

## **Сравнительный анализ нелинейных резонансов механической системы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы**

**А. П. Бовсуновский**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Представлены результаты численного сравнительного анализа супергармонических резонансов порядка  $2/1...5/1$  и субгармонического резонанса порядка  $1/2$  механической колебательной системы с одной степенью свободы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы при различных соотношениях жесткости системы на полуциклах и в условиях существенного изменения уровня демпфирования колебаний в системе.*

**Ключевые слова:** закрывающаяся трещина, суб- и супергармонический резонансы, спектр колебаний, диагностические признаки повреждения.

**Введение.** При циклическом деформировании упругого тела трещина усталости имеет свойство открываться на полуцикле растяжения и закрываться на полуцикле сжатия (закрывающаяся трещина). В моменты закрытия и открытия трещины происходит внезапное изменение жесткости тела, что обуславливает существенную нелинейность его динамического поведения и, как следствие, проявление так называемых нелинейных эффектов, к числу которых относятся суб- и супергармонические (нелинейные) резонансы, а также нелинейность вибрационного отклика механической системы (перемещения, скорости, ускорения, деформации и т.п.) при резонансных режимах колебаний.

Периодическое изменение жесткости механической системы приводит к ряду трудностей, возникающих при аналитическом решении задачи о ее вынужденных колебаниях. Приближенные аналитические решения [1–7] ограничиваются упрощающими предположениями о свойствах колебательной системы и рассматривают один или два нелинейных резонанса, что не позволяет выполнить сравнительный анализ супер- и субгармонических резонансов различного порядка. Порядок нелинейного резонанса определяется номером супер- или субгармоники в спектре колебаний, амплитуда которой монотонно увеличивается по мере приближения ее частоты к собственной частоте колебательной системы и достигает максимума при совпадении этих частот. Внешнее подобие явления с резонансом определило его название – нелинейный резонанс.

Так, в работах [5–9] рассматривается супергармонический резонанс второго порядка, в [10, 11] – субгармонический резонанс порядка  $f_T/p = 1/2$  ( $f_T$  – собственная частота колебаний тела с трещиной;  $p$  – частота вынуждающей силы). Поскольку суперрезонансные колебания второго и третьего порядка системы с одной степенью свободы исследованы в [1, 2] без учета демпфирования, не представляется возможным сопоставить амплитуды этих нелинейных резонансов.

В работах [12–14] процесс открытия-закрытия трещины определялся частотой вынуждающей силы. Такая модель неверно описывает поведение колебательной системы в случаях сильных супергармонических резонансов, когда амплитуды высших гармоник достигают величин, при которых система изменяет свою жесткость более чем один раз за период колебаний [15]. Учет этого явления представляет собой одну из фундаментальных трудностей аналитического исследования супергармонических резонансов.

Численные решения задачи о вынужденных колебаниях стержня с закрывающейся трещиной под действием гармонической сосредоточенной силы, полученные с помощью электрического аналогового моделирования [16–20] или на основе конечноэлементного моделирования [15, 21–23], показали, что его колебания характеризуются наличием супергармонического резонанса второго порядка, амплитуда которого на порядок ниже амплитуды основного резонанса. Установлено также, что при супергармоническом резонансе имеет место существенная нелинейность колебательного процесса, характеризующаяся наличием значительной амплитуды второй гармоники в спектре колебаний. Кроме того, в [16, 17] обнаружены суперрезонансы порядка  $f_T/p = 3/1$  и  $4/1$  и субрезонанс порядка  $f_T/p = 1/2$  и, в частности, показано, что супергармонический резонанс второго порядка возникает при значительно меньших значениях глубины трещины, чем субгармонический. При этом в указанных работах не учитывалась возможность изменения уровня демпфирования в системе в результате появления трещины [24]. В то же время подавляющее влияние демпфирования на проявление нелинейных эффектов отмечалось, например, в [5, 25, 26]. Следовательно, при исследовании взаимосвязи между параметрами повреждения и параметрами нелинейных эффектов необходимо учитывать изменение уровня демпфирования в системе вследствие возникновения и роста трещины.

Цель работы заключалась в численном исследовании и сравнительном анализе особенностей проявления нелинейных резонансов колебательной системы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы при разных уровнях демпфирования в системе и чувствительности нелинейных эффектов при нелинейных резонансах различных порядков к наличию в механической системе повреждения типа закрывающейся трещины.

**Модель тела с трещиной.** Используется относительно простая и наглядная модель упругого тела с закрывающейся трещиной в виде механической колебательной системы с одной степенью свободы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы (рис. 1) и линейным вязким трением. В ряде случаев такая модель позволяет с достаточной для инженерной практики точностью описывать динамическое поведение сложных конструкций [27].

Вынужденные колебания указанной системы описываются дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha_m \frac{dx}{dt} + \frac{\omega^2}{C} R(x) = q_0 \sin pt. \quad (1)$$

Здесь  $\alpha_m$  – коэффициент вязкого трения;  $\omega$  – собственная угловая частота колебаний тела без повреждения;  $q_0$  – амплитуда вынуждающей силы, приходящаяся на единицу обобщенной массы;  $C$  – обобщенная жесткость системы, моделирующей тело массой  $m$  без трещины или на полуцикле колебаний, когда трещина закрыта;  $R(x)$  – восстанавливающая сила, уравнения которой имеют вид:

$$R(x) = \begin{cases} C_0 x, & x \geq 0; \\ Cx, & x < 0, \end{cases} \quad (2)$$

где  $C_0$  – жесткость системы на полуцикле колебаний, когда трещина открыта. С учетом обозначений, принятых на рис. 1, имеем  $C = C_0 + C_1$ .

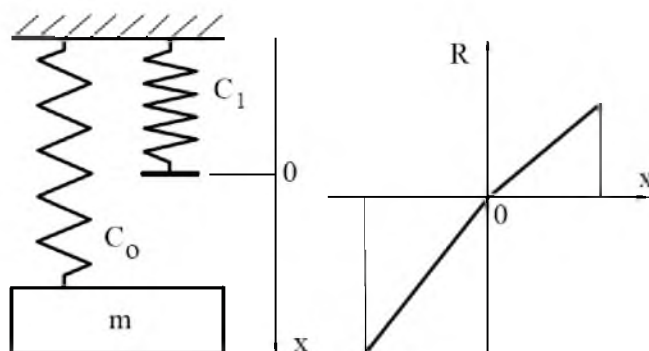


Рис. 1. Модель тела с трещиной.

