

УДК 532.5

АСИМПТОТИЧНИЙ ПІДХІД ДО РІВНЯНЬ НАВ'Є-СТОКСА ПРИ ДОСЛІДЖЕННІ ІНТЕНСИВНОГО ПОВЕРХНЕВОГО МАСОПЕРЕНОСУ НА ТІЛАХ ОБЕРТАННЯ У ВИСОКОШВИДКІСНИХ ПОТОКАХ ГАЗУ

А. М. АНТОНОВ*, О. В. ЗАЙЦЕВ**, В. О. ЗАКРЕВСЬКИЙ*,
О. В. ХОРОШИЛОВ**

*Національний авіаційний університет, Україна,

**Київський національний університет імені Тараса Шевченка

Получено 17.02.2005

На основі асимптотичного аналізу рівнянь Нав'є-Стокса розглядаються постановки і розв'язання низки задач щодо інтенсивного поверхневого масопереносу на тілах обертання в над- та гіперзвукових потоках газу. Для тіл скінченної довжини розподіл вдуву задається степенною функцією. Інтенсивність інжекції відповідає режиму помірного та сильного вдуву. Дослідження розширені на випадки вдуву горючої суміші газів з врахуванням хімічних екзотермічних реакцій. Розроблений метод розв'язання крайових задач із вільною границею та процедура побудови загального розв'язку.

На основе асимптотического анализа уравнений Навье-Стокса рассматриваются постановки и решения ряда задач, связанных с проблемой интенсивного поверхностного массопереноса на телах вращения в сверх- и гиперзвуковых потоках газа. Для тел конечной длины распределение вдува задается степенной функцией. Интенсивность инъекции соответствует режимам умеренного и сильного вдува. Исследования расширены на случаи вдува горючей смеси газов с учетом химических экзотермических реакций. Разработан метод решения краевых задач со свободной границей и процедура построения общего решения.

In the papers on the basis of the asymptotic analysis of equations of Navier-Stokes the formulation and solutions of some of problems, that concerning with a problem intensive surface mass transfer on body of revolutions in super- and hypersonic gas flow are considered. For bodies with final length the distribution of an injection is set by an exponential function. The intensity of injection corresponds to modes moderated and large injection. The researches are expanded on cases of an injection of a combustion-mixture of gases with allowance for of chemical exothermic reactions. The method of the solution of boundary value problems with free boundary and procedure of construction of the general solution is developed.

ВСТУП

Ця робота присвячується 35-річчю створення на кафедрі аерогідромеханіки та тепломасообміну Київського національного університету імені Тараса Шевченка наукового напрямку щодо вивчення високошвидкісного обтікання тіл, скрізь поверхню яких здійснюється інтенсивний вдув маси газу, і є обзором деяких проведених досліджень. Відправною датою ми вважаємо вихід першої роботи [1], що була присвячена цій тематиці, авторами якої є А. П. Комашенко і А. М. Антонов, науковий керівник і лідер колективу.

Дослідження інтенсивного масопереносу на поверхні тіл, що знаходяться у високошвидкісному потоці газу, мають значний інтерес як для вдосконалення систем теплозахисту літальних апаратів, так і для розробки засобів керування їхніми аеродинамічними характеристиками. Одним з підходів до вирішення таких задач є математичне моделювання реальних фізичних явищ за допомогою припусового вдуву маси газу скрізь пористу поверхню

тіл. З практичної точки зору найбільший інтерес мають моделі, які описують інтенсивний вдув, коли прикордонний шар відтискується від поверхні тіла, поблизу якої локалізується область течії газу, що вдувається.

Вдув вважається інтенсивним, якщо нормальна складова швидкості газу, що вдувається, значно перевищує за порядком швидкість, яка індукується пограничним шаром, але значно менше за швидкість зовнішнього потоку [1,2]. За умови малої товщини утвореного "фіктивного" тіла τ асимптотичний аналіз повної системи рівнянь при граничному переході $Re_\infty \rightarrow \infty$, $\tau \rightarrow 0$, $M_\infty \rightarrow \infty$, $(Re_\infty \cdot \tau^4) \rightarrow \infty$, $(M_\infty \cdot \tau) \sim O(1)$ дозволяє замінити вихідні рівняння на рівняння тонкого шару [3].

