

Динамическая задача для несжимаемого многослойного цилиндра с винтовой анизотропией. Сообщение 2. Расчеты*

В. А. Ромашенко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Для слабосжимаемых упругих спирально ортотропных многослойных цилиндров в условиях плоской деформации, нагруженных внутренним импульсным давлением, численно исследован характер сходимости одномерных волновых решений к полученным ранее автором аналитическим зависимостям для несжимаемых толстостенных оболочек. Предложен инженерный аналитический приближенный метод оценки динамического напряженно-деформированного состояния неоднородных спирально армированных толстостенных цилиндрических оболочек.

Ключевые слова: спиральная ортотропия, несжимаемость, многослойный толстостенный цилиндр, волновая динамика.

Исследуем сходимость волновых решений для цилиндров из слабосжимаемых материалов (при выполнении условия (12) и стремлении v_{ij} к значениям (7)) к полученным ранее [1] аналитическим зависимостям, справедливым в предположении несжимаемости, с привлечением численных методов интегрирования гиперболических краевых задач. Рассмотрим двухслойный спирально ортотропный цилиндр: внутренний радиус $R_1 = 0,1$ м; наружный радиус $R_2 = 0,12$ м; толщины слоев равны $h_1 = h_2 = (R_2 - R_1)/2 = 0,01$ м. Слои выполнены из одного и того же ортотропного композиционного материала (КМ), но с различными углами армирования (направлениями главных осей анизотропии): для внутреннего слоя $\alpha_1 = -\pi/6$, для внешнего $\alpha_2 = \pi/3$. Физико-механические характеристики КМ следующие [2]: $E_x = E_r = 14000$ МПа; $E_\varphi = 56000$ МПа; $G_{x\varphi} = 5700$ МПа; $\rho = 2000$ кг/м³; требование (12) при этом удовлетворяется для обоих слоев.

Наружная поверхность оболочки свободна от нагрузок ($P_2(t) \equiv 0$), внутренняя подвержена импульсному давлению

$$P_1(t) = Q_0 e^{-t/T} H(t), \quad (34)$$

где $T = 10^{-5}$ с; $H(t)$ – функция Хевисайда.

Нагрузка типа (34) с разрывом на переднем фронте является типичной ударной нагрузкой, характерной для ударной волны, образующейся при взрыве некоторых видов взрывчатых веществ [3, 4].

В случае несжимаемого КМ значения коэффициентов поперечной деформации v_{ij} согласно (7) полагаем следующими: $v_{x\varphi} = 0,125$; $v_{\varphi r} = 0,5$; $v_{rx} = 0,875$, в случае слабосжимаемого КМ: $v_{x\varphi} = 0,12$; $v_{\varphi r} = 0,48$; $v_{rx} = 0,87$ и сжимаемого КМ [2]: $v_{x\varphi} = 0,07$; $v_{\varphi r} = 0,28$; $v_{rx} = 0,4$.

* Обозначения и ссылки на формулы соответствуют принятым в сообщении 1 [1], используется сквозная нумерация формул.

Для несжимаемого цилиндра функция $Y(t)$ из (18) при нагрузке (34) принимает вид

$$Y(t) = \frac{Q_0 T^2}{M(1 + \omega^2 T^2)} \left(e^{-t/T} - \cos \omega t + \frac{\sin \omega t}{\omega T} \right), \quad (35)$$

остальные неизвестные задачи также записываются в элементарных функциях по схеме (20), (13), (9). Варианты задачи для слабосжимаемого и сжимаемого КМ решались численно с использованием модифицированного алгоритма Уилкинса [3, 5].

