

Деформация защитных плоских преград с технологическими люками

Ю. В. Немировский, Т. П. Романова

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск, Россия

На основе модели идеального жесткопластического тела разработана методика, позволяющая проанализировать динамическое поведение эллиптических шарнирно опертых или защемленных пластин, имеющих абсолютно жесткую вставку произвольной формы. На пластину действует равномерно распределенная по поверхности кратковременная динамическая нагрузка высокой интенсивности взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов деформирования пластин. Для каждого из них получены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации. Приведены примеры численных решений в случаях круглой и прямоугольной жестких вставок.

Ключевые слова: жесткопластическое тело, эллиптическая пластина, жесткая вставка, нагрузка взрывного типа, предельная нагрузка, остаточный прогиб.

Введение. Эллиптические пластины с жесткими технологическими люками широко используются в качестве защитных преград при воздействии нагрузок взрывного типа. В связи с этим возникает проблема оценки их динамической повреждаемости и предельного уровня допустимых динамических нагрузок. Обзор исследований по динамическому изгибу круглой пластины с жестким кругом в центре приведен в [1]. В настоящей работе на основе модели жесткопластического тела предложена методика расчета предельных нагрузок и остаточной повреждаемости для эллиптических пластин с абсолютно жесткой вставкой (люком) произвольной формы, находящихся под действием кратковременных интенсивных динамических нагрузок. Метрой повреждаемости служил остаточный прогиб пластины. Методика может быть использована для широкого класса приближенных инженерных задач.

1. Модель, предположения и уравнения движения. Рассмотрим пластину из идеального жесткопластического материала с эллиптическим контуром l , шарнирно опертым или защемленным. В центральной ее части расположена абсолютно жесткая вставка Z_a с произвольным контуром l_2 . Пластина находится под действием равномерно распределенной по поверхности динамической нагрузки высокой интенсивности $P(t)$ взрывного типа, которая характеризуется мгновенным достижением максимального значения $P_{\max} = P(t_0)$ в начальный момент времени t_0 и последующим быстрым снижением интенсивности. Поскольку вставка Z_a при деформировании остается жесткой, полагаем, что предельный изгибающий момент во вставке больше, чем в остальной части пластины M_0 , и $\rho_a/\rho \geq 1$, где ρ , ρ_a – поверхностные плотности материалов пластины и вставки.

В динамике пластины из жесткопластического материала в зависимости от значения P_{\max} могут иметь место три схемы деформирования. При нагрузках, не превышающих предельные (низкие нагрузки), пластина остается в покое. При нагрузках, незначительно превышающих предельные

(средние нагрузки), пластина деформируется в некоторую линейчатую поверхность, а абсолютно жесткая вставка и точки ее контура движутся поступательно с одинаковой скоростью $\dot{w}_c(t)$. При этом, как и в случае отсутствия вставки [2], в пластине может образовываться пластическая шарнирная прямая линия l_1 , состоящая из двух участков (схема 1 на рис. 1,а). Как и в случаях изгиба балок [3], круглых и кольцевых пластин [4–6], прямоугольных и полигональных пластин [3, 7–9], пластин со сложным контуром [2, 10–14], при достаточно высоких значениях P_{\max} динамика пластины может сопровождаться возникновением области интенсивного пластического деформирования Z_p , движущейся поступательно. При этом возможны следующие ситуации: часть шарнира l_1 сохраняется; область Z_p охватывает не всю вставку Z_a (схема 2 на рис. 1,б; “высокие” нагрузки); шарнира l_1 нет, а вставка Z_a находится внутри области Z_p (схема 3 на рис. 1,в; “сверхвысокие” нагрузки).

Уравнение эллипса l задано в параметрической форме $x = a \cos \varphi$, $y = b \sin \varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $b \leq a$. Уравнение прямой l_1 имеет вид [2]: $y_1 = 0$; $-a + b^2/a \leq x_1 \leq a - b^2/a$. Во всех схемах деформирования нормаль к кривой l , опущенная внутрь области пластины, попадает либо на шарнир l_1 , либо на контур l_2 , либо на кривую l_3 – контур области Z_p (рис. 1).

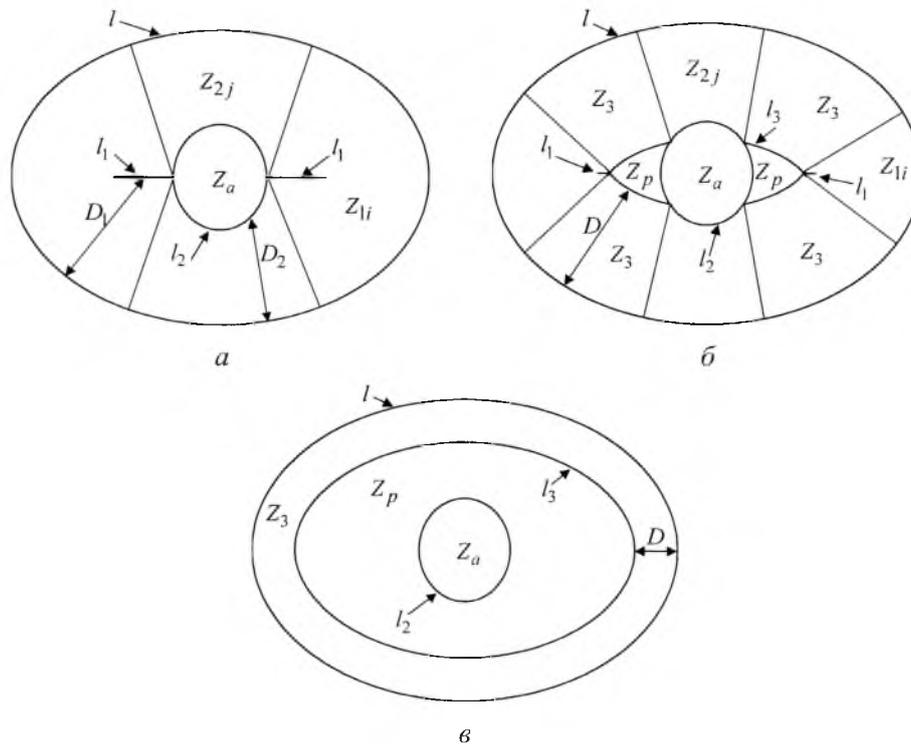


Рис. 1. Схемы деформирования 1 (а), 2 (б) и 3 (в) для эллиптической пластины с произвольной жесткой вставкой.