1. НАДЗВУКОВЕ І ГІПЕРЗВУКОВЕ ОБТІКАННЯ КОНУСА СКІНЧЕНОЇ ДОВЖИНИ ПРИ ІНТЕНСИВНОМУ ВДУВІ З БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ОДНОРІДНОГО ГАЗУ

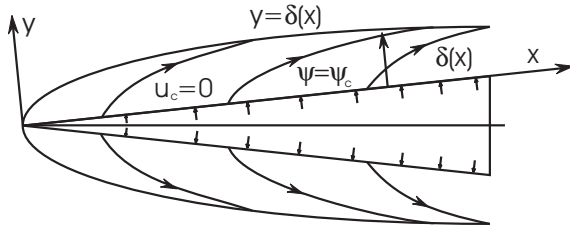


Рис. 1. Схема течії газу, що вдувається, при дослідженні надзвукового та гіперзвукового обтікання конуса скінченної довжини

Задачі про надзвукове і гіперзвукове обтікання тіл скінченної довжини при вдуві з бічної поверхні однорідного газу були розглянуті в роботах [1, 2, 4] для пластини і клину у надзвуковому потоці і в роботах [5, 6] для степеневих загострених тіл обертання у гіперзвуковому потоці. Спроба узагальнити одержані рішення шляхом граничного переходу на випадок обтікання конуса виявилась марною, тому що призводить до розбіжного рішення.

1.1. При дослідженні надзвукового та гіперзвукового обтікання конуса скінченної довжини (рис. 1), основні результати яких викладені в роботах [7, 8], використовується модель тонкого шару. Розподіли тиску вздовж тіла і товщини шару $\delta(x)$ залежать один від одного і граничні умови на кінці тіла будуть впливати на усі характеристики течії, починаючи з носика.

Для визначення тиску на поверхні контактного розриву використовуються такі співвідношення: для надзвукового потоку $p = C \frac{d\delta}{dx}$, а для гіперзвукового потоку $p = C^* \left[\frac{d\delta^*}{dx} \right]^2$.

1.2. При вказаних обмеженнях, для надзвукового обтікання конуса одержуємо краєву задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\psi_c}{B^2} \frac{d\psi_c}{dx} f \cdot f'' - \frac{\psi_c}{B} \frac{d}{dx} \left[\frac{\psi_c}{B} \right] f'^2 - \frac{1}{\rho\beta} \frac{d^2\delta}{dx^2} &= \quad (1) \\ &= \left[\frac{\psi_c}{B} \right]^2 (f' \cdot f' - f \cdot f''), \\ \beta p &= \frac{d\delta}{dx}, \beta = \frac{M_\infty(\gamma + 3)^{3/2}}{2\sqrt{2}}, \\ \eta &= \frac{y(x + 0.5y)}{B}, B = \delta(x + 0.5\delta), \\ f(x, 0) &= 1, f'(x, 0) = 0, f(x, 1) = 0, \quad (2) \\ p(x = 1) &= p_d, \end{aligned}$$

де $\psi/\psi_c = f(x, \eta)$ – безрозмірна витрата газу при вдуві; M_∞ – число Маха набігаючого потоку; γ

– питома теплоємність; точкою позначена похідна по x , а штрихом – по η .

Рівняння і граничні умови для гіперзвукового обтікання конуса:

$$\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{q(f + 2xf)}{\beta(1 - q^2)}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial q} = \frac{(f + 2xf)}{\beta(1 - q^2)}, \quad (3)$$

$$\beta = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{d(\ln p)}{d(\ln x)},$$

$$\delta_*^2 = x^2 + \frac{\gamma - 1}{\gamma p} \sqrt{2x} \cdot \Phi, \quad \Phi = \int_0^1 \frac{f + fx}{\beta} dq, \quad (4)$$

$$f(x, 0) = -1, f(x, 1) = 0, \eta(x, 0) = 0, \eta(x, 1) = \eta_e(x), \quad (5)$$

де нові змінні задаються співвідношеннями:

$$f = \frac{\psi}{\sqrt{2x}}, \quad q = f' = \frac{\partial f}{\partial \eta},$$

$$\eta = \frac{2\gamma p}{(\gamma - 1)\sqrt{2x}} \int_0^y \frac{(x + y)dy}{1 - q^2}.$$

1.3. У малому околі носика тіла ($x \rightarrow 0$) для кожної з одержаних крайових задач (1)-(5) буде-ться асимптотичний розв'язок і знаходяться співвідношення для визначення перших його коефіцієнтів, які відповідають автомодельній задачі про вдув з напівнескінченного тіла, і співвідношення для нетривіального розв'язку, що характеризує відхилення від автомодельного через наявність ефекту розповсюдження збурень від донного зрізу назустріч потоку.