Точное аналитическое решение уравнения (1) можно получить для случая свободных колебаний рассматриваемой системы без учета демпфирования [28] или с учетом линейного вязкого трения [29]. Для случая вынужденных колебаний системы с учетом демпфирования получены приближенные аналитические решения [3, 4, 7], ограниченные рядом упрощающих предположений о свойствах колебательной системы.

В настоящей работе уравнение (1) решалось численно методом Ньюмарка [30], который не накладывает ограничений на уровень нелинейности колебательной системы и позволяет получать решения с высокой точностью [31].

Основной проблемой адекватного моделирования тела с трещиной является обоснованный выбор соотношения жесткостей колебательной системы  $C_0/C$ . Ниже такой выбор осуществлен на основании экспериментальных данных об изменении резонансной частоты продольных колебаний образца из стали с массивным грузом на конце при различной глубине краевой трещины усталости [31]. Соотношение жесткостей колебательной системы при соответствующих значениях относительной глубины трещины  $\gamma = a/h$  ( $a$  – глубина трещины,  $h$  – высота поперечного сечения образца) представлено в табл. 1.

Спектральный анализ колебаний исследуемой системы проводили с помощью ряда Фурье вида

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\omega_T t + \varphi_k), \quad (3)$$

где  $A_k = \sqrt{a_k^2 + b_k^2}$ ;  $\varphi_k = \arctg(a_k/b_k)$ ;  $\omega_T$  – собственная угловая частота колебаний тела с трещиной.

Т а б л и ц а 1

Соотношение амплитуд основного и нелинейных резонансов

$C_0/C$	$\gamma = a/h$	$S_{1/1}/S_{1/2}$	$S_{1/1}/S_{2/1}$	$S_{1/1}/S_{3/1}$	$S_{1/1}/S_{4/1}$	$S_{1/1}/S_{5/1}$
0,998	0,0122	–	<u>421,5</u>	–	<u>574,7</u>	–
		–	–	–	–	–
0,991	0,0500	<u>637,7</u>	<u>280,2</u>	<u>550,8</u>	<u>494,1</u>	<u>595,2</u>
		–	45,5	–	58,2	–
0,983	0,1000	<u>381,1</u>	<u>233,1</u>	<u>548,2</u>	<u>445,5</u>	<u>594,4</u>
		–	43,0	–	57,5	–
0,965	0,2000	<u>194,0</u>	<u>179,6</u>	<u>525,3</u>	<u>412,0</u>	<u>581,0</u>
		–	36,5	54,9	55,4	–
0,913	0,4000	<u>77,3</u>	<u>124,0</u>	<u>380,1</u>	<u>387,9</u>	<u>504,3</u>
		62,9	27,7	52,9	48,7	57,7
0,723	0,6000	<u>21,9</u>	<u>70,0</u>	<u>277,8</u>	<u>361,4</u>	<u>314,7</u>
		21,2	17,7	34,4	39,0	46,1

**Примечание.** Над чертой приведены значения, соответствующие  $\delta_\alpha = 0,5\%$ , под чертой –  $\delta_\alpha = 5,0\%$ .

**Результаты расчетов.** Амплитудно-частотные характеристики (АЧХ) рассматриваемой колебательной системы получены в широком диапазоне частот при уровне демпфирования, который соответствовал значению логарифмического декремента колебаний системы  $\delta_\alpha = 0,5\%$ . Коэффициент динамичности  $\beta$  определяли как отношение амплитуды установившихся вынужденных колебаний поврежденной системы к статическому отклонению неповрежденной системы.

На рис. 2 в качестве примера приведены АЧХ при двух значениях отношения жесткостей. Как видно, при значительном изменении жесткости системы ( $C_0/C = 0,913$ ) имеют место сильные суперрезонансы второго–пятого порядка и субрезонанс порядка  $f_T/p = 1/2$  (рис. 2,а). При этом амплитуды суб- и суперрезонанса второго порядка превышают амплитуды суперрезонансов третьего–пятого порядка более чем в 3,1...4,8 раза. Обращает на себя внимание необычная форма АЧХ нелинейных резонансов нечетных порядков, а также то, что эти резонансные режимы практически не проявляются при малом относительном изменении жесткости (рис. 2,б), которая соответствует трещине площадью 5% поперечного сечения. Изменение амплитуды субрезонанса порядка  $f_T/p = 1/2$  и суперрезонансов второго и четвертого порядка по отношению к амплитуде колебаний неповрежденной системы является все еще значимым и составляет соответственно 2,9, 1,7 и 1,4 раза.