Обозначим через Z_i область пластины, из любой точки которой нормаль к контуру l попадает на кривую l_i ($i = 1, 2, 3$), через l_{bi} – часть внеш-

него контура l , которая является опорным контуром области Z_i (часть контура l_{bi} определена в интервале $\psi_i \leq \varphi \leq \xi_i$, $i = 1, 2, 3$), через D_j – расстояние по нормали к контуру l , вычисленное от контура l_{bj} до кривой l_j в области Z_j ($j = 1, 2$). Величина D_2 зависит от формы вставки и, следовательно, только от параметра φ , а $D_1(\varphi) = bL(\varphi)/a$ [2]:

$$L(\varphi) = \sqrt{a^2 \sin^2 \varphi + b^2 \cos^2 \varphi}.$$

Можно показать [2], что нормаль к контуру l является также нормалью к кривой l_3 и что расстояние D между l_{b3} и l_3 не зависит от параметра φ . Уравнение l_3 ($x = x_3(\varphi)$, $y = y_3(\varphi)$, $\psi_3 \leq \varphi \leq \xi_3$) для контура области Z_p имеет вид ([2])

$$x_3 = [a - Db/L(\varphi)] \cos \varphi; \quad y_3 = [b - Da/L(\varphi)] \sin \varphi.$$

Уравнения движения пластины выведем из принципа виртуальных мощностей с использованием принципа Даламбера [9]:

$$K = A - N; \tag{1}$$

$$K = \iint_{S \setminus Z_a} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} ds + \iint_{Z_a} \rho_a \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \frac{\partial u^*}{\partial t} ds; \tag{2}$$

$$A = \iint_S P(t) \frac{\partial u^*}{\partial t} ds; \quad N = \sum_m \int_{l_m} M_m [\partial \theta_m^* / \partial t] dl,$$

где K , A , N – соответственно мощности инерционных, внешних и внутренних сил пластины; S – площадь пластины; u – прогиб; t – текущее время; l_m – линии разрыва угловых скоростей; M_m – изгибающий момент на l_m ; $[\partial \theta_m^* / \partial t]$ – разрыв угловой скорости на l_m . В выражении для N суммирование проводится по всем линиям разрыва угловой скорости, включая границу пластины. Звездочкой обозначены допустимые скорости.

Поскольку области Z_a и Z_p движутся поступательно, в силу непрерывности скоростей на их границах скорость прогиба в области Z_p равна $\dot{w}_c(t)$. Скорости угла отклонения области Z_i на опорном контуре l_{bi} обозначим через $\dot{\alpha}_i$ ($i = 1, 2, 3$). Из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_3 и Z_p следует $\dot{w}_c = \dot{\alpha}_3 D$ и, значит, $\dot{\alpha}_3$ не зависит от параметра φ . Обозначим $\dot{\alpha}_3$ через $\dot{\alpha}$. Как и в [9], а также учитывая непрерывность скорости на границах областей Z_1 и Z_p , Z_2 и Z_p , полагаем, что $\dot{\alpha}_1$ не зависит от параметра φ . Тогда скорости прогибов в разных областях пластины имеют следующий вид:

$$\begin{cases} (x, y) \in Z_a: \dot{u}(x, y, t) = \dot{w}_c(t); & (x, y) \in Z_p: \dot{u}(x, y, t) = \dot{w}_c(t); \\ (x, y) \in Z_3: \dot{u}(x, y, t) = \dot{\alpha}(t) d_3(x, y); \\ (x, y) \in Z_i: \dot{u}(x, y, t) = \dot{\alpha}_i d_i(x, y), & i = 1, 2, \end{cases} \tag{3}$$

где $d_j(x, y)$ – расстояние от точки (x, y) до опорного контура области Z_j ($j = 1, 2, 3$); $(\dot{}) = \partial()/\partial t$.

Из условия непрерывности скоростей на границах областей Z_i и Z_3 получим

$$\dot{\alpha}_i = F_i \dot{\alpha}(t), \quad i = 1, 2; \quad F_1(t) = \frac{D(t)}{D_1(\varphi_b)}; \quad F_2(t, \varphi) = \frac{D(t)}{D_2(\varphi)}, \quad (4)$$

где φ_b – параметр границы областей Z_1 и Z_3 .

Мощность внутренних сил в (2) равна [15]

$$N = M_0(2 - \eta) \oint_l \frac{\partial \dot{u}^*}{\partial n} dl,$$

где $\eta = 0$ при защемлении внешнего контура, $\eta = 1$ при его шарнирном опирании; $\partial \dot{u}^* / \partial n$ – производная от скорости прогиба по нормали к контуру l , или скорость угла отклонения поверхности пластины от горизонта на контуре l ; dl – элемент контура l .

С учетом введенных обозначений и $F_3 = 1$ выражения (2) примут вид

$$K = \dot{\alpha}^* \dot{\alpha} \rho \Sigma_1 + \dot{w}_c^* \dot{w}_c [\rho \Sigma_4 + \rho_a \Sigma_5];$$

$$A = P(t) [\dot{\alpha}^* \Sigma_2 + \dot{w}_c^* \Sigma_6]; \quad N = M_0(2 - \eta) \dot{\alpha}^* \Sigma_3,$$

где

$$\Sigma_1 = \sum_{i=1}^3 \iint_{Z_i} F_i^2 d_i^2 ds; \quad \Sigma_2 = \sum_{i=1}^3 \iint_{Z_i} F_i d_i ds; \quad \Sigma_3 = \sum_{i=1}^3 \int_{l_{bi}} F_i dl;$$

$$\Sigma_4 = \iint_{Z_p} ds; \quad \Sigma_5 = \iint_{Z_a} ds; \quad \Sigma_6 = \iint_{Z_a \cup Z_p} ds.$$

Подставляя эти равенства в (1) и учитывая независимость $\ddot{w}_c^*(t)$ и $\ddot{\alpha}^*(t)$, получаем уравнения движения для схемы деформирования 2 (рис. 1,б):

$$\rho \ddot{\alpha} \Sigma_1 = P(t) \Sigma_2 - M_0(2 - \eta) \Sigma_3; \quad (5)$$

$$\ddot{w}_c [\rho \Sigma_4 + \rho_a \Sigma_5] = P(t) \Sigma_6. \quad (6)$$

Из условия непрерывности скоростей на границах областей S_p и Z_3 следует

$$\dot{\alpha} D = \dot{w}_c. \quad (7)$$

На границах областей Z_i и Z_3 выполняется равенство ($i = 1, 2$)

$$D = D_i(\beta), \quad (8)$$

где $\beta = \psi_i$, или $\beta = \xi_i$.

В начальный момент пластина находится в состоянии покоя:

$$\alpha(t_0) = \dot{\alpha}(t_0) = w_c(t_0) = \dot{w}_c(t_0) = 0. \quad (9)$$

Начальные значения $D(t_0)$, $\beta(t_0)$ определяются в зависимости от значения P_{\max} , как будет показано ниже для конкретных задач.