Для надзвукового обтікання конуса маємо асимптотичні співвідношення:

$$f = f_0(\eta) + x^a f_1(\eta) + \dots, \beta = C_0 x^m + C_1 x^{m_1} + \dots, \\ p = A_0 x^n + A_1 x^{n_1} + \dots$$

Автомодельний розв'язок має вигляд:

$$\eta = \frac{1}{f_0} \int_{f_0}^1 \sqrt{\frac{\alpha}{1 - z^{2\alpha}}} dz, \quad K = \int_0^1 \sqrt{\frac{\alpha}{1 - z^{2\alpha}}} dz,$$

$$m = \frac{2s + 1}{5}, \quad n = \frac{2(2 - s)}{5},$$

$$\alpha = \frac{s - 2}{5s}, \quad 0 < s < 2,$$

$$C = \left[\frac{50\rho\beta K^2}{s} (2s + 1)(2 - s) \right]^{\frac{1}{5}},$$

$$A = \frac{2C(2 + \gamma)\sqrt{2}}{5M_\infty(\gamma + 3)^{3/2}}.$$

Для визначення нетривіального розв'язку маємо:

$$f_0'' \Phi_1 + f_0 \Phi_1'' - 2\alpha f_0' \Phi_1' - 4f_0 f_0'' + D f_0'^2 + N = a(f_0 \Phi_1' - \Phi_1 f_0'')/s,$$

$$\Phi_1(0) = \Phi_1'(0) = \Phi_1(1) = 0,$$

де $\Phi_1 = \frac{C}{C_1} f_1$, а $D = D(a, s, \alpha)$ і $N = N(K, m, n, a,)$ – відомі функції, що залежать від параметрів задачі.

При дослідженні знайдено значення параметра a , при якому існує нетривіальний розв'язок для функції Φ_1 .

Крайова задача (1) – (2) рівномірно обгрунтована в області, де $x \sim O(0)$, $y \sim O(\tau)$. Це накладає обмеження на характер зміни тиску. Якщо тиск задовольняє умові (2), то течія в зоні донного зрізу описується крайовою задачею для системи повних рівнянь Ейлера [8]. Для зрощування рішень у областях $\Delta p \sim O(\tau)$ (вздовж поверхні) і $\Delta p \sim O(0)$ (у локальній області донного зрізу) будувалося проміжне рішення, яке зліва переходило у рішення для області $\Delta p \sim O(\tau)$, а праворуч – у рішення для області $\Delta p \sim O(1)$. Задача розв'язувалась чисельними методами, а система рівнянь лінеаризувалася на кожній характеристичній смужці $x = \text{const}$.

Розрахунки показали, що при розподіленому вдуві коефіцієнт тиску повільно спадає вздовж поверхні конуса при будь-яких швидкостях вдуву і швидкостях набігаючого потоку, а на деякій відстані від донного зрізу тиск різко зменшується. Зменшення параметра вдуву S (що відповідає збільшенню швидкості вдуву у зоні передньої точки конуса) призводить до збільшення тиску у головній частині конуса і зменшенню у хвостовій.

Аналогічний підхід був застосований для гіперзвукового обтікання конуса, де мають місце асимптотичні співвідношення:

$$f = f_0(q) + x^a f_1(q) + \dots, \eta = \eta_0(q) + x^m \eta_1(q) + \dots,$$

$$\Phi = \Phi_0 + x^{\varphi_1} \Phi_1 + \dots$$

$$p = C_0 x^n + C_1 x^{n_1} + \dots, \delta_* = B_0 x^k + B_1 x^{k_1} + \dots,$$

$$\beta = \beta_0 + \beta_1 x^{s_1} + \dots$$

Підставляючи ці співвідношення у рівняння (3) – (5), одержуємо рекурентні системи рівнянь для перших і других членів, що складають розв'язок, який існує тільки для деякого значення параметра a . При розрахунках (в області $a > 0$) визначено одне значення, яке більше за значення такого ж

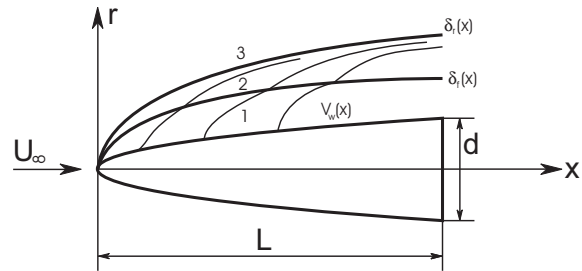


Рис. 2. Модель гіперзвукового обтікання тонкого вісесиметричного тіла, через бічну поверхню якого підводиться горюча суміш

параметра, що обчислено у [9]. Це вказує на те, що вплив крайових умов на течію, яка знаходиться вище за потоком, при обтіканні клина сильніший ніж при обтіканні конуса.