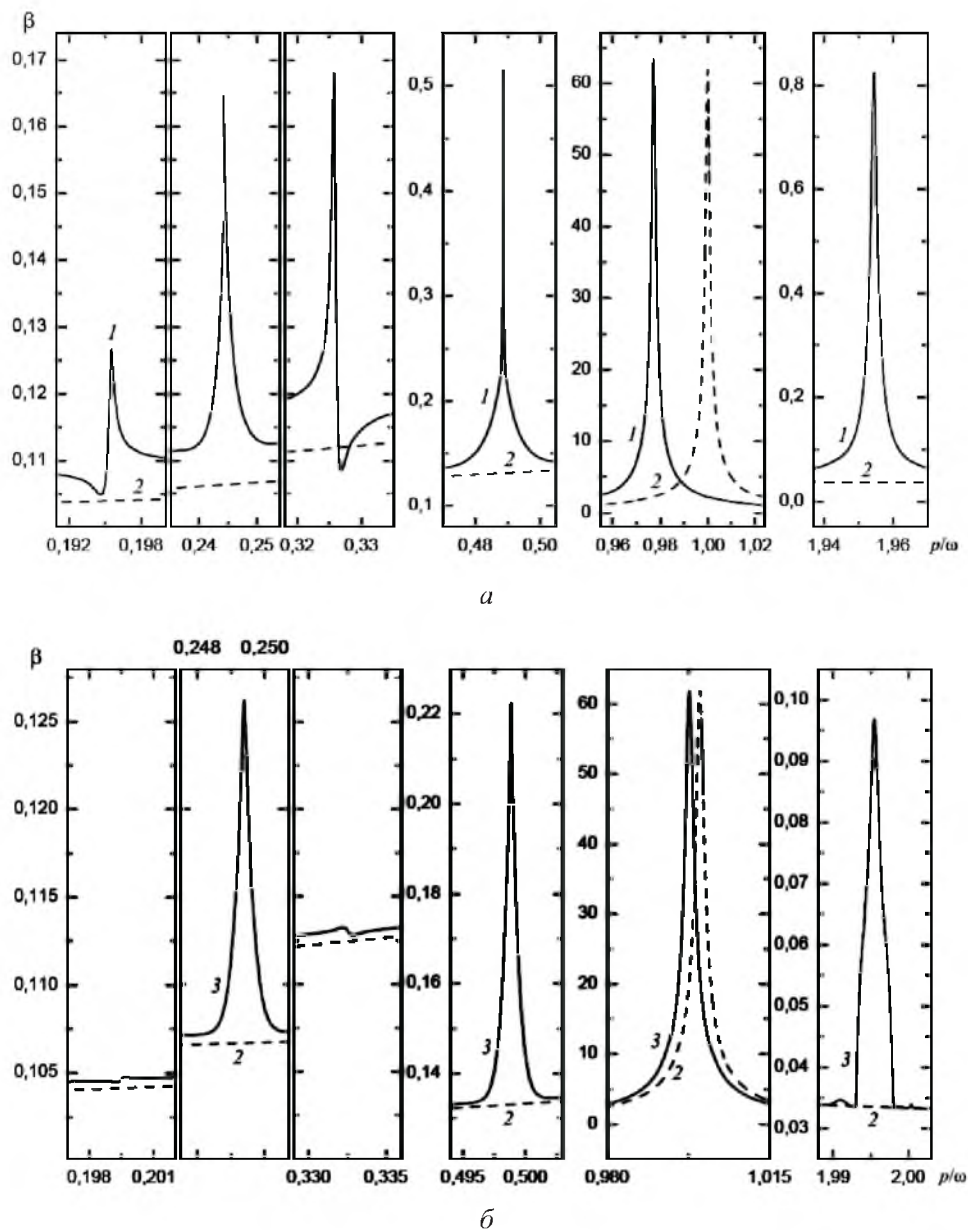


Рис. 2. Амплитудно-частотные характеристики поврежденной (сплошные линии) и неповрежденной (штриховые линии) колебательных систем: 1 –  $C_0/C = 0,913$ ,  $\gamma = 0,4$ ,  $\delta_\alpha = 0,5\%$ ; 2 –  $C_0/C = 1,0$ ,  $\gamma = 0$ ,  $\delta_\alpha = 0,5\%$ ; 3 –  $C_0/C = 0,991$ ,  $\gamma = 0,05$ ,  $\delta_\alpha = 0,5\%$ .

При всех рассматриваемых уровнях повреждения колебательной системы амплитуды колебаний при нелинейных резонансах на один-два порядка меньше амплитуды колебаний при основном резонансе (табл. 1). Различие между амплитудами уменьшается по мере увеличения степени повреждения и уровня демпфирования колебаний в системе, однако остается значительным (заметим, что демпфирование слабо влияет на соотношения амплитуд колебаний при основном и субгармоническом резонансе). Абсолютная вели-

чина амплитуды колебаний при нелинейных резонансах небольшая, и надежное обнаружение нелинейного резонанса по ее изменению может оказаться проблематичным. Поэтому изменение амплитуды колебаний в окрестности нелинейных резонансов является малоприменимым для диагностики повреждения.

Возможность возбуждения точных резонансов и, следовательно, практического использования нелинейных эффектов в качестве диагностических признаков повреждения зависит от ширины резонансных кривых. Как известно, в случае острого резонанса для точного определения параметров резонансной кривой необходима высокая дискретность изменения частоты вынуждающей силы.

Резонансные кривые такого же вида, что и на рис. 2, получены для значений отношения жесткости системы, представленных в табл. 1. Ширина резонансных кривых определялась непосредственно по АЧХ при амплитуде, равной половине амплитуды основного резонанса ( $\Delta_{1/1}$ ), субрезонанса порядка  $f_T/p = 1/2$  ( $\Delta_{1/2}$ ) и суперрезонансов второго–пятого порядка (соответственно  $\Delta_{2/1}$ ,  $\Delta_{3/1}$ ,  $\Delta_{4/1}$  и  $\Delta_{5/1}$ ). Результаты измерения приведены в табл. 2.

Как видно, ширина резонансных кривых при основном и субгармоническом резонансах практически сопоставима. В обоих случаях наблюдается тенденция к некоторому увеличению ширины АЧХ по мере роста трещины. Более сложная зависимость имеет место при супергармоническом резонансе второго порядка: ширина АЧХ увеличивается с уменьшением размеров трещины до  $\gamma = 0,05$  и все же остается в 2,1...37,8 раза меньше, чем при основном резонансе. Этот вывод качественно согласуется с результатами, также полученными для системы с одной степенью свободы, но при больших значениях  $C_o/C$  и более высоком уровне демпфирования [5]. Таким образом, возбудить точный супергармонический резонанс второго порядка сложнее, чем основной резонанс или субгармонический резонанс порядка  $f_T/p = 1/2$ .

В отличие от супергармонического резонанса второго порядка, ширина резонансной кривой при супергармоническом резонансе четвертого порядка увеличивается прямо пропорционально размерам трещины (табл. 2). При этом ее ширина остается узкой при малых и средних трещинах (нами принята следующая условная классификация трещин по их размерам:  $\gamma \leq 0,1$  – малые трещины;  $0,1 < \gamma \leq 0,3$  – средние трещины;  $\gamma > 0,3$  – большие трещины).