Система уравнений (4)–(8) описывает поведение пластины в случае деформирования по схеме 2 (рис. 1,б). В случае схемы 3 (рис. 1,в) области Z_1 и Z_2 отсутствуют, а движение описывается уравнениями (5)–(7) при замене Σ_i величиной Ω_i ($i = 1, \dots, 6$), где

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \iint_{Z_3} d_3^2 ds; & \Omega_2 &= \iint_{Z_3} d_3 ds; & \Omega_3 &= \int_l dl; & \Omega_4 &= \Sigma_4; \\ \Omega_5 &= \Sigma_5; & \Omega_6 &= \Sigma_6. \end{aligned}$$

В случае схемы 1 (рис. 1,а) области Z_3 отсутствуют, вместо (4), (7) выполняются равенства

$$\dot{\alpha}_i = G_i \dot{w}_c(t), \quad i = 1, 2; \quad G_1 = \frac{1}{D_1(\varphi_a)}; \quad G_2(\varphi) = \frac{1}{D_2(\varphi)}. \quad (10)$$

Здесь $\varphi_a = \psi_1$, или $\varphi_a = \xi_1$, а выражения (2) преобразуются к виду

$$K = \dot{w}_c^* \dot{w}_c (\rho \Sigma_7 + \rho_a \Sigma_5); \quad A = \dot{w}_c^* P(t) (\Sigma_8 + \Sigma_5); \quad N = \dot{w}_c^* M_0 (2 - \eta) \Sigma_9,$$

где

$$\Sigma_7 = \sum_{i=1,2} \iint_{Z_i} G_i^2 d_i^2 ds; \quad \Sigma_8 = \sum_{i=1,2} \iint_{Z_i} G_i d_i ds; \quad \Sigma_9 = \sum_{i=1,2} \int_{l_{bi}} G_i dl.$$

Подставляя эти равенства в (1), получаем

$$\ddot{w}_c (\rho \Sigma_7 + \rho_a \Sigma_5) = P(t) (\Sigma_8 + \Sigma_5) - M_0 (2 - \eta) \Sigma_9. \quad (11)$$

Система уравнений (10), (11) описывает движение в случае деформирования по схеме 1 (рис. 1,а). Прогибы в разных областях пластины определяются из (3).

Для вычисления двойных интегралов по областям Z_i ($i = 1, 2, 3$) в уравнениях движения удобно перейти к криволинейной системе координат (ν_1, ν_2) , связанной с декартовой системой координат соотношениями [2]

$$x = [a - \nu_1 b / L(\nu_2)] \cos \nu_2, \quad y = [b - \nu_1 a / L(\nu_2)] \sin \nu_2.$$

Кривые семейства $\nu_1 = \text{const}$ удалены от контура l на расстояние ν_1 . Прямые $\nu_2 = \text{const}$ являются нормальными к внешнему контуру пластины.

Предельную нагрузку P_0 определим из уравнения (11) в момент начала движения t_0 и из условия $\dot{w}_c(t_0) = 0$. Тогда имеем

$$P_0 = \frac{M_0(2 - \eta)\Sigma_9}{\Sigma_8 + \Sigma_5}. \quad (12)$$

2. Динамическое поведение эллиптической пластины с круглой вставкой. Рассмотрим динамическое поведение эллиптической пластины с абсолютно круглой жесткой вставкой радиуса R (рис. 2). При этом возможны два случая: $R < a - b^2/a$ и $R \geq a - b^2/a$. Для определенности полагаем $R \geq a - b^2/a$, при этом шарнирная линия l_1 в схеме 1 отсутствует (рис. 2,а). Поскольку должно выполняться условие $R < b$, то случай отсутствия шарнирной линии возможен при значениях $(\sqrt{5} - 1)/2 < b/a \leq 1$. Заметим, что пропорция $b/a = (\sqrt{5} - 1)/2 \approx 0,618$ названа “золотой” еще античными авторами [16]. При средних нагрузках пластина деформируется в линейчатую поверхность (схема 1 на рис. 2,а). При высоких нагрузках в центральной части пластины около жесткой вставки образуются две одинаковые области Z_p с областью определения $-\xi \leq \varphi \leq \xi, \pi - \xi \leq \varphi \leq \pi + \xi, 0 \leq \xi \leq \pi/2$ (схема 2 на рис. 2,б). При этом сохраняются две одинаковые области Z_2 : $\xi \leq \varphi \leq \pi - \xi, \pi + \xi \leq \varphi \leq 2\pi - \xi$. При сверхвысоких нагрузках области Z_2 отсутствуют, а вставка Z_a находится внутри области Z_p и $0 < D \leq b - R$ (схема 3 на рис. 2,в).

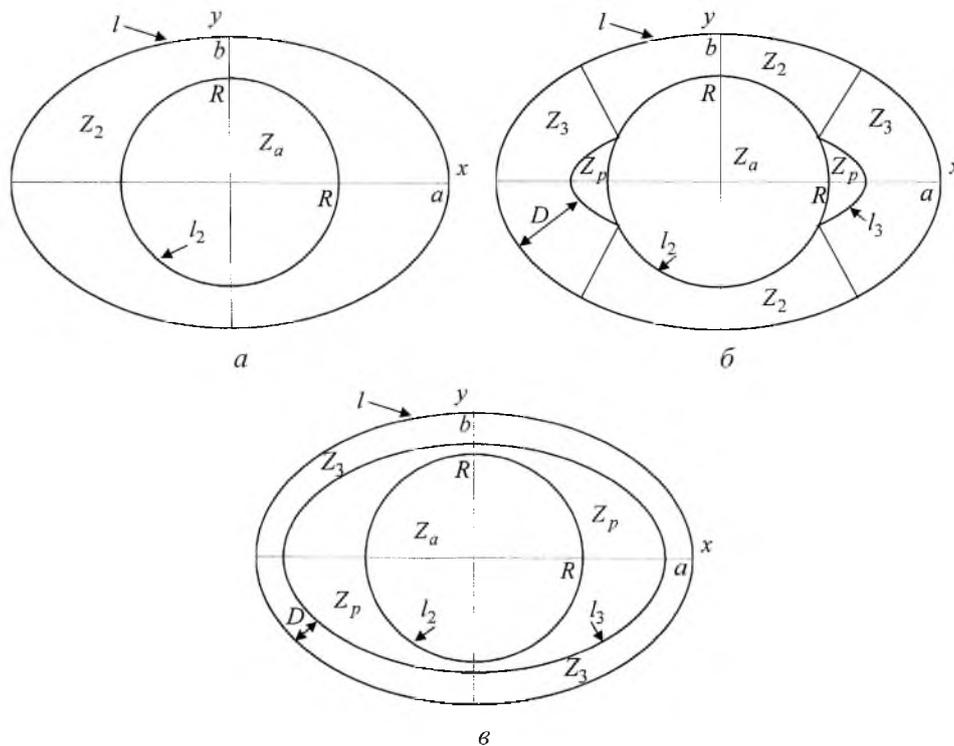


Рис. 2. Схемы деформирования 1 (а), 2 (б) и 3 (в) для эллиптической пластины с круглой жесткой вставкой.

