедливо равенство

$$[\pi_h - \underline{\pi}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = 0, \qquad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h. \tag{118}$$

Исходя из этого элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ – суть ортогональная проекция $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ на пространство $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ относительно скалярного произведения $[\cdot;\cdot]_X$.

Очевидно, что справедливо и обратное утверждение. Согласно определению элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ имеем

$$(\underline{\pi}_h - \pi_h, I_h \bar{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall \tau_h \in Y_h. \tag{119}$$

Тогда элемент $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – суть ортогональная проекция $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на пространство $\mathrm{Im}(I_h)$ относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$.

Итак, по определению элемент $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ – суть ортогональная проекция $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ на $\mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, и их проекции на пространство Y_h совпадают. Кроме того, элемент $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ – ортогональная проекция $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$ на $\mathrm{Im}(I_h)$, и их проекции на пространство Y_h тождественно равны.

С использованием неравенств (95) получаем соотношения эквивалентности норм $[\cdot]_X$ и $||\cdot||_X$ для элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$:

$$||\pi_h||_X \le ||\underline{\pi}_h||_X \le [\underline{\pi}_h]_X \le [\pi_h]_X \le R||\pi_h||_X . \tag{120}$$

С учетом этих оценок приходим к неравенствам, которые справедливы для произвольных элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, взаимосвязанных между собой уравнением (115):

$$||\underline{\pi}_h - \pi_h||_X \le \frac{\sqrt{R^2-1}}{R}[\underline{\pi}_h]_X \le \sqrt{R^2-1}\,||\pi_h||_X . \tag{121}$$

Покажем теперь взаимосвязь между элементами $\underline{\mu}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$ и $\mu_h \in \ker(I'_h)$. На основании разложений (113) получим $\underline{\mu}_h = \mu_h + \pi_h - \underline{\pi}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$ и $\mu_h = \underline{\mu}_h + \underline{\pi}_h - \pi_h \in \ker(I'_h)$, где $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, причем

$$[\underline{\mu}_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = [\mu_h, \underline{I}_h \bar{\tau}_h]_X = (\underline{\mu}_h, I_h \bar{\tau}_h)_X = (\mu_h, I_h \bar{\tau}_h)_X = 0, \qquad \forall \tau_h \in Y_h. \tag{122}$$

Тогда для произвольного элемента $\eta_h \in X_h$ можно записать

$$[\underline{\mu}_h]_X^2 = (\mu_h, \underline{\mu}_h)_X + [\eta_h, \underline{\mu}_h]_X - (\eta_h, \underline{\mu}_h)_X , \tag{123}$$

откуда следует неравенство

$$[\underline{\mu}_h]_X \le ||\mu_h||_X + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\eta_h, \chi_h]_X - (\eta_h, \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}. \tag{124}$$

Заметим, что второе слагаемое в правой части (124) является ошибкой согласования билинейных форм $[\cdot;\cdot]_X$ и $(\cdot;\cdot)_X$, обусловленной погрешностью формул численного интегрирования (93) при вычислении скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_X$ на элементах из пространства X_h.

Теорема сходимости при численном интегрировании. Если выполняется условие устойчивости (22) и формулы численного интегрирования (93) удовлетворяют неравенствам (95), то существуют такие не зависящие от h постоянные C_1, C_2, ..., C_{14}, что

$$||\varepsilon(t)-\underline{\varepsilon}_h(t)||_X \le C_1 \inf_{\chi_h \in X_h} ||\sigma(t)-\chi_h||_X +$$

$$+C_2\left(\inf_{\eta_h \in X_h} ||\varepsilon(t)-\eta_h||_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t)-\bar{\tau}_h)||_X\right)+$$

$$+C_3||\xi(t)-\xi_h(t)|| + \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\theta_h \varepsilon(t), \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon(t), \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}; \qquad (125)$$

$$||\sigma(t)-\underline{\sigma}_h(t)||_X \le ||\sigma(t)-\sigma_I(t)||_X + C_4||\varepsilon(t)-\varepsilon_I(t)||_X +$$