Вследствие особой формы резонансных кривых при нечетных супергармонических резонансах не представляется возможным точно определить их ширину. Данные, полученные для этих режимов колебаний при  $C_o/C = 0,913$ , являются, строго говоря, условными, однако можно заключить, что ширина АЧХ при нелинейных резонансах третьего и пятого порядка приблизительно в два раза меньше, чем при основном резонансе.

Как видно из данных табл. 3, по мере увеличения трещины частоты основного и нелинейных резонансов системы монотонно уменьшаются (до 8% в рассматриваемом диапазоне размеров трещины). Об этом также свидетельствует смещение АЧХ при основном резонансе в область меньших частот (рис. 2).

Т а б л и ц а 2

Ширина резонансных кривых ( $\delta_\alpha = 0,5\%$ )

$\gamma = a/h$	$\Delta_{1/2}$	$\Delta_{1/1}$	$\Delta_{2/1}$	$\Delta_{3/1}$	$\Delta_{4/1}$	$\Delta_{5/1}$
0,0122	–	0,00277	0,00069	–	0,00030	–
0,0500	0,00235	0,00279	0,00132	–	0,00063	–
0,1000	0,00238	0,00276	0,00124	–	0,00065	–
0,2000	0,00245	0,00277	0,00055	–	0,00088	–
0,4000	0,00256	0,00281	0,00020	0,00122	0,00170	0,00128
0,6000	0,00306	0,00302	0,00008	–	–	–

Т а б л и ц а 3

Частоты основного и нелинейных резонансов ( $\delta_\alpha = 0,5\%$ )

$\gamma = a/h$	$\omega_{1/2}$	$\omega_{1/1}$	$\omega_{2/1}$	$\omega_{3/1}$	$\omega_{4/1}$	$\omega_{5/1}$
0,0122	–	0,999486	0,499723	–	0,249817	–
0,0500	1,995469	0,997724	0,498835	0,331933	0,249384	0,199607
0,1000	1,991416	0,995695	0,497823	0,331503	0,248878	0,199126
0,2000	1,982175	0,991079	0,495514	0,330163	0,247705	0,198261
0,4000	1,954481	0,977238	0,488592	0,325693	0,244171	0,195489
0,6000	1,838169	0,919077	0,459532	0,306334	0,230217	0,184278

**Примечание.** Индексы при  $\omega$  обозначают порядок нелинейного резонанса.

В работе [5] показано, что частота точного суперрезонанса второго порядка несколько ниже, чем частота, при которой вторая гармоника, доминирующая в спектре колебаний при указанном режиме, достигает наибольшего значения. Поэтому кроме точного значения частот основного и нелинейных резонансов были вычислены частоты, при которых амплитуда доминирующей гармоники в спектре колебаний достигает максимума (табл. 4). Доминирующей в спектре субгармонического резонанса порядка  $f_T/p = 1/2$  является субгармоника, частота которой в два раза меньше частоты вынуждающей силы, а в спектре суперрезонансов второго–пятого порядка – соответственно вторая–пятая гармоники.

Сопоставление приведенных в табл. 3 и 4 данных показало, что частоты точных резонансов действительно отличаются, хотя и незначительно, от частот максимумов амплитуд доминирующих гармоник: при субрезонансе это отличие достигает 0,0008%; при суперрезонансах второго, третьего, четвертого и пятого порядка – 0,0031, 0,18, 0,069 и 0,052% соответственно. Частоты точных суперрезонансов второго–четвертого порядка меньше частот максимумов амплитуд доминирующих гармоник, а частоты точных субрезонанса порядка  $f_T/p = 1/2$  и суперрезонанса пятого порядка – больше. В приведенном анализе не учитывались данные для отношения жесткостей  $C_o/C = 0,723$ , поскольку вследствие существенной нелинейности колебательной системы АЧХ при суперрезонансе четвертого порядка имеют разрыв (рис. 2,а). Известно [31], что амплитуда второй гармоники в окрест-

ности основного резонанса не имеет экстремума: она монотонно уменьшается при увеличении частоты вынуждающей силы. Поэтому относящиеся к основному резонансу данные в табл. 4 не приведены.

Т а б л и ц а 4

**Частоты максимумов доминирующих гармоник в спектрах колебаний при основном и нелинейных резонансах ( $\delta_\alpha = 0,5\%$ )**

$\gamma = a/h$	$\omega_{1/2}$	$\omega_{2/1}$	$\omega_{3/1}$	$\omega_{4/1}$	$\omega_{5/1}$
0,0122	–	0,499723	–	0,249822	–
0,0500	1,995468	0,498844	0,332542	0,249385	0,199530
0,1000	1,991411	0,497832	0,331865	0,248882	0,199077
0,2000	1,982159	0,495522	0,330326	0,247738	0,198154
0,4000	1,954361	0,488607	0,325724	0,244339	0,195387
0,6000	1,836734	0,459524	0,307142	0,230503	0,184714

**Примечание.** Прочерки обозначают, что соответствующие нелинейные резонансы отсутствуют.

Возникновение нелинейных резонансов является качественным признаком наличия повреждения типа трещины усталости, а амплитуды этих резонансов позволяют судить о степени повреждения. Известно, что колебательные процессы при нелинейных резонансах существенно негармонические (нелинейно искажаются). Это также может использоваться для качественной и количественной оценки повреждения. Причина значительных нелинейных искажений колебаний при нелинейных резонансах заключается в том, что при этих режимах в спектре колебаний возникает гармоника, частота которой совпадает с частотой основного резонанса. Амплитуда этой гармоники сопоставима или во много раз превышает при точном нелинейном резонансе амплитуду основной гармоники. При супергармонических резонансах порядка  $f_T/p = 2/1, 3/1, 4/1$  и т.д. в спектре колебаний преобладают соответственно вторая, третья, четвертая и т.д. гармоники, при субгармоническом резонансе порядка  $f_T/p = 1/2$  – первая субгармоника. Поэтому в качестве признака повреждения можно использовать отношение амплитуды доминирующей гармоники в спектре колебаний к амплитуде основной гармоники, пренебрегая другими составляющими спектра.