Для рассматриваемой пластины имеем

$$D_2(\varphi) = \frac{a^2 b - \sqrt{R^2 a^2 L^2(\varphi) - (a^2 - b^2)^2 b^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \varphi}}{aL(\varphi)} \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi); \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1(\xi) &= 4 \int_{\xi}^{\pi/2} \frac{D_2^2(\xi)}{D_2^2(\nu_2)} \left[\int_0^{D_2(\nu_2)} \nu_1^2 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \\ &+ 4 \int_0^{\xi} \left[\int_0^{D_2(\xi)} \nu_1^2 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 = \\ &= 4D_2^2(\xi) \int_{\xi}^{\pi/2} \left[\frac{D_2(\nu_2)L(\nu_2)}{3} - \frac{D_2^2(\nu_2)ab}{4L^2(\nu_2)} \right] d\nu_2 + \\ &+ \frac{4}{3} D_2^3(\xi) \int_0^{\xi} L(\nu_2) d\nu_2 - D_2^4(\xi)A(\xi); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma_2(\xi) &= 4 \int_{\xi}^{\pi/2} \frac{D_2(\xi)}{D_2(\nu_2)} \left[\int_0^{D_2(\nu_2)} \nu_1 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \\ &+ 4 \int_0^{\xi} \left[\int_0^{D_2(\xi)} \nu_1 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 = \\ &= 4D_2(\xi) \int_{\xi}^{\pi/2} \left[\frac{D_2(\nu_2)L(\nu_2)}{2} - \frac{D_2^2(\nu_2)ab}{3L^2(\nu_2)} \right] d\nu_2 + \\ &+ 2D_2^2(\xi) \int_0^{\xi} L(\nu_2) d\nu_2 - \frac{4}{3} D_2^3(\xi)A(\xi); \end{aligned}$$

$$\Sigma_3(\xi) = 4 \left[\int_0^{\xi} L(\varphi) d\varphi + D_2(\xi) \int_{\xi}^{\pi/2} \frac{L(\varphi)}{D_2(\varphi)} d\varphi \right];$$

$$\begin{aligned} \Sigma_4(\xi) &= 4 \int_0^{\xi} \left[\int_{D_2(\xi)}^{D_2(\nu_2)} B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 = \\ &= 4 \int_0^{\xi} \left\{ L(\nu_2)[D_2(\nu_2) - D_2(\xi)] - \frac{D_2^2(\nu_2)ab}{2L^2(\nu_2)} \right\} d\nu_2 + 2D_2^2(\xi)A(\xi); \end{aligned}$$

$$\Sigma_5 = \pi R^2; \quad \Sigma_6(\xi) = \Sigma_4(\xi) + \Sigma_5; \quad \Sigma_7 = \Sigma_1(0)/(a - R)^2;$$

$$\Sigma_8 = \Sigma_2(0)/(a - R); \quad \Sigma_9 = \Sigma_3(0)/(a - R); \quad A(\xi) = \operatorname{arctg}\left(\frac{a}{b} \operatorname{tg} \xi\right);$$

$$B(\nu_1, \nu_2) = L(\nu_2) - \frac{\nu_1 ab}{L^2(\nu_2)}; \quad \Omega_3 = 4 \int_0^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi; \quad \Omega_1 = \frac{\Omega_3}{3} D^3 - \frac{\pi}{2} D^4;$$

$$\Omega_2 = \frac{\Omega_3}{2} D^2 - \frac{2\pi}{3} D^3; \quad \Omega_4 = \pi(ab + D^2 - R^2) - \Omega_3 D; \quad \Omega_5 = \pi R^2;$$

$$\Omega_6 = \pi(ab + D^2) - \Omega_3 D.$$

С учетом $i=2$ условие (8) примет вид

$$D = D_2(\xi). \quad (14)$$

Предельная нагрузка P_0 (12) определяется как

$$P_0 = \frac{M_0(2-\eta)\Sigma_3(0)}{\Sigma_2(0) + (a - R_1)\pi R^2} = \frac{M_0(2-\eta) \int_0^{2\pi} [L(\varphi)/D_2(\varphi)] d\varphi}{\int_0^{2\pi} \left[\frac{D_2(\varphi)L(\varphi)}{2} - \frac{D_2^2(\varphi)ab}{3L^2(\varphi)} \right] d\varphi + \pi R^2}. \quad (15)$$

При $a = b$ рассматриваемая пластина является круглой с жесткой вставкой. Для этого случая формула (15) примет вид $P_0 = 6M_0(2-\eta)a/(a^3 - R^3)$.

На рис. 3 представлена зависимость приведенной предельной нагрузки $p_0 = P_0 a^2 / [(2-\eta)M_0]$ от отношения R/a для разных значений $\gamma = b/a$ ($\gamma \leq 1$).

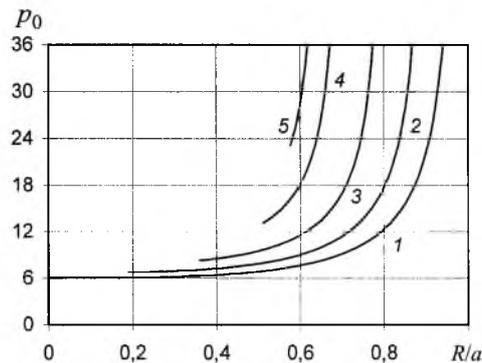


Рис. 3. Зависимость приведенной предельной нагрузки p_0 от отношения R/a для эллиптической пластины с круглой жесткой вставкой при разных значениях γ : 1 - $\gamma = 1$; 2 - $\gamma = 0,9$; 3 - $\gamma = 0,8$; 4 - $\gamma = 0,7$; 5 - $\gamma = 0,65$.