2. ГІПЕРЗВУКОВЕ ОБТІКАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО ТІЛА ПРИ ІНТЕНСИВНОМУ ВДУВІ З БІЧНОЇ ПОВЕРХНІ ГОРЮЧОЇ СУМІШІ

У межах тієї ж моделі виконується дослідження [10] гіперзвукового обтікання тонкого вісесиметричного тіла ($d/L \sim \tau \ll 1$) з відомим розподілом швидкості $V_w(x)$ горючої суміші, яка підводиться скрізь бічну поверхню (рис. 2). Твірна тіла і розподілення вдуву задаються степеневими законами від поздовжньої координати $r_w = C_w x^w, 0 < w < 1, f(x) = \gamma x^n, -1 < n < 0$. Розглядається течія з інтенсивними хімічними реакціями, швидкість яких вважається нескінченно великою у порівнянні із швидкістю дифузії. Тонка зона горіння замінюється поверхнею – фронтом полум'я δ_f , яка розташована між тілом і поверхнею контактного розриву δ_r [11].

Граничні умови мають наступний вигляд:

$$r = r_w(x) : U_w = 0, \sqrt{\rho_w V_w^2} = \gamma x^s, -1 < s < 0;$$

$$r = \delta_r(x) : \frac{V_r}{U_r} = \frac{d\delta_r}{dx}, p = C^* \left(\frac{d\delta_r}{dx} \right)^2;$$

$$r = \delta_f(x) : \rho_1 \left(U_1 \frac{d\delta_f}{dx} - V_1 \right) = \rho_2 \left(U_2 \frac{d\delta_f}{dx} - V_2 \right),$$

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_2 - 1} \cdot \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{\gamma_1}{\gamma_1 - 1} \cdot \frac{p_1}{\rho_1} + q,$$

а система рівнянь, яка характерна для моделі тонкого шару, перетворюється у інтегродиференціальні рівняння, що задають твірні контактного розриву і фронту полум'я як функцій від

розподілу тиску, контуру тіла і закону вдуву:

$$\delta_f^2(x) = r_w^2(x) + \frac{K_0}{p^{1/\gamma}(x)} \times \quad (6)$$

$$\times \int_{\varphi(x)}^x \frac{f(z)r_w(z)p^{1/(2\gamma)}(z)dz}{\sqrt{p^{(\gamma-1)/\gamma}(z) - p^{(\gamma-1)/\gamma}(x)}},$$

$$\delta_r^2(x) = \delta_f^2 + \frac{K_0}{p^{1/\gamma}(x)} \times \quad (7)$$

$$\times \int_0^{\varphi(x)} \frac{f(z)r_w(z)p^{1/(2\gamma)}(z)[1 + 2qp_*]dz}{\sqrt{(1 + 2q)p^{\gamma/(\gamma-1)}(z) - (1 + 2qp_*)p^{\gamma/(\gamma-1)}(x)}},$$

$$p_* = \left[\frac{p(x)}{p(\varphi^{-1}(x))} \right]^{(\gamma-1)/\gamma}$$

Величина $\varphi(x)$ визначається з умови $\psi_w(z) = \psi_1(x)$, де ψ_1 – значення функції току на фронті полум'я.

Параметр подібності $K_0 = \lambda/C_w^2$ характеризує взаємний вплив на потік інтенсивності вдуву і форми тіла, а виділений параметр взаємодії $K_f = V/K_0C_0$ – вплив нормальної швидкості фронту полум'я V на створення шару газу, який підводиться. У випадку, коли $K_f = 0$, рівняння описують течію в області вдуву без тепловиділення [5].

