

Расчет собственных и вынужденных колебаний трубопроводной системы. Сообщение 1. Анализ колебаний пространственной стержневой системы

И. В. Орыняк, С. А. Радченко, А. С. Батура

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Проанализировано динамическое поведение трубопроводов как стержневой системы с помощью метода динамических жесткостей. Согласно методу, уравнения связи между неизвестными параметрами записываются по методу начальных параметров, поэтому процедура решения подобна таковой в статической задаче. Показано, что для криволинейных стержней проще и эффективнее применять модель, состоящую из прямых участков и безынерционных поворотных элементов. Для определения собственных частот колебаний пространственных стержневых систем предлагается использовать метод размыкания по перемещениям, который позволяет выделять частоты, соответствующие разным формам колебаний (поперечные, продольные и т.д.). Подход позволяет корректно моделировать поведение системы при вынужденных колебаниях с гармонической возбуждающей силой.

Ключевые слова: трубопровод, прямая труба, гиб трубы, стержень, динамика, частота колебаний, коэффициент увеличения податливости.

Введение. Динамические расчеты трубопроводных систем дополняют статические расчеты в случае если трубопроводы подвержены вибрациям или необходимо продемонстрировать целостность трубопровода при сейсмическом воздействии. При анализе динамического деформирования, как и статического, также применяют теорию стержней, что регламентировано современными нормативными документами (см., например, [1–3]).

В данном сообщении остановимся на рассмотрении двух проблем вычислительного процесса при динамическом деформировании.

Первая проблема связана с выбором наиболее оптимального метода решения стержневой статически неопределимой системы, с чем соглашаются все исследователи, с другой стороны, в литературных источниках приведено большое количество методов и программных продуктов, позволяющих решать специфические задачи динамического поведения трубопроводов. Здесь уместно сделать следующее замечание. Многие методы и программные продукты не обеспечивают непрерывность решения при переходе от статики к динамике (а ведь, собственно, где между ними граница?). При нагружении часть времени конструкция может находиться в квазистатических условиях, когда допустимо и уместно пользоваться статическими подходами, а часть – в быстротекущих динамических условиях. Во многих комплексах при решении, например, задач о колебаниях используются дискретные модели, в то время как при решении статических задач – непрерывные дифференциальные модели. Это требует совершенно другой организации вычислений. Очевидно, предпочтительными являются такие методы динамического анализа, которые и организацией вычислений и формой представления исходных уравнений сводятся к соответствующим статическим постановкам.

Основная цель данного сообщения заключается в разработке технических особенностей применения метода динамических жесткостей для анализа пространственных многоопорных и многоконтурных стержневых систем. Основное требование к методу – обеспечение непрерывности и одинаковой технологии реализации динамического и статического [4] решений.

Вторая проблема, которой будет посвящено сообщение 2, менее очевидна и связана с локальными податливостями стержней (балок) при динамическом нагружении. Так, жесткостные свойства прямых труб при динамическом нагружении полностью соответствуют таковым свойствам прямых стержней. При установлении характеристик их сечений непосредственно используются обычные теории балок Эйлера–Бернулли либо Тимошенко–Рейснера. Особенности динамического поведения учитываются путем ввода сил инерции для сечения в целом. Именно поэтому нормативные документы [1, 2], программные продукты, практика научно-исследовательских работ [5, 6] предполагают использование статически определенных жесткостных свойств сечений. Однако длягиба трубы применение статических свойств может приводить к существенным неточностям.

Особенность деформированиягиба трубы состоит в том, что при приложении внешних изгибающих моментов перпендикулярно его оси возникают дополнительные перерезывающие силы, приводящие к овализации поперечного сечения (см., например, [7–9]). Это приводит к изменению характера распределения напряжений и увеличению податливостигиба по сравнению с податливостью прямой трубы одинакового поперечного сечения. При этом известное дифференциальное уравнение связи угла поворота θ с изгибающим моментом M длягиба трубы как криволинейного стержня записывается следующим образом:

$$\frac{dW}{dx} = \frac{KM}{EI}, \quad (1)$$

где E – модуль упругости; I – момент инерции сечения; K – коэффициент увеличения податливостигиба по сравнению с податливостью прямой трубы с такой же формой поперечного сечения, в линейной постановке K является постоянной величиной, определяемой радиусом сечения, толщиной стенки, радиусом кривизны [9]; x – осевая (продольная) координата.

При динамических процессах характеристика K также зависит от скорости процесса нагружения. В этом случае коэффициент K может многократно превышать значение K при статическом нагружении.

1. Метод динамических жесткостей. Вопрос о линейной динамике стержней рассматривается в многочисленных литературных источниках. Среди известных методов гармонического анализа отметим три наиболее распространенных. Метод конечных элементов (МКЭ) имеет длительную историю и является наиболее универсальным и широко применимым. Однако, несмотря на это, все еще существуют проблемы точности расчета, например, при анализе колебаний очень тонкостенных криволинейных стержней.