Проанализируем подробно движение рассматриваемой пластины при разных уровнях нагрузки взрывного типа. Если $0 < P_{\max} \leq P_0$ (“низкие” нагрузки), то пластина остается в состоянии покоя. Если $P_0 < P_{\max} \leq P_1$ (средние нагрузки), где P_1 – нагрузка, соответствующая появлению области Z_p , то движение происходит по схеме 1 (рис. 2,а). Нагрузку P_1 определим так. Дифференцируя (7) по времени и исключая величины $\ddot{\alpha}$, \dot{w}_c из полученного равенства с помощью (5) и (6), запишем равенство

$$\frac{-\rho\dot{\alpha}D}{D}\Sigma_1 = P(t)\left[\Sigma_2 - \frac{\rho\Sigma_1\Sigma_6}{D(\rho\Sigma_4 + \rho_a\Sigma_5)}\right] - M_0(2-\eta)\Sigma_3. \quad (16)$$

С учетом того что $\dot{\alpha}(t_0) = 0$, и при возникновении области Z_p : $P_1 = P(t_0)$, $D(t_0) = \max D = \max_{\varphi} D_2(\varphi) = a - R$, $\xi(t_0) = 0$, а области Z_p и Z_3 отсутствуют, имеем

$$P_1 = \frac{M_0(2-\eta)\Sigma_3(0)}{\Sigma_2(0) - \frac{\rho\Sigma_1(0)\Sigma_6(0)}{(a-R)[\rho\Sigma_4(0) + \rho_a\Sigma_5]}}. \quad (17)$$

Из (15), (17) видно, что $P_0 < P_1$. Уравнение (11) для схемы 1 (рис. 2,а) запишем в виде

$$\dot{w}_c(t) = Q[P(t) - P_0], \quad (18)$$

где $Q = (\Sigma_8 + \Sigma_5)/(\rho\Sigma_7 + \rho_a\Sigma_5)$. Начальные условия имеют вид (9). В момент $t = T$ нагрузка снимается, и пластина некоторое время движется по инерции.

Интегрируя уравнение движения (18) при $t_0 \leq t \leq T$, получаем

$$\dot{w}_c(t) = Q\left[\int_{t_0}^t P(\tau)d\tau - P_0(t-t_0)\right]; \quad w_c(t) = Q\left[\int_{t_0}^t \int_{t_0}^m P(\tau)d\tau dm - P_0\frac{(t-t_0)^2}{2}\right].$$

При $T < t \leq t_f$ движение пластины происходит по инерции до остановки в момент t_f и описывается уравнением

$$\ddot{w}_c(t) = -QP_0$$

с начальными условиями $\dot{w}_c(T)$, $w_c(T)$.

Момент t_f определяется из условия

$$\dot{w}_c(t_f) = 0. \quad (19)$$

Интегрируя уравнение движения, получаем равенства

$$\begin{aligned} \dot{w}_c(t) &= \dot{w}_c(T) - QP_0(t-T); \\ w_c(t) &= w_c(T) + \dot{w}_c(T)(t-T) - QP_0(t-T)^2/2. \end{aligned} \quad (20)$$

Из (18), (19) следует, что

$$t_f = t_0 + \frac{1}{P_0} \int_{t_0}^T P(t) dt. \quad (21)$$

Прогибы вычисляются из уравнений (1), (3) (13) при $i=2$. Максимальный остаточный прогиб равен

$$w_c(t_f) = Q \left[\frac{1}{2P_0} \left(\int_{t_0}^T P(t) dt \right)^2 - \int_{t_0}^T (t - t_0) P(t) dt \right].$$

Если $P_1 < P_{\max} \leq P_2$ (высокие нагрузки), где P_2 – нагрузка, при которой исчезает область Z_2 , то движение пластины начнется с развитой областью Z_p , и тогда $b - R \leq D(t_0) < a - R$. Начальные значения $\xi_0 = \xi(t_0)$, $D_0 = D(t_0)$ вычисляются из уравнения (16) с учетом равенства $\dot{\alpha}(t_0) = 0$ и соотношений (13), (14):

$$P_{\max} \left\{ \Sigma_2(\xi_0) - \frac{\rho \Sigma_1(\xi_0) \Sigma_6(\xi_0)}{D_0 [\rho \Sigma_4(\xi_0) + \rho_a \Sigma_5]} \right\} = M_0 (2 - \eta) \Sigma_3(\xi_0). \quad (22)$$

Нагрузка P_2 определяется из равенства (22) при $\xi_0 = \pi/2$ и $D_0 = \min_{\varphi} D_2(\varphi) = b - R$:

$$P_2 = \frac{M_0 (2 - \eta) \Sigma_3(\pi/2)}{\Sigma_2(\pi/2) - \frac{\rho \Sigma_1(\pi/2) \Sigma_6(\pi/2)}{(b - R) [\rho \Sigma_4(\pi/2) + \rho_a \Sigma_5]}}.$$

В первой ($t_0 < t \leq t_1$) фазе деформирования движение пластины происходит по схеме 2 (рис. 2,б) и описывается уравнениями (4), (5)–(7), (13), (14) при $i=2$ с начальными условиями (9) и (22). В этой фазе происходит сжатие ($\dot{D} > 0$) области Z_p по закону (16). Время t_1 , соответствующее исчезновению области Z_p , определяется из равенства $\xi(t_1) = 0$. В этот момент определяются значения $\dot{w}_c(t_1)$, $w_c(t_1)$.

Во второй ($t_1 < t \leq t_f$) фазе деформирования движение пластины происходит по схеме 1 (рис. 2,а) до остановки в момент времени t_f . Деформирование описывается уравнениями (10), (13), (18) при $i=2$ с начальными условиями, определенными в конце первой фазы движения. Время остановки определяется условием (19). Все прогибы в пластине вычисляются из уравнений (3) при $i=2$ с учетом всех фаз движения.

Если $P_{\max} > P_2$ (сверхвысокие нагрузки), то движение пластины начнется по схеме 3 (рис. 2,в) с развитой областью Z_p , которая охватывает полностью жесткую вставку Z_a , и тогда $0 < D < b - R$. Значение $D_0 = D(t_0)$ определим следующим образом. Дифференцируя (7) по времени и исключая

из полученного равенства величины $\ddot{\alpha}$, \dot{w}_c с помощью (5), (6) при замене Σ_i величиной Ω_i , получаем

$$\frac{-\rho\dot{\alpha}\dot{D}}{D}\Omega_1 = P(t)\left[\Omega_2 - \frac{\rho\Omega_1\Omega_6}{D(\rho\Omega_4 + \rho_a\Omega_5)}\right] - M_0(2-\eta)\Omega_3. \quad (23)$$

С учетом того что $\dot{\alpha}(t_0) = 0$, D_0 определим из равенства

$$P_{\max}\left\{\Omega_2(D_0) - \frac{\rho\Omega_1(D_0)\Omega_6(D_0)}{D_0[\rho\Omega_4(D_0) + \rho_a\Omega_5]}\right\} = M_0(2-\eta)\Omega_3. \quad (24)$$

Для сверхвысоких нагрузок в первой ($t_0 < t \leq t_1$) фазе деформирования движение пластины происходит по схеме 3 (рис. 2,б) и описывается уравнениями (5)–(7) при замене Σ_i величиной Ω_i с начальными условиями (9) и (24). В этой фазе происходит сжатие области Z_p по закону (23). Время t_1 , соответствующее появлению области Z_2 , определяется из равенства $D(t_1) = \min_{\varphi} D_2(\varphi) = b - R$. Для этого момента времени определяются значения $\dot{\alpha}(t_1)$, $\alpha(t_1)$.