У малому околі носика тіла ($x \rightarrow 0$) маємо асимптотичні співвідношення:

$$\delta_r = Dx^r + D_1x^{r_1} + \dots, \delta_f = Ax^f + A_1x^{f_1} + \dots,$$

$$p = Bx^d + B_1x^{d_1} + \dots$$

Підставляючи такий розв'язок у інтегродиференціальні рівняння (6), (7), одержимо співвідношення для автомодельного і нетривіального розв'язків:

$$A^2 = 1 + \frac{K_0}{\sqrt{B}}[G - R^{\alpha+1}M_1],$$

$$D^2 = A^2 + \sqrt{1 + 2qR^{-m}} \frac{K_0}{\sqrt{B}} R^{\alpha+1}M_2,$$

$$B = C^*D^2r^2, \quad r = f = w = 0.5n + 1, \quad d = n,$$

$$m = -\frac{\gamma - 1}{\gamma}n,$$

$$2AA_1 = \frac{K_0B_1}{2\gamma B^{3/2}}[\Phi - 2G + R^{\alpha+1}(2M_1 - M_3)],$$

$$B_1 = 2C^*DD_1r(r + a),$$

$$2DD_1 = 2AA_1 + \frac{K_0B_1}{2\gamma B^{3/2}}R^{\alpha+1}(M_4 - 2M_2) \times$$

$$\times \sqrt{1 + 2qR^{-m}},$$

$$f_1 = f + a, \quad d_1 = d + a, \quad t = (\alpha + 1)/m,$$

$$s = t + a/m, \quad z = (\gamma - 1)(2s - 1),$$

де R, M_1, M_2, M_3, M_4 – однозначно визначені функції від параметрів задачі і коефіцієнтів асимптотичного розв'язку, а G і Φ визначаються через гама-функції Ейлера:

$$G = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(t)}{m \cdot \Gamma(t + 0.5)},$$

$$\Phi = \frac{(1 + z)\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(s)}{m \cdot \Gamma(s + 0.5)} - 2t(\gamma - 1)G.$$

Одержані рівняння для визначення автомодельного і нетривіального розв'язків залежать від коефіцієнтів подібності K_0, K_f і деякого параметру a , знаходження якого виконувалось чисельно.

Аналіз одержаних значень параметрів задачі вказує на те, що при $K_0 \rightarrow 0$ параметр $a \rightarrow \infty$ і збурення локалізуються у зоні донного зрізу. Збільшення коефіцієнта взаємодії K_f призводить до зменшення впливу донної області. Порівняння одержаних результатів з оцінками вдуву негорючої суміші вказує на те, що при однакових значеннях коефіцієнтів подібності K_0 і коефіцієнта n , вдув горючої суміші зменшує вплив донної області на усю зону течії.

3. ГІПЕРЗВУКОВЕ ОБТІКАННЯ ВІСЕСИМЕТРИЧНОГО ЗАТУПЛЕНОГО ТІЛА

У межах моделі тонкого шару розглядається гіперзвукове обтікання тонкого затупленого вісесиметричного тіла довжиною L і діаметром донного зрізу $d(d/L \ll 1)$, форма твірної якого $r = r_w(x)$ (рис. 3). Через його поверхню виконується підвід газу з заданим розподілом імпульсу $\sqrt{\rho_w V_w^2} = \gamma f(x)$, де через ρ_w та V_w позначено відповідно густину та нормальну складову швидкості газу, що вдувається, γ – інтенсивність вдуву, $f(x)$ – закон його розподілу вздовж поверхні. Шар змішування за таких припущень замінено поверхнею контактного розриву $r = r_b(x)$.

3.1. Інтегрування системи рівняння тонкого шару у спеціальних змінних дає можливість отримати інтегральне рівняння для твірної r_b , яке пов'язує параметри вдуву та форму основного тіла і має вигляд [5]

$$r_b^2(x) = r_w^2(x) + \frac{\gamma}{P^{1/\gamma}(x)} \int_0^x \frac{f(\xi)P^{1/\gamma}(\xi)d\xi}{\sqrt{P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(\xi) - P^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}(x)}}, \quad (8)$$

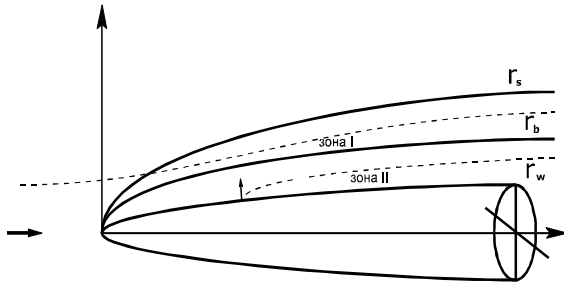


Рис. 3. Гіперзвукове обтікання тонкого затупленого вісесиметричного тіла скінченної довжини, через поверхню якого виконується підвід газу з заданим розподілом імпульсу