Ограничимся анализом трех наиболее интересных с практической точки зрения нелинейных резонансов: субгармоническим порядка  $f_T/p = 1/2$  и супергармоническими порядка  $f_T/p = 2/1$  и  $3/1$ . В качестве диагностического признака повреждения используем соотношение между амплитудой доминирующей гармоники в спектре колебаний (соответственно  $A_{1/2}$ ,  $A_{2/1}$  и  $A_{3/1}$ ) и амплитудой первой гармоники ( $A_1$ ) и отношение амплитуды точного нелинейного резонанса ( $S_{1/2}$ ,  $S_{2/1}$  и  $S_{3/1}$ ) к амплитуде вынужденных колебаний неповрежденной системы при той же частоте ( $S$ ).

Как следует из рис. 3, при субгармоническом резонансе рост трещины в диапазоне  $0,1 < \gamma \leq 0,6$  приводит к значительному (почти на два порядка) увеличению обоих рассматриваемых диагностических признаков поврежде-



ния. При супергармонических резонансах второго и третьего порядка аналогичные изменения соответственно на один и два порядка ниже. Если при супергармоническом резонансе второго порядка диагностические признаки повреждения существенно изменяются при наличии средних и больших трещин, как это имеет место при субгармоническом резонансе, то при супергармоническом резонансе третьего порядка – только при наличии больших трещин.

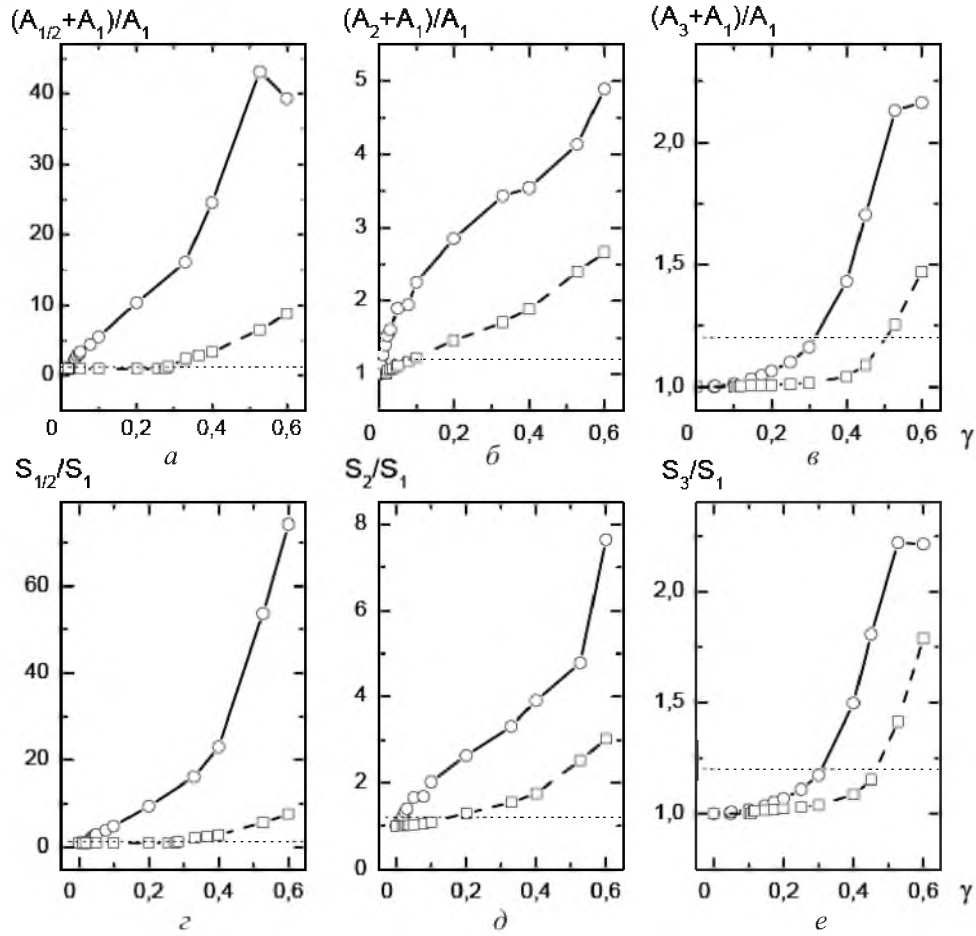


Рис. 3. Зависимости относительного изменения доминирующей гармоники (а–в) и амплитуды резонанса (г–д) от размеров повреждения при субгармоническом резонансе порядка 1/2 (а, г) и супергармоническом резонансе порядка 2/1 (б, д) и 3/1 (в, е). (Здесь и на рис. 4: сплошные линии –  $\delta_\alpha = 0,5\%$ ; штриховые линии –  $\delta_\alpha = 5,0\%$ .)

Зависимости относительных изменений доминирующих гармоник и амплитуд колебаний от размеров трещины при соответствующих режимах колебаний качественно идентичны. Это значит, что амплитуда точных нелинейных резонансов определяется главным образом амплитудой доминирующей гармоники в спектре колебаний, частота которой совпадает с частотой основного резонанса. Количественно относительный рост амплитуды нелинейных резонансов несколько выше, чем относительный рост доминиру-

ющих гармоник. Причина этого заключается в том, что обе характеристики определялись при частотах точных резонансов, которые, как было показано выше, не совпадают с частотами, при которых амплитуды доминирующих гармоник достигают максимальных значений.

Демпфирование уменьшает чувствительность всех представленных диагностических признаков к наличию повреждения. Рост декремента колебаний системы на порядок снижает амплитуду субрезонанса до 10 раз, суперрезонанса второго порядка – до 2,5 раза, суперрезонанса третьего порядка – до 1,6 раза, что обусловлено соответствующим уменьшением амплитуды доминирующей гармоники в спектре колебаний. При этом характер зависимостей признаков повреждения от относительных размеров трещины качественно не изменяется.