Не вдаваясь в их причины, отметим, что они могут быть решены путем увеличения порядка аппроксимирующих функций [10–12] и в пределе использованием точных решений уравнений движения, как и в методе динамических жесткостей. В последнее время широко применяются методы дифференциальных квадратур (МДК). Суть метода состоит в замене частных производных по пространственным координатам в дискретных точках некоторой линейной комбинацией значений функции в этих точках, т.е. дифференциальное уравнение заменяется алгебраическим. Метод успешно используется при анализе колебаний пространственных стержней [13], однако возникают проблемы в сопряжении разных элементов и при рассмотрении сложных систем. Кроме того, метод позволяет определять ограниченное число собственных форм колебаний.

Метод динамических жесткостей (МДЖ) – наиболее распространенный при анализе динамического поведения стержней. Он был предложен в начале 40-х гг. XX ст. за рубежом В. Колоушеком [14], а в нашей стране – Ф. М. Диментбергом [15, 16] и М. Л. Кемпнером [17]. На наш взгляд, его основное преимущество – возможность представления в виде метода начальных параметров (МНП). Суть метода состоит в том, что значения переменных в конце однородного участка могут быть записаны посредством матрицы перехода, зависящей от жесткостных характеристик сечения, через значения переменных в начале участка. Благодаря использованию МДЖ совместно с методом прогонки (последовательное перемножение n матриц перехода позволяет получить связь между переменными в начале первого участка и в конце n -го), который резко уменьшает размерность решаемых задач, можно эффективно решать сложные стержневые системы [18]. Еще одно преимущество МДЖ заключается в том, что для каждого участка используется точное решение балки и при любом конечном разбиении системы на участки можно точно определить сколь угодно большое число характеристических форм и чисел колебаний. Перейдем к сути МДЖ применительно к решению сложных пространственных трубопроводных систем.

Запишем уравнения движения для прямого стержня. Правила знаков для стержня при пространственном нагружении показаны на рис. 1, где N – осевая сила; Q_y, Q_z – поперечные силы вдоль осей y и z ; K_x – крутящий момент; K_y – изгибающий момент относительно оси y ; K_z – изгибающий момент относительно оси z . Перемещения U, W_y, W_z направлены вдоль осей x, y, z соответственно; это же относится и к силам N, Q_y, Q_z . Углы поворота ψ, θ_y, θ_z считаются положительными, если вращение происходит по часовой стрелке вокруг соответствующей оси x, y, z ; это же относится и к глобальным моментам K_x, K_y, K_z . Для простоты решения будем использовать балку Эйлера, уравнения движения для которой записываются следующим образом [19].

При поперечных колебаниях в плоскости xu :

$$\frac{d^4 W_y}{dx^4} - \frac{\rho F \omega^2}{EI_z} W_y = 0, \quad \frac{dW_y}{dx} = \theta_y, \quad \frac{d\theta_z}{dx} = -\frac{K_z}{EI_z}, \quad \frac{dK_z}{dx} = -Q_y; \quad (2a)$$

при поперечных колебаниях в плоскости xz :

$$\frac{d^4 W_z}{dx^4} - \frac{\rho F \omega^2}{EI_y} W_z = 0, \quad \frac{dW_z}{dx} = -\theta_y, \quad \frac{d\theta_y}{dx} = -\frac{K_y}{EI_y}, \quad \frac{dK_y}{dx} = Q_z; \quad (26)$$

при продольных колебаниях:

$$\frac{d^2 U}{dx^2} + \frac{\rho \omega^2}{E} U = 0, \quad \frac{dU}{dx} = -\frac{N_x}{EF}; \quad (2в)$$

при крутильных колебаниях:

$$\frac{d^2 \psi}{dx^2} + \frac{\rho I_p \omega^2}{GI_{кр}} \psi = 0, \quad \frac{d\psi}{dx} = -\frac{K_x}{GI_{кр}}, \quad (2г)$$

где I_z, I_y – моменты инерции сечения относительно осей z, y соответственно; $I_{кр}, I_p$ – крутящий и полярный моменты инерции; ρ – плотность материала; G – модуль сдвига; ω – частота колебаний.

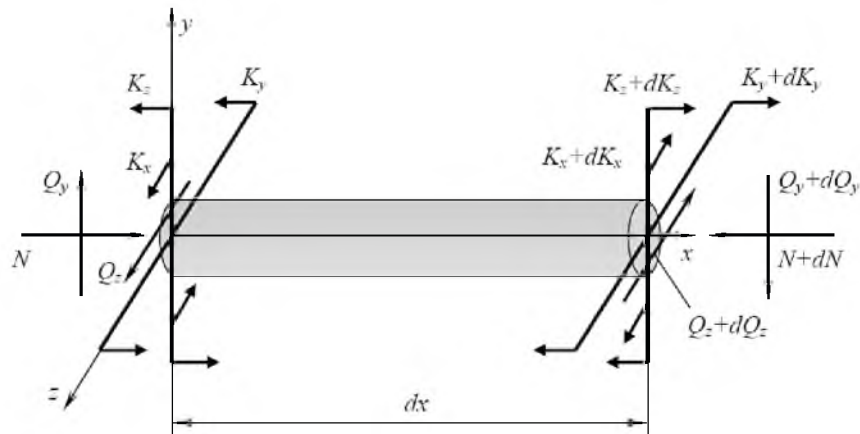


Рис. 1. Правила знаков для стержня при пространственном нагружении.