$$+C_5||\xi(t)-\xi_I(t)||_X + C_6 \inf_{\chi_h \in X_h} ||\sigma(t)-\chi_h||_X +$$

$$+C_7\left(\inf_{\eta_h \in X_h} ||\varepsilon(t)-\eta_h||_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t)-\bar{\tau}_h)||_X\right)+$$

$$+C_8||\xi(t)-\xi_h(t)||_X + C_4 \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\theta_h \varepsilon(t), \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon(t), \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}; \qquad (126)$$

$$||\varepsilon(t)-B\underline{u}_h(t)||_X \le C_9 \inf_{\chi_h \in X_h} ||\sigma(t)-\chi_h||_X + C_{10} \inf_{\eta_h \in X_h} ||\varepsilon(t)-\eta_h||_X +$$

$$+C_{11} \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t)-\bar{\tau}_h)||_X + C_{12} \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} ||\varepsilon(t)-\bar{\tau}_h||_X +$$

$$+C_{13}||\xi(t)-\xi_h(t)||_X + C_{14} \sup_{\chi_\eta \in X_h} \frac{|[\theta_h \varepsilon(t), \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon(t), \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}, \qquad (127)$$

причем

$$C_1 = \frac{R\sqrt{1-d^2}}{md}; \qquad C_2 = \sqrt{\frac{R^2(M^2-m^2)+m^2}{m}}; \qquad C_3 = \frac{RM_1}{m}; \qquad (128a)$$

$$C_4 = RM; \quad C_5 = RM_1; \quad C_6 = \frac{R^2 M\sqrt{1-d^2}}{md};$$
$$C_7 = \frac{RM\sqrt{R^2(M^2-m^2)+m^2}}{m}; \quad C_8 = \frac{RM_1}{m}(RM+m);$$
$$C_9 = \frac{R^2\sqrt{1-d^2}}{md^2}; \quad C_{10} = \frac{R^2}{d}\sqrt{\frac{M-m}{m}}; \tag{128б}$$
$$C_{11} = \frac{R^2}{d}\sqrt{\frac{M-m}{m}} + \frac{\sqrt{R^2-1}}{d}; \quad C_{12} = \frac{1}{d}; \quad C_{13} = \frac{R^2 M_1}{md}; \quad C_{14} = \frac{R}{d}.$$

◄ Пусть $\theta_h\varepsilon = \underline{\varphi}_h + \underline{\psi}_h \in X_h$, где $\underline{\varphi}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$; $\underline{\psi}_h \in \ker(\underline{I}'_h)$. Кроме того, $\theta_h\varepsilon = \varphi_h + \psi_h \in X_h$, где $\varphi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$; $\psi_h \in \ker(I'_h)$. С учетом ортогонального разложения $\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h = \varepsilon - \theta_h\varepsilon + \underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h$ имеем

$$||\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h||_X^2 = ||\varepsilon - \theta_h\varepsilon||_X^2 + ||\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h||_X^2 . \tag{129}$$

При использовании левого неравенства (95) получаем

$$||\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h||_X \le [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h + \underline{\psi}_h]_X . \tag{130}$$

Равенство (129) и оценка (130) приводят к неравенству

$$||\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h||_X^2 \le ||\varepsilon - \theta_h\varepsilon||_X^2 + [\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h]_X^2 + [\underline{\psi}_h]_X^2 . \tag{131}$$

Поскольку $\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, с учетом неравенств (120) имеем

$$[\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h]_X \le [\varphi_h - \varepsilon_h]_X \le R||\varphi_h - \varepsilon_h||_X . \tag{132}$$

На основании неравенств (66) и (132) справедлива оценка

$$[\underline{\varphi}_h - \underline{\varepsilon}_h]_X \le \frac{R\sqrt{1-d^2}}{md}||\sigma - \theta_h\sigma||_X +$$
$$+ R\sqrt{\frac{M-m}{m}}||\varepsilon - \varphi_h||_X + \frac{RM_1}{m}||\xi - \xi_h||_X . \tag{133}$$