Поскольку на практике наибольший интерес представляет диагностика малых повреждений, на рис. 4 показаны те же зависимости, что и на рис. 3, но при меньших относительных размерах трещины. Как видно, имеет место качественное отличие между суб- и супергармоническими резонансами. Субгармонический резонанс возникает в случае, когда трещина достигает определенного значения, что согласуется с результатами работы [16]. Например, при уровнях демпфирования  $\delta_\alpha = 0,5$  и  $5,0\%$  субгармоника в спектре колебаний появляется при размерах трещины  $\gamma = 0,03$  и  $0,28$  соответственно. Дальнейший рост трещины приводит к существенному увеличению субгармоники. Повышение амплитуд доминирующих гармоник при супергармонических резонансах с увеличением размера трещины происходит менее интенсивно, но наблюдается с момента ее зарождения. Абсолютная величина этого роста при супергармоническом резонансе третьего порядка пренебрежимо мала в области малых трещин. В то же время интенсивность изменения амплитуды второй гармоники в области малых трещин при супергармоническом резонансе второго порядка и малом уровне демпфирования является достаточно значительной для практического использования.

Надежное экспериментальное фиксирование диагностического признака повреждения зависит от точности и разрешающей способности измерительной аппаратуры, а также от уровня шума электронных приборов, поскольку вибродиагностика повреждений выполняется обычно при небольших уровнях колебаний. Эти факторы в той или иной мере определяют предел чувствительности любой методики диагностики повреждения, т.е. минимальный размер повреждения, который может быть надежно обнаружен.

В дальнейшем анализе условно принято, что относительная погрешность определения той или иной характеристики повреждения составляет  $20\%$ . Следовательно, повреждение может быть надежно обнаружено, если изменение диагностического признака превышает эту величину. На рис. 3 и 4 принятая погрешность показана штриховыми линиями. Как видно, учет погрешности экспериментального определения признака повреждения снижает чувствительность обоих методов диагностики. И если при субгармоническом резонансе порядка  $f_T/p = 1/2$  и супергармоническом резонансе порядка  $f_T/p = 2/1$  при низком уровне демпфирования колебаний в системе

это снижение относительно невелико, то при супергармоническом резонансе порядка  $f_T/p = 3/1$  оно настолько значительно, что практически использовать этот режим колебаний вряд ли целесообразно.

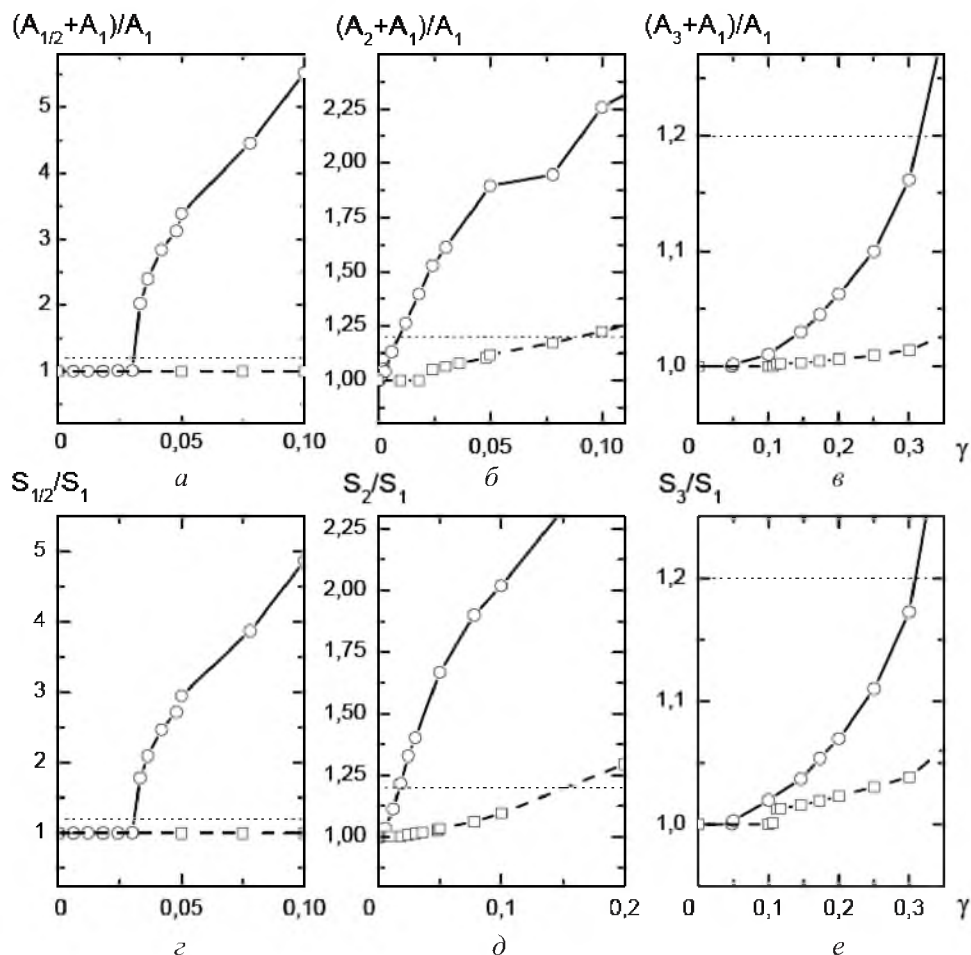


Рис. 4. Зависимости относительного изменения доминирующей гармоники (а–в) и амплитуды резонанса (г–е) от размеров повреждения при субгармоническом резонансе порядка 1/2 (а, г) и супергармоническом резонансе порядка 2/1 (б, д) и 3/1 (в, е) в области малых трещин.

Минимальный размер повреждения, выявляемый обоими методами диагностики с учетом погрешности измерений, существенно зависит от уровня демпфирования колебаний в системе. В табл. 5 приведены результаты расчетов минимальных размеров трещины, которые определяли при 20%-ном изменении доминирующей гармоники в спектре колебаний при субгармоническом резонансе порядка  $f_T/p = 1/2$  и супергармонических резонансах порядка  $f_T/p = 2/1$  и  $3/1$  и уровня демпфирования колебаний в системе на два порядка. Анализ результатов расчетов показал, что супергармонический резонанс второго порядка более чувствителен к наличию повреждения. Так, при наименьшем исследованном уровне демпфирования колебаний в системе ( $\delta_\alpha = 0,101\%$ ) чувствительность нелинейных искажений колебаний при

супергармоническом резонансе второго порядка в 7,2 раза выше, чем при субгармоническом резонансе, и в 90,0 раза выше, чем при супергармоническом резонансе третьего порядка. По мере увеличения уровня демпфирования в системе эта разница уменьшается, поскольку рост демпфирования наиболее значительно снижает чувствительность супергармонического резонанса второго порядка. Например, с увеличением декремента колебаний системы в 100 раз чувствительность супергармонического резонанса второго порядка снижается в 96 раз, субгармонического резонанса порядка  $f_T/p = 1/2$  – в 32 раза, супергармонического резонанса третьего порядка – в 3,5 раза.