Суть МДЖ поясним на примере решения уравнения колебаний прямых стержней в плоскости $xу$. Аналитическое решение уравнения (2а) в виде, пригодном для использования в методе начальных параметров, записывается через функции Крылова:

$$\begin{cases} W_y = W_{y0} Y_1(k_y x) + \frac{\theta_{z0}}{k_y} Y_2(k_y x) - \frac{K_{z0}}{EI_z k_y^2} Y_3(k_y x) + \frac{Q_{y0}}{EI_z k_y^3} Y_4(k_y x); \\ \theta_z = \theta_{z0} Y_1(k_y x) - \frac{K_{z0}}{EI_z k_y} Y_2(k_y x) + \frac{Q_{y0}}{EI_z k_y^2} Y_3(k_y x) + k_y W_{y0} Y_4(k_y x); \end{cases} \quad (3а)$$

$$\begin{cases} K_z = K_{z_0} Y_1(k_y x) - \frac{Q_{y_0}}{k_y} Y_2(k_y x) - W_{y_0} k_y^2 EI_z Y_3(k_y x) - \\ \quad - \theta_{z_0} k_y EI_z Y_4(k_y x); \\ Q_y = Q_{y_0} Y_1(k_y x) + W_{y_0} k_y^3 EI_z Y_2(k_y x) + \theta_{z_0} k_y^2 EI_z Y_3(k_y x) - \\ \quad - K_{z_0} k_y Y_4(k_y x), \end{cases} \quad (36)$$

где $k_y^4 = \frac{\rho F \omega^2}{EI_z}$; индекс 0 указывает на принадлежность к началу рассматриваемого участка.

Функции Крылова имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} Y_1 &= \frac{1}{2}(\cos k_y x + \operatorname{ch} k_y x); & Y_2 &= \frac{1}{2}(\sin k_y x + \operatorname{sh} k_y x); \\ Y_3 &= \frac{1}{2}(\operatorname{ch} k_y x - \cos k_y x); & Y_4 &= \frac{1}{2}(\operatorname{sh} k_y x - \sin k_y x). \end{aligned} \quad (4)$$

Их особенность состоит в том, что $Y_1(0) = 1$, $Y_2(0) = Y_3(0) = Y_4(0) = 0$. Таким образом, по уравнениям (3) можно получить связь между параметрами в начале участка (обозначим его номер нижним индексом i) и в конце; обобщенно они могут быть представлены в виде

$$\vec{W}_i^e = [A(\omega, x_i^e)] \vec{W}_i^b, \quad (5)$$

где индекс e обозначает принадлежность к концу участка, b – к началу участка; матрица $[A(\omega, x)]$ определяется уравнениями (3); вектор $\vec{W}(x)$ состоит из четырех компонент (3).

Из условия непрерывности решения очевидно, что значения всех параметров в начале следующего участка равны соответствующим значениям параметров в конце предыдущего участка:

$$\vec{W}_{i+1}^b = \vec{W}_i^e. \quad (6)$$

Последовательно применяя уравнения (5) и (6) к N последовательным участкам, можно получить связь между параметрами в конце n -го участка и в начале первого участка:

$$\vec{W}_n^e = [A_n(\omega)] \vec{W}_1^b, \quad (7a)$$

где матрица перехода $[A_n(\omega)]$ записана в виде произведения локальных матриц:

$$[A_n(\omega)] = \prod_{i=1}^n [A(\omega, x_{n-i+1}^e)]. \quad (7b)$$

Заметим, что уравнения (5), (6) позволяют без увеличения трудоемкости рассматривать последовательное соединение участков, имеющих разное сечение, свойства и т.д., как единый участок, что существенно ускоряет расчет.

Аналогично рассматриваются и решаются уравнения (2б)–(2г). Для полноты изложения приведем решения для (2в) и (2г):

$$U = U_0 \cos k_x x - \frac{N_0}{EFk_x} \sin k_x x; \quad (8a)$$

$$N = U_0 EFk_x \sin k_x x + N_0 \cos k_x x; \quad (8б)$$

$$\psi = \psi_0 \cos k_x x - \frac{K_{x_0}}{GI_{кр} k_{кр}} \sin k_{кр} x; \quad (9a)$$

$$K_x = \psi_0 GI_{кр} k_{кр} \sin k_{кр} x + K_{x_0} \cos k_{кр} x, \quad (9б)$$

где

$$k_x^2 = \frac{\rho}{E}; \quad k_{кр}^2 = \frac{\rho I_p}{GI_{кр}}.$$

Основное преимущество МДЖ перед двумя другими методами заключается в том, что анализ динамического поведения стержневой системы при гармоническом возбуждении подобен статическому и нет необходимости разрабатывать для него отдельную процедуру.