Таким образом, приходим к неравенству

$$||\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h||_X \le \frac{R\sqrt{1-d^2}}{md}||\sigma - \theta_h\sigma||_X + \frac{\sqrt{R^2(M^2-m^2)+m^2}}{m}||\varepsilon - \varphi_h||_X +$$

$$+\frac{RM_1}{m}||\xi-\xi_h||_X+\sup_{\chi_h\in X_h}\frac{|[\theta_h\varepsilon,\chi_h]_X-(\theta_h\varepsilon,\chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}, \qquad (134)$$

откуда с учетом свойств ортогональных проекций (35) и (39) получаем оценку (125).

Для доказательства оценки (126) используем неравенство треугольника

$$||\sigma-\underline{\sigma}_h||_X\le||\sigma-\sigma_I||_X+||\sigma_I-\underline{\sigma}_h||_X. \qquad (135)$$

Оценим второе слагаемое в правой части (135) с помощью равенства, которое выполняется для любого элемента $\eta_h\in X_h$:

$$[\sigma_I-\underline{\sigma}_h,\eta_h]_X=[\Phi(\varepsilon,\xi)-\Phi(\underline{\varepsilon}_h,\xi_h),\eta_h]_X. \qquad (136)$$

Если в (136) положить $\eta_h=\sigma_I-\underline{\sigma}_h\in X_h$, то в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца имеем

$$[\sigma_I-\underline{\sigma}_h]_X\le[\Phi(\varepsilon,\xi)-\Phi(\underline{\varepsilon}_h,\xi_h)]_X. \qquad (137)$$

Оценим правую часть (137) с помощью неравенства треугольника

$$[\Phi(\varepsilon,\xi)-\Phi(\underline{\varepsilon}_h,\xi_h)]_X\le[\Phi(\varepsilon,\xi_h)-\Phi(\varepsilon_h,\xi_h)]_X+$$
$$+[\Phi(\varepsilon,\xi)-\Phi(\varepsilon,\xi_h)]_X. \qquad (138)$$

Тогда с использованием формулы конечных приращений и неравенств (11), (12) получим

$$[\Phi(\varepsilon,\xi)-\Phi(\underline{\varepsilon}_h,\xi_h)]_X\le\sup_{\eta\in X}[\Phi'_\varepsilon(\eta,\xi_h)]_X[\varepsilon_I-\underline{\varepsilon}_h]_X+$$
$$+\sup_{\zeta\in X}[\Phi'_\xi(\varepsilon,\zeta)]_X[\xi_I-\xi_h]_X\le M[\varepsilon_I-\underline{\varepsilon}_h]_X+M_1[\xi_I-\xi_h]_X. \qquad (139)$$

С учетом неравенств (95), (137)–(139) находим

$$||\sigma_I-\underline{\sigma}_h||_X\le R(M||\varepsilon_I-\underline{\varepsilon}_h||_X+M_1||\xi_I-\xi_h||_X). \qquad (140)$$

Кроме того, согласно неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned}&||\varepsilon_I-\underline{\varepsilon}_h||_X\le||\varepsilon_I-\varepsilon||_X+||\varepsilon-\underline{\varepsilon}_h||_X;\\&||\xi_I-\xi_h||_X\le||\xi_I-\xi||_X+||\xi-\xi_h||_X\end{aligned} \qquad (141)$$

и, значит, неравенство (140) принимает вид

$$||\sigma_I - \underline{\sigma}_h||_X \le R(M||\varepsilon_I - \varepsilon||_X + M_1||\xi_I - \xi||_X +$$

$$+ M||\varepsilon - \underline{\varepsilon}_h||_X + M_1||\xi - \xi_h||_X). \tag{142}$$

На основании (134), (135) и (142) приходим к неравенству

$$||\sigma - \underline{\sigma}_h||_X \le ||\sigma - \sigma_I||_X + RM||\varepsilon - \varepsilon_I||_X + RM_1||\xi - \xi_I||_X +$$

$$+ \frac{R^2 M\sqrt{1-d^2}}{md}||\sigma - \theta_h\sigma||_X + \frac{RM\sqrt{R^2(M^2 - m^2) + m^2}}{m}||\varepsilon - \varphi_h||_X +$$

$$+ \frac{RM_1}{m}(RM + m)||\xi - \xi_h||_X + RM \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\theta_h\varepsilon, \chi_h]_X - (\theta_h\varepsilon, \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}, \tag{143}$$

откуда с учетом свойств ортогональных проекций (35) и (39) получаем оценку (126).