Т а б л и ц а 5

Минимальные размеры трещины, рассчитанные по изменению доминирующей гармоники в спектре колебаний при субрезонансе порядка 1/2 и суперрезонансах порядка 2/1 и 3/1

$\delta_\alpha, \%$	$\gamma_{1/2}$	$\gamma_{2/1}$	$\gamma_{3/1}$	$\gamma_{1/2}/\gamma_{2/1}$	$\gamma_{3/1}/\gamma_{2/1}$
0,101	0,013	0,0018	0,162	7,22	90,00
0,503	0,033	0,0090	0,314	3,67	34,89
1,005	0,069	0,0183	0,384	3,77	20,98
2,011	0,120	0,0363	0,440	3,31	12,12
5,027	0,285	0,0895	0,503	3,18	5,62
10,053	0,420	0,1732	0,575	2,42	3,32

Важной практической характеристикой методов диагностики кроме чувствительности к повреждению является степень изменения функции, описывающей зависимость диагностического признака от размеров повреждения  $F(\gamma)$ , при единичном приращении размеров повреждения:

$$V = \frac{\partial F(\gamma)}{\partial \gamma}. \quad (4)$$

Как видно из рис. 5, метод диагностики, основанный на изменении доминирующей гармоники при субрезонансе порядка  $f_T/p = 1/2$ , наиболее чувствителен к росту трещины. Главный недостаток этого метода – нечувствительность к наличию трещины до достижения определенных размеров, которые прямо зависят от уровня демпфирования колебаний в системе. Порог полной нечувствительности этого метода тем выше, чем выше уровень демпфирования в системе. Из данных табл. 5 следует, что при уровне демпфирования  $\delta_\alpha = 2,0\%$  указанный метод нечувствителен к наличию малых трещин.

Не получил подтверждения вывод о том, что изменение доминирующей гармоники при супергармоническом резонансе порядка  $f_T/p = 3/1$  по сравнению с таковым порядка  $f_T/p = 2/1$  проявляется более существенно при изменении величины повреждения [16]. Из рис. 5 следует, что интенсивность изменения диагностического признака при супергармоническом резо-

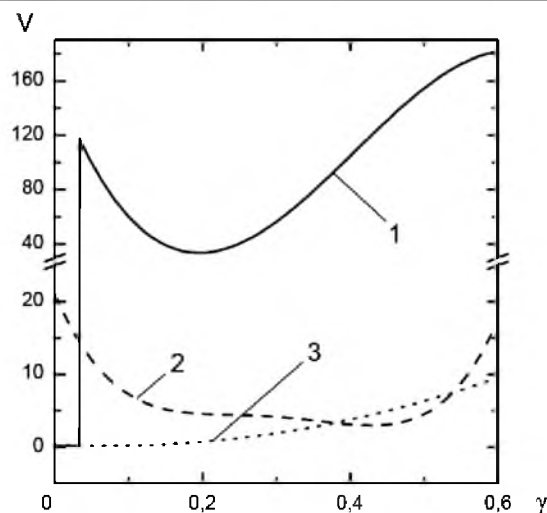


Рис. 5. Скорость изменения зависимостей доминирующих гармоник при субгармоническом резонансе порядка  $1/2$  (1) и супергармоническом резонансе порядка  $2/1$  (2) и  $3/1$  (3) от размеров повреждения при единичном его приращении ( $\delta_\alpha = 0,5\%$ ).

нансе порядка  $f_T/p = 2/1$  в диапазоне малых и средних трещин выше, чем при супергармоническом резонансе порядка  $f_T/p = 3/1$ .

**Заключение.** Особенностью колебаний механической системы с несимметричной кусочно-линейной характеристикой восстанавливающей силы является наличие ряда нелинейных резонансов, амплитуды которых значительно меньше амплитуды основного резонанса. Ширина АЧХ нечетных супергармонических резонансов сопоставима с таковой основного резонанса. Ширина амплитудно-частотной характеристики четных супергармонических резонансов значительно меньше таковой основного резонанса, в связи с чем возбуждение точных супергармонических резонансов четных порядков становится проблематичным.

Наиболее чувствительной характеристикой к наличию повреждений средних и больших размеров является нелинейность колебаний системы при субгармоническом резонансе, который в случае малых повреждений не возникает. В то же время супергармонический резонанс второго порядка наблюдается с момента зарождения трещины, и его интенсивность при малом уровне демпфирования будет достаточно значительной для диагностики малых трещин.

При учете 20%-ной погрешности измерения амплитуды доминирующей гармоники в спектре колебаний чувствительность к наличию повреждения супергармонического резонанса второго порядка на один-два порядка выше, чем чувствительность субгармонического резонанса порядка  $f_T/p = 1/2$  и супергармонического резонанса третьего порядка. С увеличением уровня демпфирования в системе на два порядка разница в чувствительности указанных нелинейных резонансов уменьшается, однако чувствительность супергармонического резонанса второго порядка остается выше, чем остальных нелинейных резонансов.

**Резюме**

Представлено результати числового порівняльного аналізу супергармонічних резонансів порядку  $2/1 \dots 5/1$  і субгармонічного резонансу порядку  $1/2$  механічної коливної системи з одним ступенем вільності з несиметричною кусково-лінійною характеристикою відновлювальної сили при різних співвідношеннях жорсткості системи на півциклах і в умовах суттєвої зміни рівня демпфірування коливальності у системі.