Во второй ($t_1 < t \leq t_2$) и третьей ($t_2 < t \leq t_f$) фазах деформирования движение пластины происходит так же, как и в первой и второй фазах деформирования при высоких нагрузках и соответствующих начальных значениях.

Прогибы вычисляются из равенства (3) при $i=2$ с учетом фазности движения. Системы уравнений решаются численно методом Рунге-Кутты. На рис. 4 приведены прогибы $w = ua^2\rho/(M_0T^2)$ при $\varphi = 0$ шарнирно опертой эллиптической пластины с $\gamma = 0,8$, $R/a = 0,4$, $\rho_a/\rho = 3,0$ ($P_0 = 8,52 M_0/a^2$, $P_1 = 17,02 M_0/a^2$, $P_2 = 24,12 M_0/a^2$) под действием сверхвысокой нагрузки “прямоугольного” вида: $P(t) = 42,93 M_0/a^2$ при $0 \leq t \leq T$, $P(t) = 0$ при $t > T$.

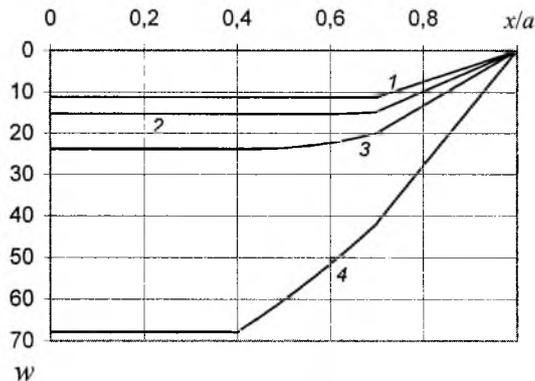


Рис. 4. Прогибы w в сечении $\varphi = 0$ шарнирно опертой эллиптической пластины с круглой жесткой вставкой в различные моменты времени: 1 – $t = T$; 2 – $t = t_1 = 1,18T$; 3 – $t = t_2 = 1,57T$; 4 – $t = t_f = 5,50T$.

3. **Динамическое поведение эллиптической пластины с прямоугольной вставкой.** В качестве примера рассмотрим динамическое поведение эллиптической пластины с жесткой вставкой Z_a , имеющей форму прямоугольника со сторонами $2a_1$ и $2b_1$, $b_1/a_1 \leq 1$. Полагаем, что $a - a_1 = b - b_1 = D_a \leq b^2/a$ (рис. 5). При этом шарнир l_1 отсутствует. Поскольку прямоугольник Z_a находится внутри эллиптической пластины, должно выполняться неравенство $D_a > \frac{ab(a + b - \sqrt{2ab})}{a^2 + b^2}$.

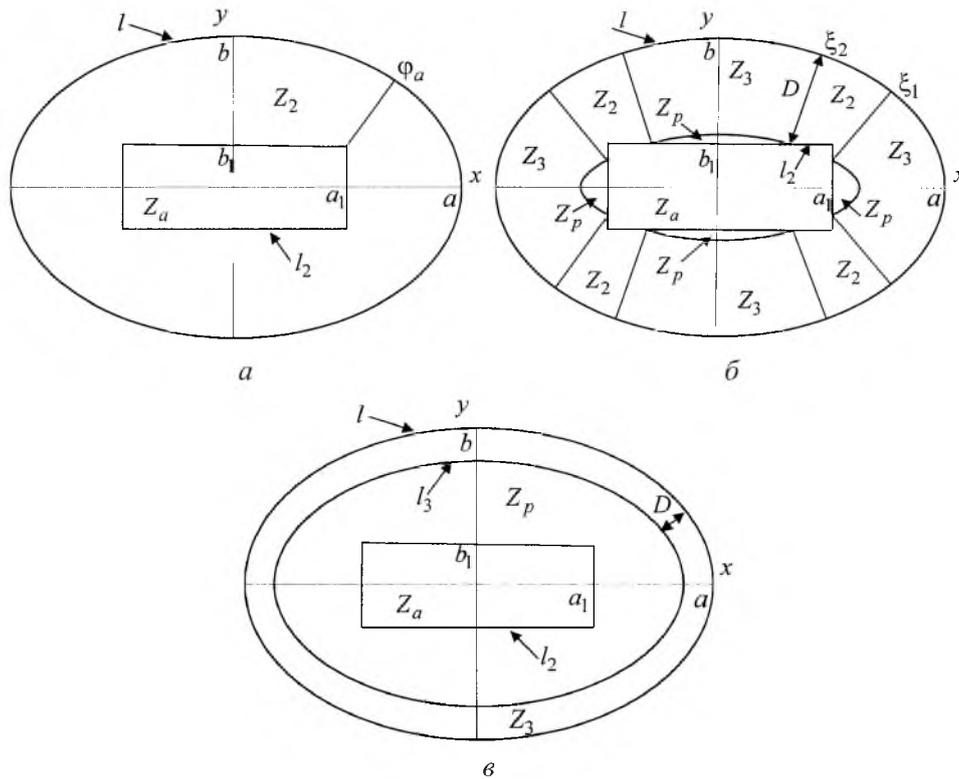


Рис. 5. Схемы деформирования 1 (а), 2 (б) и 3 (в) для эллиптической пластины с прямоугольной жесткой вставкой.

Для такой пластины возможны три схемы деформирования. При средних нагрузках пластина деформируется в линейчатую поверхность (схема 1 на рис. 5). При высоких нагрузках в центральной части пластины около жесткой вставки образуются две пары одинаковых областей Z_p с областью определения $-\xi_1 \leq \varphi \leq \xi_1$, $\xi_2 \leq \varphi \leq \pi - \xi_2$, $\pi - \xi_1 \leq \varphi \leq \pi + \xi_1$, $\pi + \xi_2 \leq \varphi \leq 2\pi - \xi_2$ ($0 \leq \xi_1 \leq \xi_2 \leq \pi/2$) (схема 2 на рис. 5,б). При сверхвысоких нагрузках области Z_2 отсутствуют, а вставка Z_a находится внутри области Z_p , и тогда $0 < D \leq D_a$ (схема 3 на рис. 5,в). Динамическое поведение изучаемой пластины будет описываться теми же уравнениями, что и для пластины, рассмотренной в п. 2, с заменой лишь $D_2(\varphi)$ величиной $D_2^*(\varphi)$, $\Sigma_i - \Sigma_i^*$ ($i=1, \dots, 9$), $\Omega_j - \Omega_j^*$ ($j=1, \dots, 6$), где