Результаты аналитических и численных расчетов представлены на рис. 1–4. Изменение во времени безразмерного перемещения цилиндра в точке контакта слоев $r = (R_1 + R_2)/2$ иллюстрирует рис. 1. На рис. 2 показаны колебания безразмерных напряжений во внутренней точке внутреннего слоя $r = R_1 + 0$, на рис. 3 – во внешней точке наружного слоя $r = R_2 - 0$. Расхождение между кривыми 1 и 2 (рис. 1–4) незначительное, что свидетельствует о сходимости волновых решений для слабосжимаемого анизотропного цилиндра (при стремлении v_{ij} к значениям (7)) к аналитическим точным решениям для несжимаемого цилиндра. При этом по перемещению, а также по τ_{xp} наблюдается равномерная сходимость. Характер сходимости по остальным компонентам напряжений неравномерный. Поскольку напряжения являются функциями не только u , но и du/dr , естественно, равномерная сходимость по u не всегда будет гарантировать такую же сходимость по du/dr и, как следствие, по напряжениям. Особенно это касается волновых решений с сильными разрывами, которые всегда будут иметь место при ударных нагрузках типа (34) с разрывом на переднем фронте [6, 7]. Тем не менее сходимость по напряжениям в среднем, как видно из рис. 2–4, обеспечивается.

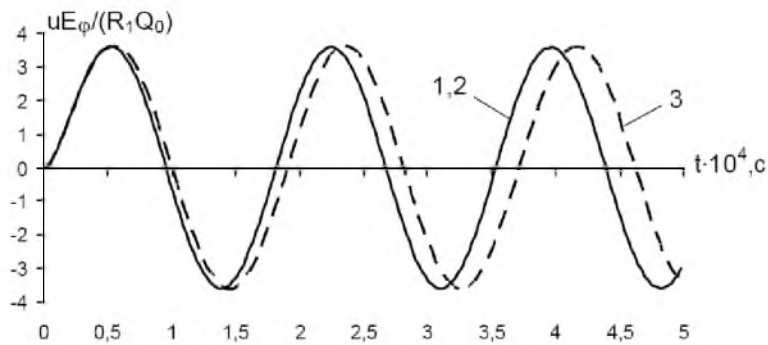


Рис. 1. Сравнительный анализ безразмерных перемещений срединного сечения двухслойного цилиндра. (Здесь и на рис. 2–4: 1 – аналитическое решение для несжимаемой оболочки; 2 – численное решение для слабосжимаемого КМ; 3 – численное решение для сжимаемого КМ.)

Функция (35) при времени $t \approx 5,2 \cdot 10^{-5}$ с достигает своего первого локального максимума, который также является глобальным. На рис. 4 представлено распределение окружного напряжения по толщине двухслойного цилиндра в указанный выше момент времени. Как и на рис. 1–3,

кривые 1 и 2 хорошо согласуются между собой. В цилиндре из сжимаемого композита частота и амплитуды колебаний немного ниже, чем в цилиндре из несжимаемого, о чем свидетельствуют кривые 3 (рис. 1–4).