2. Применение метода для динамического анализа сложных систем.

2.1. *Моделирование гибов трубы с помощью прямых стержней.* Главный недостаток решений, используемых для анализа трубопроводных систем, описанных в р. 1, состоит в том, что они не обеспечивают непрерывность решения при постепенном повороте осей трубопровода (например, при движении вдоль гiba трубы). Дело в том, что переменные, входящие в уравнения (2), становятся связанными. В постановке Эйлера уравнения для гiba трубы как криволинейного стержня записываются так [19].

При колебаниях в плоскости кривизны:

$$\frac{d^4 W_y}{B_0^4 d\xi^4} + \frac{d^3 U}{B_0^4 d\xi^3} + \frac{W_y F}{I_z B_0^2} K - \frac{dU}{d\xi} \frac{F}{B_0^2 I_z} + K \frac{\rho F \omega^2 W_y}{EI_z} = 0; \quad (10a)$$

$$\frac{d^3 U}{d\xi^3} + \frac{dU}{d\xi} - \frac{d^2 W_y}{d\xi^2} - W_y + \frac{B_0^2 \rho \omega^2}{E} (W_y - \frac{dU}{d\xi}) = 0; \quad (10б)$$

при колебаниях из плоскости кривизны:

$$\frac{d^4 W_z}{d\xi^4} - \frac{GI_{кр}}{EI_y} \frac{d^2 W_z}{d\xi^2} + B_0 \left(1 + \frac{GI_{кр}}{EI_y} \right) \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - K \frac{\rho F B_0^4 \omega^2}{EI_y} W_z = 0; \quad (11a)$$

$$\left(1 + \frac{GI_{кр}}{EI_y}\right) \frac{d^2 W_z}{d\xi^2} - B_0 \left(\frac{GI_{кр}}{EI_y} \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} - \psi\right) = 0, \quad (116)$$

где B_0 – радиус гiba; ξ – текущий угол гiba.

Эти уравнения записаны для примера. Возможны также другие постановочные уравнения, учитывающие, например, свойства балки Тимошенко, анизотропию свойств и т.д. Существуют два пути решения проблемы криволинейных стержней. Первый путь – непосредственное решение уравнений вида (10), (11), что является очень сложной задачей, связанной с необходимостью решения дифференциальных уравнений 6-го порядка. В современной литературе этому вопросу посвящено большое количество работ (например, [20]). Так, в [21] приводится точное решение для криволинейного стержня с постоянным поперечным сечением при колебаниях в плоскости. В работах [22, 23] анализируются собственные колебания криволинейных балок из плоскости с получением динамических матриц жесткости. Были получены матрицы жесткости для кривых балок как с постоянным, так и переменным поперечным сечением. Однако эти решения носят частный характер и не в состоянии рассмотреть все возможные случаи. Попытка расширить полученные решения для большего класса геометрий или условий нагружения представляет трудности. Поэтому, на наш взгляд, необходимо найти более простой способ получения динамической матрицы жесткости для криволинейных стержней в разных постановках.

В современных условиях предпочтительно использовать более простые аналитические решения, а все трудные моменты решать с помощью компьютера, а именно: использовать уравнения типа (7), где матрица перехода для сложного случая получается как произведение более простых матриц. Наш опыт расчета статического напряженно-деформированного состояния (НДС) показал, что нет необходимости получать сложные аналитические решения для криволинейного стержня. Численное решение с достаточно высокой степенью точности может быть получено, если кривой стержень заменить прямыми участками, а сопряжение на границах проводить с учетом скачка угла между двумя локальными системами координат. Аналогичный прием применяется в литературных источниках для решения статических задач [24].

Формально этот технический прием представляется следующим образом. Пусть два прямолинейных участка сопрягаются под некоторым углом ϕ_i с конечным значением и первый из элементов по направлению обхода стержневой системы имеет порядковый номер i . Тогда на границе сопрягаемых участков из условия равенства всех 12 параметров (по три параметра усилий, моментов, перемещений и углов) в глобальных координатах устанавливается матрица связи между значениями параметров в конце предыдущего и начальными значениями последующего участка в локальных координатах:

$$\vec{W}_{i+1}^b = [B(\phi_i)] \vec{W}_i^e, \quad (12)$$

где $[B(\phi_i)]$ – матрица связи, значение элементов которой устанавливается из следующих уравнений:

$$\begin{cases} Q_{y,i+1}^b = Q_{y,i}^e \cos \phi_i - N_i^e \sin \phi_i; & \theta_{z,i+1}^b = \theta_{z,i}^e; \\ Q_{z,i+1}^b = Q_{z,i}^e; & \theta_{y,i+1}^b = \theta_{y,i}^e \cos \phi_i - \psi_i^e \sin \phi_i; \\ N_{i+1}^b = N_i^e \cos \phi_i + Q_{y,i}^e \sin \phi_i; & \psi_{i+1}^b = \psi_i^e \cos \phi_i + \theta_{y,i}^e \sin \phi_i; \\ K_{z,i+1}^b = K_{z,i}^e; & W_{y,i+1}^b = W_{y,i}^e \cos \phi_i - U_i^e \sin \phi_i; \\ K_{y,i+1}^b = K_{y,i}^e \cos \phi_i - K_{x,i}^e \sin \phi_i; & W_{z,i+1}^b = W_{z,i}^e; \\ K_{x,i+1}^b = K_{x,i}^e \cos \phi_i + K_{y,i}^e \sin \phi_i; & U_{i+1}^b = U_i^e \cos \phi_i + W_{y,i}^e \sin \phi_i. \end{cases} \quad (13)$$

Поскольку матрица $[B(\phi_i)]$ выполняет только функцию поворота между сопрягаемыми сечениями, назовем ее поворотной, а сам элемент, в котором происходят указанные преобразования координатных систем, – поворотным.

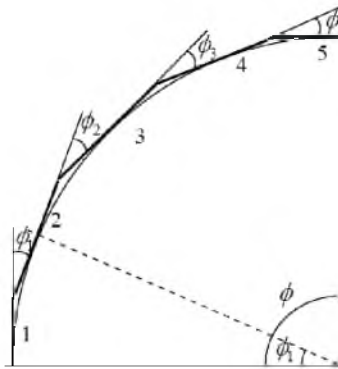


Рис. 2. Схема замены криволинейного стержня прямыми участками. (Цифрами 1–5 обозначены номера прямых участков.)

Перейдем к процедуре применения метода прогонки в случае наличия поворотных элементов. На рис. 2 приведен пример схемы моделированиягиба с использованием пяти прямых стержней и четырех поворотных элементов. Если считать, что уравнения (5) связи между параметрами в начале и в конце участка записаны для всех 12 неизвестных, то аналогично (7) можно получить связь между параметрами в конце n -го участка и в начале первого:

$$\vec{W}_n^e = [C_n(\omega)]\vec{W}_1^b, \quad (14a)$$

где матрица перехода $[C_n(\omega)]$ с учетом поворотных элементов может быть записана в виде произведения локальных матриц:

$$[C_n(\omega)] = \prod_{i=1}^n [A(\omega, x_{n-i+1}^e)][B(\phi_{n-i})]. \quad (14b)$$

Завершают постановку задачи правила обхода сложной пространственной стержневой системы для составления уравнений связи, уравнений для опор и условий сопряжения при наличии сосредоточенных сил и моментов.

Все эти процедуры и уравнения абсолютно идентичны таковым при статическом анализе [25]. С их использованием был разработан программный комплекс “3D PipeMaster” для расчета НДС сложных трубопроводов.

2.2. *Определение собственных частот колебаний.* Одной из важных задач динамического анализа является определение спектра собственных частот. Обычно собственные частоты находят из условия равенства нулю определителя динамической матрицы жесткости. С этой целью применяют графические либо итерационные методы. Недостаток подобного подхода для определения собственных частот состоит в том, что такая процедура не нужна в статическом анализе, и для динамического анализа ее нужно создавать специально. Другой недостаток – пользователь не может из найденного спектра частот выделить те, которые соответствуют интересующей его форме колебаний (поперечная, продольная и т.д.). Для трехмерной модели применение такого подхода нецелесообразно. Поэтому для поиска собственных частот будем применять метод “размыкания по перемещениям”.

Суть данного метода состоит в следующем. На границе двух сопрягаемых элементов из одного условия сопряжения убираем одно уравнение равенства для определенной компоненты перемещений (например, W_y) и вместо него записываем условие равенства соответствующей силы Q_y какому-то ненулевому числу, например $Q_y = 1000$. Тогда с помощью графического или итерационного метода находим такие частоты, при которых разомкнутые перемещения равны друг другу. Фактически это означает, что существует нетривиальное решение, при котором все граничные условия и условия сопряжения выполняются. Достоинством метода является то, что пользователь заранее знает, что, по крайней мере, для заданной частоты интересующее его перемещение не равно нулю. Это дает возможность расчетчику контролировать правильность полученного результата с помощью последовательного размыкания системы в разных точках.

Применение метода размыкания по перемещениям было проверено при решении большого количества задач для прямых стержней, в том числе для многопролетных балок, с различными условиями закрепления. При этом установлена высокая точность определения собственных частот. Ниже покажем корректность модели криволинейного стержня, набранного из прямых участков, на примере расчета собственных частот и сопоставления их с известными данными.

3. Примеры применения метода.