$$D_2^*(\varphi) = E_1(\varphi) \quad \text{при} \quad 0 \leq \varphi \leq \varphi_a;$$

$$D_2^*(\varphi) = E_2(\varphi) \quad \text{при} \quad \varphi_a \leq \varphi \leq \pi/2;$$

$$\begin{aligned} \Sigma_1^*(\xi_1) &= 4 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{D_2^{*2}(\xi_1)}{D_2^{*2}(\nu_2)} \left[\int_0^{D_2^*(\nu_2)} \nu_1^2 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \\ &+ 4 \int_0^{\xi_1} \left[\int_0^{D_2^*(\xi_1)} \nu_1^2 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 + 4 \int_0^{\xi_1} \left[\int_0^{D_2^*(\xi_1)} \nu_1^2 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 = \\ &= 4D_2^{*2}(\xi_1) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\frac{D_2^*(\nu_2)L(\nu_2)}{3} - \frac{D_2^{*2}(\nu_2)ab}{4L^2(\nu_2)} \right] d\nu_2 + \\ &+ \frac{4}{3} D_2^{*3}(\xi_1) \left[\int_0^{\xi_1} L(\nu_2) d\nu_2 + \int_{\xi_2}^{\pi/2} L(\nu_2) d\nu_2 \right] - D_2^{*4}(\xi_1) [\pi/2 + A(\xi_1) - A(\xi_2)]; \\ \Sigma_2^*(\xi) &= 4 \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{D_2^*(\xi_1)}{D_2^*(\nu_2)} \left[\int_0^{D_2^*(\nu_2)} \nu_1 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \\ &+ 4 \int_0^{\xi_1} \left[\int_0^{D_2^*(\xi_1)} \nu_1 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 + 4 \int_{\xi_2}^{\pi/2} \left[\int_0^{D_2^*(\xi_1)} \nu_1 B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 = \\ &= 4D_2^*(\xi_1) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left[\frac{D_2^*(\nu_2)L(\nu_2)}{2} - \frac{D_2^{*2}(\nu_2)ab}{3L^2(\nu_2)} \right] d\nu_2 + \\ &+ 2D_2^{*2}(\xi_1) \left[\int_0^{\xi_1} L(\nu_2) d\nu_2 + \int_{\xi_2}^{\pi/2} L(\nu_2) d\nu_2 \right] - \frac{4}{3} D_2^{*3}(\xi_1) [\pi/2 + A(\xi_1) - A(\xi_2)]; \\ \Sigma_3^*(\xi_1) &= 4 \left[\int_0^{\xi_1} L(\varphi) d\varphi + \int_{\xi_2}^{\pi/2} L(\varphi) d\varphi + D_2^*(\xi_1) \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{L(\varphi)}{D_2^*(\varphi)} d\varphi \right]; \\ \Sigma_4^*(\xi_1) &= 4 \left\{ \int_0^{\xi_1} \left[\int_{D_2^*(\xi_1)}^{D_2^*(\nu_2)} B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 + \int_{\xi_2}^{\pi/2} \left[\int_{D_2^*(\xi_1)}^{D_2^*(\nu_2)} B(\nu_1, \nu_2) d\nu_1 \right] d\nu_2 \right\} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 4 \int_0^{\xi_1} \left\{ L(v_2)[D_2^*(v_2) - D_2^*(\xi_1)] - \frac{D_2^{*2}(v_2)ab}{2L^2(v_2)} \right\} dv_2 + \\
&+ 4 \int_{\xi_2}^{\pi/2} \left\{ L(v_2)[D_2^*(v_2) - D_2^*(\xi_1)] - \frac{D_2^{*2}(v_2)ab}{2L^2(v_2)} \right\} dv_2 + \\
&+ 2D_2^{*2}(\xi_1)[\pi/2 + A(\xi_1) - A(\xi_2)];
\end{aligned}$$

$$\Sigma_5^* = 4(a - D_a)(b - D_a); \quad \Sigma_6^*(\xi_1) = \Sigma_4^*(\xi_1) + \Sigma_5^*; \quad \Sigma_7^* = \Sigma_1^*(0)/D_a^2;$$

$$\Sigma_8^* = \Sigma_2^*(0)/D_a; \quad \Sigma_9^* = \Sigma_3^*(0)/D_a; \quad \Omega_i^* = \Omega_i \quad (i = 1, 2, 3);$$

$$\Omega_4^*(D) = 4 \int_0^{\pi/2} L(v_2)[D_2^*(v_2) - D]dv_2 - 2ab \int_0^{\pi/2} \frac{D_2^{*2}(v_2)}{L^2(v_2)} dv_2 + \pi D^2;$$

$$\Omega_5^* = \Sigma_5^*; \quad \Omega_6^*(D) = \Omega_5^* + \Omega_4^*(D); \quad E_1(\varphi) = \frac{L(\varphi)}{b \cos \varphi} (a \cos \varphi - a + D_a);$$

$$E_2(\varphi) = \frac{L(\varphi)}{a \sin \varphi} (b \sin \varphi - b + D_a),$$

φ_a – параметр эллипса, при котором нормаль к эллипсу попадает в вершину прямоугольника Z_a (рис. 5); $0 < \varphi_a < \pi/2$.

Параметры φ_a , ξ_2 ($\varphi_a \leq \xi_2 \leq \pi/2$) определяются из уравнений

$$E_1(\varphi_a) = E_2(\varphi_a); \quad F_1(\xi_1) = F_2(\xi_2).$$

Анализ динамического поведения рассматриваемой пластины аналогичен анализу, проведенному в п. 2. При этом следует полагать, что $\max_{\varphi} D_2^*(\varphi) = D_a$, $\min_{\varphi} D_2^*(\varphi) = D_2^*(\varphi_a)$. Предельная нагрузка будет (см. (12),

(15))

$$\begin{aligned}
P_0 &= \frac{M_0(2-\eta)\Sigma_3^*(0)}{\Sigma_2^*(0) + 4(a - D_a)(b - D_a)D_a} = \\
&= \frac{M_0(2-\eta) \int_0^{\pi/2} [L(\varphi)/D_2^*(\varphi)]d\varphi}{\int_0^{\pi/2} \left[\frac{D_2^*(\varphi)L(\varphi)}{2} - \frac{D_2^{*2}(\varphi)ab}{3L^2(\varphi)} \right] d\varphi + (a - D_a)(b - D_a)}.
\end{aligned}$$

На рис. 6 представлена зависимость приведенной предельной нагрузки p_0 от отношения a_1/a для различных значений γ . Рис. 7 иллюстрирует прогибы w при $\varphi = 0$ шарнирно опертой эллиптической пластины с $\gamma = 0,8$, $a_1/a = 0,4$, $\rho_a/\rho = 3,0$ ($P_0 = 8,07 M_0/a^2$, $P_1 = 13,60 M_0/a^2$, $P_2 = 18,76 M_0/a^2$) под действием сверхвысокой нагрузки прямоугольного вида: $P(t) = 26,89 M_0/a^2$ при $0 \leq t \leq T$, $P(t) = 0$ при $t > T$.