1. *Maezawa S.* Superharmonic resonance in piecewise linear system with unsymmetrical characteristics // Proc. of the 5th Int. Conf. on Nonlinear Oscillations. – Kiev, 1970. – P. 401 – 422.
2. *Крюков Б. И.* Вынужденные колебания существенно нелинейных систем. – М.: Машиностроение, 1984. – 216 с.
3. *Матвеев В. В.* К анализу эффективности метода спектральной вибродиагностики усталостного повреждения элементов конструкций. Сообщ. 1. Продольные колебания, аналитическое решение // Пробл. прочности. – 1997. – № 6. – С. 5 – 20.
4. *Ballo I.* Non-linear effects of vibration of a continuous transverse cracked slender shaft // J. Sound Vibration. – 1998. – **217**, No. 2. – P. 321 – 333.
5. *Плахтиенко Н. П.* К диагностике кусочно-постоянной жесткости при нелинейных резонансах // Прикл. механика. – 1991. – **27**, № 10. – С. 112 – 120.
6. *Плахтиенко Н. П., Ясинский С. А.* О резонансе второго порядка при колебаниях балки, содержащей поперечную трещину // Пробл. прочности. – 1995. – № 3. – С. 56 – 63.
7. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 1. Существующие и предлагаемые методы решения // Там же. – 2004. – № 4. – С. 5 – 20.
8. *Матвеев В. В.* Приближенное аналитическое определение вибродиагностических параметров нелинейности упругих тел, обусловленной наличием закрывающейся трещины. Сообщ. 2. Определение диагностических параметров при основном и супергармоническом резонансе 2-го порядка // Там же. – № 5. – С. 5 – 22.
9. *Ji J. C. and Hansen C. H.* On the approximate solution of a piecewise nonlinear oscillator under super-harmonic resonance // J. Sound Vibration. – 2005. – **283**, No. 1-2. – P. 467 – 474.
10. *Вульфсон И. И., Коловский М. З.* Нелинейные задачи динамики машин. – Л.: Машиностроение, 1968. – 283 с.
11. *Beresnevich V. I. and Tsyfansky S. L.* Characteristic properties of subharmonic oscillations and their application in vibration engineering // J. Sound Vibration. – 2005. – **280**, No. 3-5. – P. 579 – 593.
12. *Krawczuk M.* Coupled longitudinal and bending forced vibration of Timoshenko cantilever beam with a closing crack // Mechanika teoretyczna i stosowana. – 1994. – **32**, No. 2. – P. 463 – 482.

13. *Abraham O. N. L. and Brandon J. A.* A piece wise linear approach for modelling of a breathing crack // Proc. of the 17th Int. Seminar on Modal Analysis. – Leuven (Belgium), 1992. – **1**. – P. 417 – 431.
14. *Shen M.-H. H. and Chu Y. C.* Vibrations of beams with a fatigue crack // Comp. Struct. – 1992. – **45**, No. 1. – P. 79 – 93.
15. *Ruotolo R., Surace C., Crespo P., and Storer D.* Harmonic analysis of the vibrations of a cantilevered beam with a closing crack // Ibid. – 1996. – **61**, No. 6. – P. 1057 – 1074.
16. *Цыфанский С. Л., Бересневич В. И., Магоне М. А.* Вибродиагностика усталостных трещин в несущих поверхностях летательных аппаратов на основе использования нелинейных эффектов // Дефектоскопия. – 1993. – № 2. – С. 87 – 94.
17. *Цыфанский С. Л., Магоне М. А., Ожиганов В. М.* Об использовании нелинейных эффектов для обнаружения трещин в стержневых элементах конструкций // Там же. – 1985. – № 3. – С. 77 – 82.
18. *Цыфанский С. Л., Окс А. Б., Бересневич В. И., Магоне М. А.* Использование особенностей нелинейных колебаний для диагностики повреждений в подкрепляющих элементах тонкостенных конструкций // Там же. – 1989. – № 7. – С. 29 – 37.
19. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Detection of fatigue cracks in flexible geometrically non-linear bars by vibration monitoring // J. Sound Vibration. – 1998. – **213**, No. 1. – P. 159 – 168.
20. *Tsyfansky S. L. and Beresnevich V. I.* Non-linear vibration method for detection of fatigue cracks in aircraft wings // Ibid. – 2000. – **236**, No. 1. – P. 49 – 60.
21. *Pugno N., Ruotolo R., and Surace C.* Analysis of the harmonic vibrations of a beam with a breathing crack // Proc. of the 15th IMAC. – Tokyo, 1997. – P. 409 – 413.
22. *Pugno N., Surace C., and Ruotolo R.* Evaluation of the non-linear dynamic response to harmonic excitation of a beam with several breathing cracks // J. Sound Vibration. – 2000. – **235**, No. 5. – P. 749 – 762.
23. *Saavedra P. N. and Cuitiño L. A.* Crack detection and vibration behavior of cracked beams // Comp. Struct. – 2001. – **79**, No. 16. – P. 1451 – 1459.
24. *Bovsunovsky A. P.* The mechanisms of energy dissipation in the non-propagating fatigue cracks in metallic materials // Eng. Fract. Mech. – 2004. – **71**, No. 16-17. – P. 2271 – 2281.
25. *Прочность, устойчивость, колебания.* Справочник в 3 т. Т. 3 / Под ред. И. А. Биргера и Я. Г. Пановко. – М.: Машиностроение, 1968. – 568 с.
26. *Бовсуновский А. П.* К вопросу об исследовании колебаний нелинейной механической системы, моделирующей тело с трещиной // Пробл. прочности. – 2001. – № 4. – С. 97 – 111.
27. *Крюков Б. И.* Динамика вибрационных машин резонансного типа. – Киев: Наук. думка, 1967. – 210 с.
28. *Карасев В. А., Ройтман А. Б.* Доводка эксплуатируемых машин. Вибродиагностические методы. – М.: Машиностроение, 1986. – 192 с.

29. *Ройтман А. Б., Александрова Н. Б., Христенко Т. А.* Вибрационная диагностика “дышащих” трещин в изделиях // Техн. диагностика и неразрушающий контроль. – 2000. – № 1. – С. 58 – 67.
30. *Тимошенко С. П., Янг Д. Х., Уивер У.* Колебания в инженерном деле. – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
31. *Бовсуновский А. П.* Численное исследование колебаний нелинейной механической системы, моделирующей тело с трещиной // Пробл. прочности. – 1999. – № 6. – С. 65 – 80.

Поступила 07. 09. 2005