3.1. *Вынужденные гармонические колебания прямой балки.* В качестве примера проанализируем гармоническое нагружение шарнирно опертой балки Эйлера длиной l , к центру которой приложена возмущающая сила

$$P(t) = P_0 \cos \omega t, \quad (15)$$

где P_0 – амплитуда внешней нагрузки.

С помощью программного комплекса “3D PipeMaster” были рассчитаны амплитудные значения изгибающего момента M в точке приложения силы в зависимости от частоты колебаний. Результаты расчета полностью совпадают с теоретическим решением, которое записывается следующим образом [19]:

$$M(l/2) = \frac{P_0 l}{4} \frac{1}{2\gamma} (\operatorname{tg} \gamma + \operatorname{th} \gamma), \quad (16)$$

где

$$\gamma = \frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{\rho F \omega^2 l^4}{EI}}.$$

3.2. *Колебания замкнутого кольца.* В этом и последующих примерах криволинейный стержень будем строить из прямых участков, образующих описанный многоугольник. Для замкнутого кольца ввиду условия периодичности перемещений, которые принимаются в виде тригонометрических рядов, выражения для собственных частот легко получаются теоретически и они известны [19]:

при колебаниях в плоскости кривизны (без учета деформации срединной поверхности):

$$\omega = \sqrt{\frac{EI_{\perp}}{\rho F B_0^4} \frac{n^2(n^2 - 1)^2}{n^2 + 1}}, \quad n \geq 2; \quad (17a)$$

при колебаниях из плоскости кривизны:

$$\omega = \frac{n^2(n^2 - 1)}{\sqrt{n^2 \frac{GI_{кр}}{EI_y} + 1}} \sqrt{\frac{GI_y}{\rho F B_0^4}}, \quad n \geq 2. \quad (17b)$$

В табл. 1 представлены данные сопоставления значений теоретических частот (13) и найденных по предлагаемому подходу. Расчеты проведены для кривого стержня с круглым сплошным поперечным сечением, имеющего такие параметры: $E = 2 \cdot 10^6$ МПа; $G = 8 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,3$; $\rho = 8000$ кг/м³; $B_0 = 2$ м; $R = 0,1$ м (радиус трубы).

Т а б л и ц а 1

Значения собственных частот при колебании замкнутого кольца

n	Колебания	
	в плоскости кривизны	из плоскости кривизны
2	$\frac{167,7051}{167,5690}$	$\frac{163,6634}{163,3600}$
3	$\frac{474,3416}{473,8570}$	$\frac{468,5213}{467,3710}$
4	$\frac{909,5086}{908,4868}$	$\frac{902,8939}{900,3910}$
5	$\frac{1470,8710}{1469,1460}$	$\frac{1463,8510}{1459,6620}$

Примечание. Над чертой приведены теоретические данные, под чертой – полученные по предложенному методу.

Результаты расчетов первых четырех собственных частот для замкнутого криволинейного стержня (табл. 1) указанным методом свидетельствуют о высокой точности полученных результатов по сравнению с теоретическими значениями (17). Незначительное расхождение обусловлено неучетом сжимаемости срединной поверхности стержня в теоретическом решении.

3.3. *Колебания круговой арки.* Одним из преимуществ предлагаемого подхода является то, что используются только уравнения для прямых стержней, которые могут быть легко преобразованы для самых разных случаев нагружения и форм поперечного сечения. Так, в постановке Тимошенко с учетом сдвига и момента инерции вращения рассматриваемого сечения, что необходимо в случае коротких длин волн колебаний, уравнение (2а) принимает вид

$$EI_z \frac{d^4 W_y}{dx^4} + \rho I_z \omega^2 \left(1 + \frac{E}{kG}\right) \frac{d^2 W_y}{dx^2} - \rho F \omega^2 W_y \left(1 - \frac{\rho I_z \omega^2}{kGF}\right) = 0, \quad (18)$$

где k – коэффициент формы сечения.

Решение уравнения (18) тривиально и записывается аналогично (3) в удобной форме для применения МНП при расчете НДС стержневой системы. Оценим эффект влияния сдвига и момента инерции вращения на значения собственных частот и сопоставим полученные значения с приведенными в литературных источниках.

В табл. 2 представлены результаты расчета безразмерной первой собственной частоты колебаний $\lambda = \omega L^2 \sqrt{\frac{\rho F}{EI_z}}$ при колебаниях в плоскости кривизны круговой арки с углом дуги $\xi = 45$ и 90° . Условие закрепления – жесткая заделка на обоих концах арки. Частота λ рассчитывается для трех случаев: с учетом растяжимости срединной поверхности стержня; растяжимости срединной поверхности и момента инерции вращения и растяжимости срединной поверхности, момента инерции вращения и сдвига.

В табл. 3 приведены результаты расчета безразмерной первой собственной частоты колебаний $\gamma = \omega^2 B_0^4 \frac{\rho F}{GI_y}$ при колебаниях из плоскости кривизны круговой арки в зависимости от угла дуги ξ и параметра $\eta = \frac{GI_{кр}}{EI_y}$.