Для доказательства оценки (127) используем неравенство треугольника и оценки (104), (132). Тогда получим

$$||\varepsilon - B\underline{u}_h||_X \le ||\varepsilon - I_h^{-1}\varphi_h||_X +$$

$$+ ||I_h^{-1}\varphi_h - \underline{I}_h^{-1}\underline{\varphi}_h||_X + \frac{R^2}{d}||\varphi_h - \varepsilon_h||_X. \tag{144}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (144) с помощью равенства, которое справедливо для произвольных элементов $\pi_h \in \mathrm{Im}(I_h)$ и $\underline{\pi}_h \in \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, взаимосвязанных между собой уравнением (115):

$$(I_h^{-1}\varphi_h - \underline{I}_h^{-1}\underline{\varphi}_h, \underline{\pi}_h)_X =$$

$$= (\psi_h, \pi_h - \underline{\pi}_h)_X + (\theta_h\varepsilon, \underline{\pi}_h)_X - [\theta_h\varepsilon, \underline{\pi}_h]_X. \tag{145}$$

Если в (145) положить $\underline{\pi}_h = \underline{I}_h(I_h^{-1}\varphi_h - \underline{I}_h^{-1}\underline{\varphi}_h) \in \mathrm{Im}(\underline{I}_h)$, то на основании неравенства Коши–Буняковского–Шварца, условия устойчивости (104) и оценок (120), (121) получим

$$||I_h^{-1}\varphi_h - \underline{I}_h^{-1}\underline{\varphi}_h||_X \le \frac{\sqrt{R^2 - 1}}{d}||\psi_h||_X +$$

$$+ \frac{R}{d} \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\theta_h\varepsilon, \chi_h]_X - (\theta_h\varepsilon, \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}. \tag{146}$$

С учетом оценок (45), (66) и (146) неравенство (144) принимает вид

$$||\varepsilon - B\underline{u}_h||_X \le \frac{R^2\sqrt{1-d^2}}{md^2}||\sigma - \theta_h\sigma||_X + \frac{1}{d}||\varepsilon - BP_h u||_X +$$

$$+\frac{R^2}{d}\sqrt{\frac{M-m}{m}}||\varepsilon - \varphi_h||_X + \frac{\sqrt{R^2-1}}{d}||\psi_h||_X +$$

$$+\frac{R^2 M_1}{md}||\xi - \xi_h||_X + \frac{R}{d}\sup_{\chi_h\in X_h}\frac{|[\theta_h\varepsilon, \chi_h]_X - (\theta_h\varepsilon, \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}. \qquad (147)$$

Таким образом, имеем оценку (127) как следствие неравенства (147) и свойств ортогональных проекций (35), (39), (41). ▶

Замечание 11. Оценим погрешность $\xi(t_m) - \xi_h(t_m)$, где элемент $\xi_h(t_m)$ определяется выражением

$$\xi_h(t_m) = (\varepsilon_S^T)_h(t_m) + P((\underline{\varepsilon}_h)_D(t_{m-1}), (\xi_h)_D(t_{m-1})). \qquad (148)$$

По аналогии с (76)–(85) имеем

$$||\xi(t_m) - \xi_h(t_m)||_X \le ||\varepsilon_S^T(t_m) - (\varepsilon_S^T)_h(t_m)||_X +$$

$$+(1-\gamma)||\varepsilon(t_{m-1}) - \underline{\varepsilon}_h(t_{m-1})||_X + ||\xi(t_{m-1}) - \xi_h(t_{m-1})||_X. \qquad (149)$$