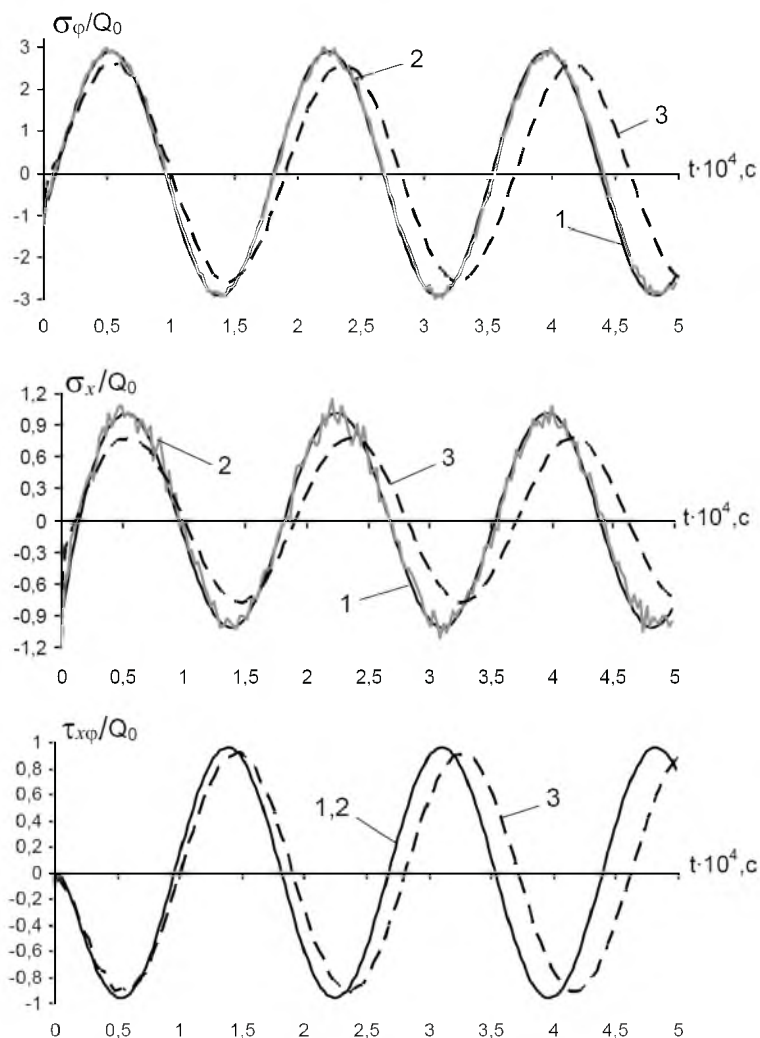


Рис. 2. Сравнительный анализ безразмерных напряжений на внутренней поверхности двухслойного цилиндра.

Пилообразная форма кривых 2 на рис. 2–4 объясняется тем, что в слабосжимаемом КМ величина скорости распространения упругих волн в условиях плоской деформации является достаточно большой. Поэтому за расчетное время по толщине двухслойного цилиндра происходит множество переотражений входного сигнала (34) как от свободных поверхностей, так и от поверхности раздела слоев. В случае ударной нагрузки типа (34) с разрывом на переднем фронте это будет приводить к пилообразному распределению напряжений как во времени, так и по толщине оболочки [6, 7]. В сжимаемых материалах скорость звука значительно меньше, и этот эффект проявляется гораздо слабее (на рис. 2–4 кривые 3).