Условие закрепления – жесткая заделка на обоих концах арки. Параметр γ определен с учетом влияния растяжимости срединной поверхности стержня.

Как видно из данных табл. 2 и 3, наблюдается хорошее соответствие между полученными значениями расчетных параметров λ и γ и приведенными в литературных источниках. Такая высокая точность полученных результатов свидетельствует о корректности модели криволинейного стержня, образуемого прямыми участками, и высокой эффективности метода размыкания по перемещениям, используемого при определении собственных частот колебаний.

Т а б л и ц а 2

Значения параметра λ при колебаниях круговой арки в плоскости кривизны

L/r	ξ , град	С учетом растяжимости				
		срединной поверхности		срединной поверхности и момента инерции вращения		срединной поверхности, момента инерции вращения и сдвига
		[26]	Наши данные	[27]	Наши данные	Наши данные
25	45	27,33	27,310	–	27,05	25,040
50		39,03	39,025	–	38,92	38,570
100		60,08	60,000	–	59,93	58,740
12,5	90	26,35	26,000	–	25,20	26,690
25		–	38,070	37,81	37,69	36,590
50		55,37	55,490	54,98	54,91	50,920
100		55,73	55,640	55,63	55,60	54,473
150		55,78	55,770	55,74	55,72	55,208
200		55,81	55,790	55,79	55,77	55,476
250		55,81	55,810	55,80	55,79	55,600
300		55,82	55,810	55,81	55,80	55,665
350		–	55,820	55,83	55,81	55,710
400		–	55,820	55,83	55,81	55,740
500		55,84	55,820	55,84	55,82	55,750

Примечание. $L = B_0\xi$ – длина арки; $r = \sqrt{I_z/F}$ – радиус инерции сечения.

Т а б л и ц а 3

Значения параметра $\gamma = \omega^2 B_0^4 \frac{\rho F}{GI_y}$ при колебаниях круговой арки

из плоскости кривизны с учетом растяжимости срединной поверхности оси

ξ , рад	η	γ	
		[28]	Наши данные
π	0,005	47,6000	47,5990
	0,200	13,3600	13,3540
	0,500	6,3340	6,3270
	1,000	3,3750	3,3690
	1,625	2,1340	2,1250
$3\pi/2$	0,005	3,3040	3,3030
	0,200	1,6460	1,6460
	0,500	0,9548	0,9544
	1,000	0,5776	0,5771
	1,625	0,3939	0,3934
2π	0,005	0,4540	0,4532
	0,200	0,3350	0,3350
	0,500	0,2533	0,2533
	1,000	0,1915	0,1915
	1,625	0,1528	0,1526

Заметим, что с увеличением искомой собственной частоты может иметь место несходимость решения из-за того, что собственные решения уравнений вида (2) или (18) описываются функциями вида $e^{-\beta x}$ и $e^{\beta x}$, где собственные числа β пропорциональны $\sqrt{\omega}$. Если длина L_p участка “прогонки” большая, например $L_p > (6 - 8)/\beta$, то ошибки вычислений очень быстро накапливаются. Поэтому для обеспечения устойчивости счета целесообразно процедуру прогонки организовывать на более коротких участках, что приводит к большему числу неизвестных в глобальной матрице вычислений.

Заключение. Разработан метод анализа динамического поведения сложных трубопроводных систем, рассматриваемых в качестве стержневых конструкций. При разработке метода использовались все преимущества МДЖ. В этом случае уравнения записываются по МНП, в связи с чем процедура решения подобна таковой для статической задачи.

Показано, что для кривых стержней необязательно отыскивать точные решения дифференциальных уравнений движения. Гораздо проще и эффективнее применять модель криволинейного стержня, образуемого прямыми участками. Любые сложные системы можно рассчитывать с помощью прямых труб, решения для которых могут быть легко получены.

При определении спектра собственных частот колебаний пространственных стержневых систем удобно пользоваться методом размыкания по перемещениям, который сразу выделяет частоты, соответствующие разным формам колебаний (поперечные, продольные и т.д.). Точность метода проиллюстрирована при расчетах собственных частот колебаний для прямых и криволинейных стержней. Для прямых стержней проведено также моделирование вынужденных гармонических колебаний. Установлено хорошее соответствие между полученными, теоретическими и литературными данными.

Резюме

Методом динамічних жорсткостей проаналізовано динамічну поведінку трубопроводів як стрижневої системи. Згідно з методом, рівняння зв'язку між невідомими параметрами записуються за допомогою методу початкових параметрів, що робить процедуру розв'язку подібною до статичної задачі. Показано, що для криволінійних стрижнів набагато простіше й ефективніше застосовувати модель, що складається з прямих ділянок і безінерційних поворотних елементів. Для визначення власних частот коливань просторових стрижневих систем пропонується використовувати метод розмикання по переміщеннях, що дозволяє відразу виділяти частоти, які відповідають різним формам коливань (поперечні, поздовжні і т.п.). Підхід дозволяє коректно моделювати поведінку системи за вимушених коливань із гармонійною збуджуючою силою.