Если для оценки второго слагаемого в правой части (149) использовать неравенство (125), то получим

$$||\xi(t_m) - \xi_h(t_m)||_X \le ||\varepsilon_S^T(t_m) - (\varepsilon_S^T)_h(t_m)||_x +$$

$$+K_1\inf_{\chi_h\in X_h}||\sigma(t_{m-1}) - \chi_h||_X + K_2\Bigg(\inf_{\eta_h\in X_h}||\varepsilon(t_{m-1}) - \eta_h||_X +$$

$$+\inf_{\overline{\tau}_h\in Y_h}||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_{m-1}) - \overline{\tau}_h)||_X\Bigg) + K_3||\xi(t_{m-1}) - \xi_h(t_{m-1})||_X +$$

$$+K_4\sup_{\chi_h\in X_h}\frac{|[\theta_h\varepsilon(t_{m-1}), \chi_h]_X - (\theta_h\varepsilon(t_{m-1}), \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X}, \qquad (150)$$

где K_1, K_2, K_3, K_4 – положительные постоянные,

$$K_1 = C_1(1-\gamma); \qquad K_2 = C_2(1-\gamma);$$
$$K_3 = 1 + C_3(1-\gamma) \le 1 + \frac{RM}{m} - R; \qquad K_4 = 1-\gamma. \qquad (151)$$

Если в формуле (150) каждое $\xi(t_{m-1}) - \xi_h(t_{m-1})$ выразить через предыдущее, то получим неравенство

$$||\xi(t_m) - \xi_h(t_m)||_X \le \sum_{n=1}^{m} K_3^{m-n} ||\varepsilon_S^T(t_n) - (\varepsilon_S^T)_h(t_n)||_X +$$

$$+ \sum_{n=1}^{m-1} K_3^{m-n} \left(K_1 \inf_{\chi_h \in X_h} ||\sigma(t_n) - \chi_h||_X + \right.$$

$$+ K_2 \left(\inf_{\eta_h \in X_h} ||\varepsilon(t_n) - \eta_h||_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_n) - \bar{\tau}_h)||_X \right) +$$

$$\left. + K_4 \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\theta_h \varepsilon(t_n), \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon(t_n), \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X} \right). \qquad (152)$$

На основании (125), (126) и (152) приходим к оценке суммарной погрешности для деформаций и напряжений в конце этапа нагружения:

$$||\varepsilon(t_m) - \underline{\varepsilon}_h(t_m)||_X \le \sum_{n=1}^{m} C_1(t_n) \inf_{\chi_h \in X_h} ||\sigma(t_n) - \chi_h||_X +$$

$$+ C_2(t_n) \left(\inf_{\eta_h \in X_h} ||\varepsilon(t_n) - \eta_h||_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_n) - \bar{\tau}_h)||_X \right) +$$

$$+ C_3(t_n) \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\theta_h \varepsilon(t_n), \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon(t_n), \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X} +$$

$$+ C_4(t_n) ||\varepsilon_S^T(t_n) - (\varepsilon_S^T)_h(t_n)||_X ; \qquad (153)$$

$$||\sigma(t_m) - \underline{\sigma}_h(t_m)||_X \le ||\sigma(t_m) - \sigma_I(t_m)||_X + C_4 ||\varepsilon(t_m) - \varepsilon_I(t_m)||_X +$$

$$+ C_5 ||\xi(t_m) - \xi_I(t_m)||_X + \sum_{n=1}^{m} C_5(t_n) \inf_{\chi_h \in X_h} ||\sigma(t_n) - \chi_h||_X +$$

$$+ C_6(t_n) \left(\inf_{\eta_h \in X_h} ||\varepsilon(t_n) - \eta_h||_X + \inf_{\bar{\tau}_h \in Y_h} ||\widetilde{\theta}_h(\varepsilon(t_n) - \bar{\tau}_h)||_X \right) +$$