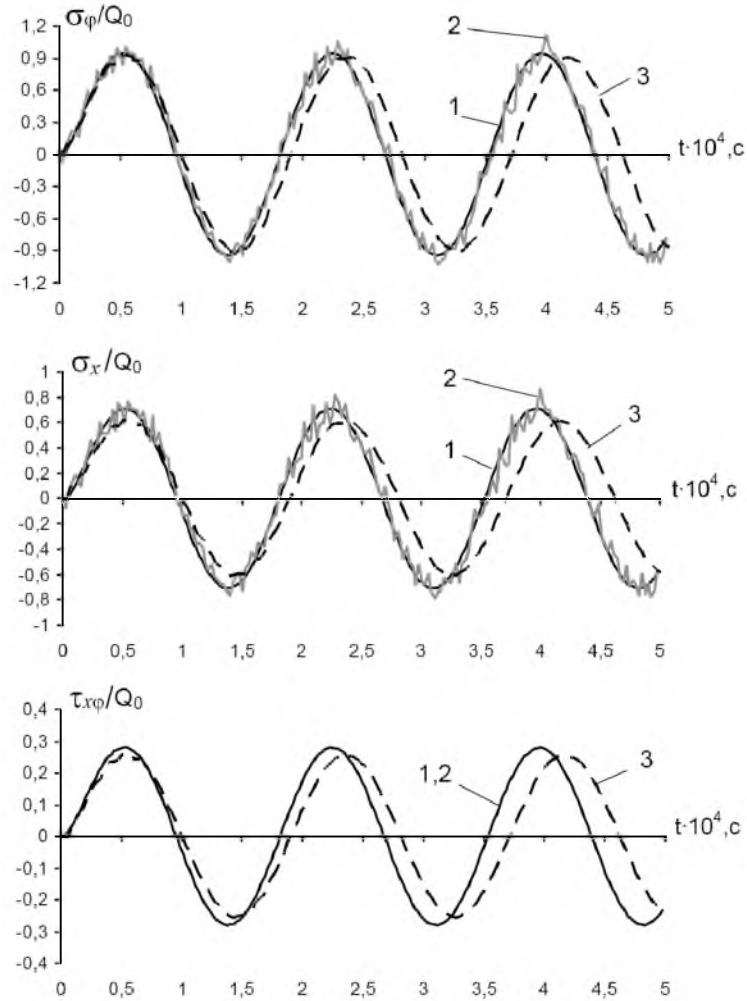


Рис. 3. Сравнительный анализ безразмерных напряжений на наружной поверхности двухслойного цилиндра.

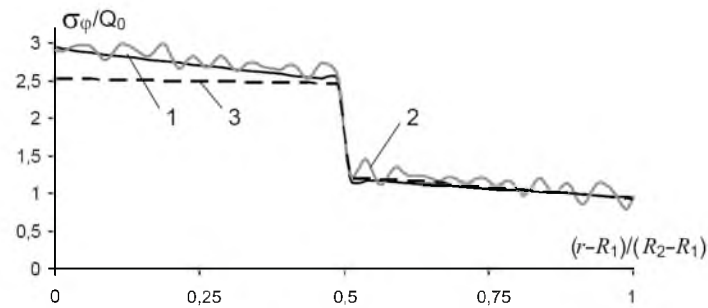


Рис. 4. Распределение σ_φ/Q_0 по толщине двухслойного цилиндра.

Рассмотрим случай разномодульных слоев. Геометрия двухслойного цилиндра и нагрузка соответствуют принятым выше. Решали задачу для двух вариантов: внутренний слой состоит из стали, наружный – из композита (сталь–КМ) и наоборот (КМ–сталь). Характеристики композита те же, что и

в предыдущих расчетах (для сжимаемого случая), угол армирования $\alpha = \pi/4$. Сталь полагаем изотропной: $E_i = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_{ij} = 0,3$; $\rho = 8000$ кг/м³.

Результаты сравнительного анализа напряженно-деформированного состояния двух цилиндров представлены в таблице. Приведены значения максимальных по модулю компонент напряжений и максимальной интенсивности напряжений σ_i , возникающих в цилиндре за расчетное время, равное периоду его радиальных колебаний.

Сравнительный анализ напряженно-деформированного состояния двух цилиндров с разномодульными слоями

Координата	σ_φ/Q_0	σ_x/Q_0	$\tau_{x\varphi}/Q_0$	σ_i/Q_0	$\omega \cdot 10^{-4}, \text{с}^{-1}$
Сталь-КМ					
$r = R_1$	4,920	2,450	0	4,280	4,830
	4,230	1,265	0	3,800	4,360
$r = R_2$	0,360	0,215	0,145	0,402	4,830
	0,390	0,220	0,163	0,436	4,360
КМ-сталь					
$r = R_1$	0,592	0,346	0,240	0,673	4,420
	0,588	0,314	0,260	0,724	4,080
$r = R_2$	4,000	2,000	0	3,460	4,420
	3,600	1,100	0	3,170	4,080

Примечание. Над чертой приведены данные аналитического расчета по модели несжимаемой оболочки, под чертой – данные уточненного численного расчета для сжимаемых слоев.

Из данных таблицы следует, что собственные частоты ω , рассчитанные по двум различным методам, отличаются незначительно, при этом значения частот, полученные по аналитическому расчету, несколько завышены. Рассогласование между результатами по определяющей компоненте напряжений σ_φ для данного вида нагружения является также незначительным, причем во всех случаях, за исключением варианта сталь – КМ в точке $r = R_2$, аналитические результаты идут в запас прочности. Рассогласование по остальным компонентам напряжений в некоторых вариантах может быть более существенным, при этом в основном аналитические результаты также идут в запас прочности, т.е. они несколько завышены. Аналитически определенные величины σ_i в более жестком материале (сталь) всегда несколько завышены по сравнению с реальными, положение в менее жестком слое (композит) – противоположное. Отметим, что для варианта КМ-сталь в точке $r = R_1$ согласно численному расчету из-за непропорционального уменьшения компонент напряжений для сжимаемых слоев по сравнению с величинами напряжений, полученными по несжимаемой модели, реальная интенсивность напряжений оказалась несколько большей, чем рассчитанная аналитически. Таким образом, при проведении прочностных расчетов необходимо учитывать, что непропорциональное уменьшение напряжений не всегда может идти в запас прочности. В рассмотренных задачах напряжения