1. *Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок (ПНАЭ Г-7-002-86).* – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525с.

2. *ASME B31.3. Proceedings of Piping ASME.* – New York, 2002.
3. *American Lifelines Alliance. Seismic Design and Retrofit of Piping Systems,* 2002.
4. Орыняк И. В., Радченко С. А. Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 3. Расчет перемещений осигиба методом начальных параметров // Пробл. прочности. – 2004. – № 5. – С. 23 – 35.
5. *International Piping Integrity Research Group (IPIRG) Program. Program Final Report,* 1997.
6. *Melo F. J. M. Q., Carneiro J. A. O., Lopes H. R., et al. The dynamic analysis of piping systems using pseudo-dynamic techniques // J. Strain Analysis.* – 2001. – **36**. – P. 441 – 451.
7. *Karamanos S. A. Bending instabilities of elastic tubes // Int. J. Solids Struct.* – 2002. – **39**. – P. 2059 – 2085.
8. Аксельрад Э. Л., Ильин В. П. Расчет трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.
9. Орыняк И. В., Радченко С. А. Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // Пробл. прочности. – 2004. – № 3. – С. 23 – 51.
10. *Krisman A. and Surech Y. J. A simple cubic linear element for static and free vibration analysis of curved beams // Comp. Struct.* – 1998. – **68**. – P. 473 – 489.
11. *Meck H. R. An accurate displacement function for finite ring elements to circular arches // Ibid.* – 1980. – **11**. – P. 265 – 269.
12. *Dawe D. J. Curved finite elements for the analysis of shallow and deep arches // Ibid.* – 1974. – **4**. – P. 229 – 580.
13. *Kang K. J., Bert C. W., and Striz A. G. Vibration and buckling analysis of circular arches using DQM // Ibid.* – 1996. – **60**, No. 1. – P. 49 – 57.
14. *Kolousek V. Dynamics in Engineering Structures.* – London: Butterworths, 1973.
15. Диментберг Ф. М. Метод “динамической жесткости” в применении к определению частот колебаний систем с сопротивлением // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. – 1948. – № 10.
16. Диментберг Ф. М. Применение метода “динамической жесткости” для расчета связанных колебаний // Динамика и прочность коленчатых валов. – М.: Изд-во АН СССР, 1949.
17. Кемпнер М. Л. Методы динамических податливостей и жесткостей для расчета изгибных колебаний упругих систем со многими степенями свободы // Поперечные колебания и критические скорости. – М.: Изд-во АН СССР, 1951.
18. *Chen Shilin, Geradin M., and Lamine E. An improved dynamic stiffness method and modal analysis for beam-like structures // Comp. Struct.* – 1996. – **60**, No. 5. – P. 725 – 731.
19. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. – М.: Высш. шк., 1972. – 416 с.

20. *Kim Nam II and Kim Moon, Jr.* Exact dynamic element stiffness matrix of shear deformable non-symmetric curved beams subjected to initial axial force // *Struct. Eng. Mech.* – 2005. – **19**, No. 1. – P. 73 – 96.
21. *Howson W. P. and Jemah A. K.* Exact dynamic stiffness method for planar natural frequencies of curved Timoshenko beams // *Proc. Inst. Mech. Eng.* – 1999. – **213**. – P. 687 – 696.
22. *Lee S. Y. and Chao. J. C.* Exact solutions for out-of-plane vibration of curved nonuniform beams // *J. Appl. Mech.* – 2001. – **68**. – P. 186 – 191.
23. *Huang C. S., Tseng Y. P., Chang S. H., and Hung C. L.* Out-of-plane dynamic analysis of beams with arbitrarily varying curvature and cross-section by dynamic stiffness matrix method // *Int. J. Solids Struct.* – 2000. – **37**. – P. 495 – 513.
24. *Iwakuma T., Ikeda K., and Nishino F.* Consistency of straight-beam approximation of a thin-walled circular beam // *Comp. Struct.* – 1996. – **60**, No. 1. – P. 87 – 93.
25. *Орыняк И. В., Торон В. М., Ромащенко В. А., Жураховский С. В.* Расчет пространственного разветвленного трубопровода в программном комплексе оценки прочности оборудования АЭС // *Пробл. прочности.* – 1998. – № 2. – С. 87 – 100.
26. *Veletsos A. S., Austin W. J., Pereira C. A. L., and Wung S. J.* Free in-plane vibration of circular arches // *J. Eng. Mech. ASCE.* – 1972. – **98**. – P. 311 – 329.
27. *Austin W. J. and Veletsos A. S.* Free vibration of arches flexible in shear // *Ibid.* – 1973. – **99**. – P. 735 – 753.
28. *Ojalvo U.* Coupled twisting-bending vibrations of incomplete elastic rings // *Int. J. Mech. Sci.* – 1962. – **4**. – P. 53 – 72.

Поступила 21. 11. 2005