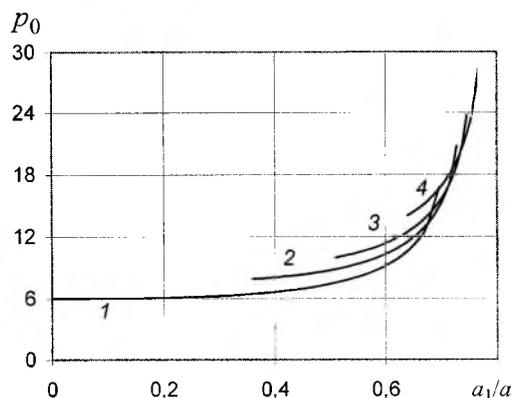


Рис. 6. Зависимость приведенной предельной нагрузки p_0 от отношения a_1/a для разных значений γ : 1 - $\gamma = 1$; 2 - $\gamma = 0,8$; 3 - $\gamma = 0,7$; 4 - $\gamma = 0,6$.

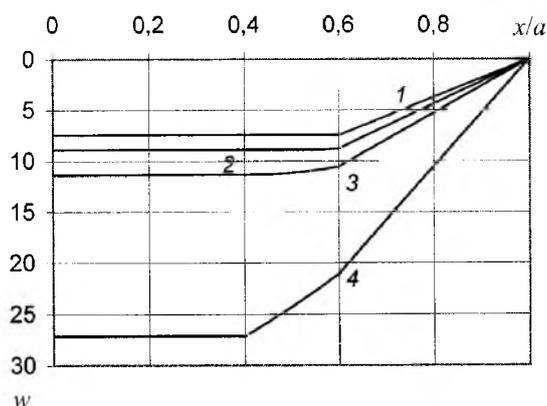


Рис. 7. Прогибы w в сечении $\varphi = 0$ шарнирно опертой эллиптической пластины с прямоугольной жесткой вставкой в различные моменты времени: 1 - $t = T$; 2 - $t = t_1 = 1,11T$; 3 - $t = t_2 = 1,28T$; 4 - $t = t_f = 3,47T$.

Заключение. Получено общее решение динамического изгиба идеальных жесткопластических пластин с шарнирно опертым или защемленным эллиптическим контуром, имеющих абсолютно жесткую вставку произвольной формы и находящихся под действием равномерно распределенной по поверхности кратковременной динамической нагрузки взрывного типа. Показано, что существует несколько механизмов деформирования пластин. Для каждого из них выведены уравнения динамического деформирования и проанализированы условия их реализации. Получены аналитические выражения для предельной, высокой, сверхвысокой нагрузок и максимального

остаточного прогиба в случае средних нагрузок. Приведены примеры численных решений для круглой и прямоугольной жестких вставок.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00161-а).

Резюме

На основі моделі ідеального жорстко-пластичного тіла розроблено методику, що дозволяє проаналізувати динамічну поведінку еліптичних шарнірно опертих або затиснутих пластин з абсолютно жорсткою вставкою довільної форми. На пластину діє рівномірно розподілене по поверхні короточасне динамічне навантаження високої інтенсивності вибухового типу. Показано, що існує декілька механізмів деформування пластин. Для кожного з них отримано рівняння динамічного деформування та проаналізовано умови їх реалізації. Наведено приклади числових розв'язків у випадках круглої і прямокутної жорстких вставок.

1. Мазалов В. Н., Немировский Ю. В. Динамика тонкостенных пластических конструкций // Проблемы динамики упруго-пластических сред. Новое в зарубежной науке. Механика. – 1975. – Вып. 5. – С. 155 – 247.
2. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическая пластическая повреждаемость одно- и двусвязных эллиптических пластин // Прикл. механика и теорет. физика. – 2002. – 43, № 4. – С. 142 – 154.
3. Комаров К. Л., Немировский Ю. В. Динамика жесткопластических элементов конструкций. – Новосибирск: Наука, 1984.
4. Гопкинс Г., Прагер В. Динамика пластической круглой пластинки // Механика. – 1955. – № 3. – С. 112 – 122.
5. Флоренс А. Л. Поведение защемленной круговой жесткопластической пластинки под действием взрывного давления // Тр. Америк. общ-ва инженеров-механиков. Сер. Е. – 1966. – № 2. – С. 11 – 17.
6. Флоренс А. Л. Кольцевая пластинка под действием поперечного линейного импульса // Ракет. техника и космонавтика. – 1965. – № 9. – С. 202 – 211.
7. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое поведение двусвязных полигональных пластических плит // Прикл. механика. – 1987. – 23, № 5. – С. 52 – 59.
8. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамический изгиб пластических полигональных плит // Прикл. механика и теорет. физика. – 1988. – № 4. – С. 149 – 157.
9. Ерхов М. И. Теория идеально пластических тел и конструкций. – М.: Наука, 1978.
10. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамика пластического деформирования пластин с криволинейным контуром // Прикл. механика. – 2001. – 37, № 12. – С. 68 – 78.

11. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Пластическое деформирование двусвязных пластин с криволинейным контуром при динамических нагрузках // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической и прикладной механике. – Минск: Технопринт, 2001. – С. 515 – 525.
12. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Моделирование и анализ процесса штамповки тонкостенных конструкций с гладкими выпуклыми контурами // Механика оболочек и пластин: Сб. докл. XX Междунар. конф. по теории оболочек и пластин. – Н. Новгород: Изд-во Ниж.-Новгород. гос. ун-та, 2002. – С. 231 – 239.
13. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Повреждаемость плоских преград с невогнутыми контурами при воздействии взрывных нагрузок // Науч. вестн. Новосиб. гос. техн. ун-та. – 2002. – № 2. – С. 77 – 85.
14. Немировский Ю. В., Романова Т. П. Динамическое поведение жестко-пластических пластин в форме сектора // Прикл. механика. – 2004. – 40, № 4. – С. 93 – 101.
15. Ржаницын А. Р. Строительная механика. – М.: Высш. шк., 1982.
16. Бронштейн И. Н., Семендяев К. А. Справочник по математике. – М.: Наука, 1986. – 140 с.

Поступила 12. 12. 2005