$$+ C_7(t_n) \sup_{\chi_h \in X_h} \frac{|[\theta_h \varepsilon(t_n), \chi_h]_X - (\theta_h \varepsilon(t_n), \chi_h)_X|}{[\chi_h]_X} +$$

$$+C_8(t_n)\|\varepsilon_S^T(t_n)-(\varepsilon_S^T)_h(t_n)\|_X\ , \tag{154}$$

где $C_1(t_n)$, ..., $C_8(t_n)$ – положительные коэффициенты,

$$\begin{gathered}
C_1(t_n)=K_3^{m-n}K_1C_3;\quad C_2(t_n)=K_3^{m-n}K_2C_3;\quad C_3(t_n)=K_3^{m-n}K_4C_3;\\
C_4(t_n)=K_3^{m-n}C_3;\quad C_5(t_n)=K_3^{m-n}K_1C_8;\quad C_6(t_n)=K_3^{m-n}K_2C_8;\\
C_7(t_n)=K_3^{m-n}K_4C_8;\quad C_8(t_n)=K_3^{m-n}C_8,\quad 1\le n\le m-1;\\
C_1(t_m)=C_1;\quad C_2(t_m)=C_2;\quad C_3(t_m)=1;\quad C_4(t_m)=C_3;\\
C_5(t_m)=C_6;\quad C_6(t_m)=C_7;\quad C_7(t_m)=C_4;\quad C_8(t_m)=C_8.
\end{gathered} \tag{155}$$

Таким образом, неравенства (153), (154) позволяют установить сходимость смешанной аппроксимации с учетом применения формул численного интегрирования (93)–(95) при решении краевой задачи, описывающей неизотермические процессы упругопластического деформирования с учетом начальных деформаций, зависящих от истории деформирования и нагрева. Согласно этим оценкам, точность решения конечномерной задачи (96) на начальных этапах нагружения должна быть достаточной, чтобы не допустить влияния роста первых коэффициентов в разложении суммарной погрешности (153) и (154) на точность решения упругопластической задачи на последующих этапах нагружения.

Резюме

Сформульовано змішану проекційно-сіткову схему розв’язання крайової задачі термопластичності в квазістатичній постановці, коли процес неізотермічного пружно-пластичного деформування тіла є послідовність рівноважних станів. У цьому випадку напружено-деформований стан залежить від історії навантаження, і процес непружного деформування повинен прослідковуватися на усьому розглядуваному інтервалі часу. Досліджено коректність і збіжність змішаних апроксимацій для напружень, деформацій і переміщень стосовно розв’язання нелінійних крайових задач, що описують неізотермічні процеси активного навантаження з урахуванням початкових деформацій, залежних від історії деформування і нагрівання. Вивчено властивості проектуючих операторів і на цій основі сформульовано умову, яка забезпечує існування, єдиність і стійкість розв’язання дискретної задачі. Представлено результати аналізу спеціальних формул чисельного інтегрування інтерполяційного типу, завдяки використанню яких суттєво спрощується обчислювальна процедура розв’язання рівнянь змішаного методу. Оцінки збіжності і точності базуються на результатах теорії узагальнених крайових задач та методах функціонального аналізу. Згідно з отриманими оцінками точність розв’язування скінченновимірної задачі для початкових станів навантаження повинна бути достатньою, щоб не допустити впливу зростання перших коефіцієнтів у розкладанні сумарної похибки на точність розв’язання пружно-пластичної задачі на наступних етапах навантаження.

1. *Уманский С. Э.* Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Пробл. прочности. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
2. *Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.* The Finite Element Method. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi: Butterworth-Heinemann, 2000. – 1482 p.
3. *Чирков А. Ю.* Анализ краевых задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования с учетом истории нагружения // Пробл. прочности. – 2006. – № 1. – С. 69 – 99.
4. *Шевченко Ю. Н.* Термопластичность при переменных нагружениях. – Киев: Наук. думка, 1970. – 288 с.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 542 с.
6. *Мысовских И. П.* Интерполяционные кубатурные формулы. – М.: Наука, 1981. – 336 с.

Поступила 26. 12. 2005