в жестком слое на порядок выше таковых в мягком слое, при этом по всем компонентам и интенсивности напряжений аналитические результаты для жесткого слоя идут в запас прочности.

Представленные данные свидетельствуют о том, что аналитические решения (11), (17), (18), (20) позволяют точно описывать одномерную динамику несжимаемых неоднородных спирально ортотропных цилиндров в условиях плоской деформации и достаточно точно – слабосжимаемых.

В случае сжимаемых материалов решения (11), (17), (18), (20) можно использовать как первое приближение в проектировочных расчетах. Они дают немного завышенную частоту и несколько искаженную картину перемещений: например, при внутренней взрывной нагрузке амплитуда перемещения вблизи внутренней поверхности несколько занижена, вблизи наружной – завышена, в центральной части цилиндра – практически точная. По окружной (максимальной) и касательной компонентам напряжений аналитические решения дают также довольно близкие к реальным значения. В случае разномодульных оболочек в более жестких слоях осевые напряжения могут быть завышены в два раза. По интенсивности напряжений аналитические решения удовлетворительно согласуются с уточненными численными результатами с учетом сжимаемости слоев: при этом в более жестких слоях аналитические значения идут в запас прочности, в менее жестких – не всегда. Таким образом, в случае цилиндров с разномодульными слоями после аналитического проектировочного расчета необходимо проводить проверочный расчет по уточненным уравнениям, учитывающим реальную сжимаемость материалов.

Резюме

Для слабостисливых пружных спирально ортотропных багатослойных цилиндрів, що знаходяться в умовах плоскої деформації під дією внутрішнього імпульсного тиску, проведено числове дослідження характеру збіжності одновимірних хвильових розв'язків до отриманих раніше автором аналітичних залежностей для нестисливих товстостінних оболонок. Запропоновано інженерний аналітичний наближений метод оцінки динамічного напружено-деформованого стану неоднорідних спирально армованих товстостінних циліндричних оболонок.

1. *Ромащенко В. А.* Динамическая задача для несжимаемого многослойного цилиндра с винтовой анизотропией. Сообщ. 1. Теория // Пробл. прочности. – 2006. – № 2. – С. 114 – 123.
2. *Ашкенази Е. К., Ганов Э. В.* Анизотропия конструкционных материалов. Справочник. – Л.: Машиностроение, 1980. – 247 с.
3. *Лепихин П. П., Деменко В. Ф., Ромащенко В. А., Бабич Ю. Н.* Напряженно-деформированное состояние двухслойных цилиндрических матриц для штамповки бризантными взрывчатыми веществами и электрогидравлической штамповки // *Авіац.-косм. техніка і технологія.* – 2002. – Вип. 33. – С. 118 – 127.

4. *Ромащенко В. А., Тарасовская С. А.* Численное исследование динамики многослойных толстостенных спирально-ортотропных цилиндров // Пробл. прочности. – 2004. – № 6. – С. 99 – 110.
5. *Уилкинс М. Л.* Расчет упруго-пластических течений // Вычислительные методы в гидродинамике. – М.: Мир, 1967. – С. 212 – 263.
6. *Жарий О. Ю., Улитко А. Ф.* Введение в механику нестационарных колебаний и волн. – Киев: Вища шк., 1989. – 184 с.
7. *Ромащенко В. А.* Особенности отражения волн с сильными разрывами от тонких сжимаемых препятствий // Прикл. математика и механика. – 2003. – **67**, вып. 3. – С. 503 – 511.

Поступила 16. 06. 2005