де через γ позначена питома теплоємність газу, що вдувається. Функція розподілу тиску $P(x)$, за припущеннями наближення тонкого шару, є функцією тільки повздовжньої координати x і вважається відомою з розв'язання зовнішньої задачі, яка у даному випадку являє собою гіперзвукове обтікання тонкого вісесиметричного “фіктивного” тіла з твірною $r_b(x)$. Використовуючи для зовнішньої задачі нестационарну аналогію [12], можна для цієї задачі записати систему рівнянь, яка пов'язує твірну “фіктивного” тіла $r_{ib}(x)$, що обтікається, ударної поверхні $R_S(x)$ та розподілу тиску $P(x)$ впродовж поверхні “фіктивного” тіла:

$$r_s \dot{r}_s (\dot{r}_s^2 + r_s \ddot{s}) + \frac{1}{\gamma - 1} [\dot{P}(r_s^2 - r_b^2) + 2P(r_s \dot{r}_s - r_b \dot{r}_b)] = 2P(x) r_b \dot{r}_b, \quad (9)$$

$$\ddot{r}_s^3 = 6P(x) r_s.$$

Тут лапками позначено диференціювання за змінною x .

Безпосереднє інтегрування системи рівнянь (9) від носика тіла до області донного зрізу утруднюється через наявність передачі збурень вгору за потоком з області донного зрізу [2]. Крім того, на зрізі дна має виконуватися додаткова умова

$$P(L) = P_{\text{дон}}. \quad (10)$$

У випадку, коли форма твірної тіла та розподіл імпульсу задаються за степеневими законами, тобто $r_b(x) = Cx^\chi$, $0 < x < L$, $f(x) = x^n$, $-1 < n < 0$, система рівнянь (9) буде інваріантною відносно наступної групи перетворень:

$$x = L\tilde{x}, \quad P = L^n \tilde{P}, \quad r = L^\chi \tilde{r}, \quad 2\chi = n + 2, \quad (11)$$

і дозволяє виділення параметра подібності $k = \gamma/c^2$, який за своїм змістом характеризує взаємодію вдува і форми контуру тіла на формування поверхні контактної розриву.

За аналогічних припущень розв'язувалася задача про обтікання тонкого загостреного тіла [5, 6].

3.2. Крайова задача для системи інтегродиференціальних рівнянь (9) зводиться до задачі типу Коші з початковими умовами, що містять один довільний параметр, остаточне значення якого встановлюється після інтегрування системи від початку тіла до області донного зрізу та виконання умови (10).

Далі використовується процедура побудови асимптотичного розв'язку, що була викладена вище. Для започаткування розв'язання задачі Коші за початковий розв'язок вибирається асимптотичний розв'язок системи рівнянь (9) при $x \rightarrow 0$, який пропонується знаходити у вигляді асимптотичних розвинень функцій $P(x)$, $r_b(x)$, $r_s(x)$, де перші складові відповідають асимптотичному автотомельному розв'язку задачі для напівнескінченного тіла, а інші є поправками внаслідок наявності збурень від донного зрізу, які розповсюджуються назустріч потоку.

Система рівнянь для першого наближення, тобто задача про вдув з напівнескінченного тіла, має єдиний розв'язок. Система для визначення коефіцієнтів другого наближення, яке характеризує вплив донного зрізу, є лінійною та однорідною, нетривіальний розв'язок якої можливий у разі задоволення певної умови, що накладається на параметри задачі, і визначається з точністю до довільних значень одного з коефіцієнтів другого наближення.

Аналіз поведінки отриманого розв'язку дає можливість зробити висновки про існування режиму, при якому величина збурень, які розповсюджуються від донного зрізу до області носика тіла, не залежить від інтенсивності вдуву.

3.3. Побудований у такий спосіб асимптотичний розв'язок системи рівнянь (9) надалі використано як початковий для побудови розв'язку вздовж поверхні тіла.

Визначивши область обґрунтованості асимптотичного розв'язку, виконуємо побудову розв'язку у точці $x_2 = x_1 + \Delta x$. Значення розподілу тиску $P_2 = P(x_2)$ у довільній точці ξ інтервалу $[x_1, x_2]$ можна визначити як

$$P_2 = P_1 + (x_2 - \xi)t, \quad \xi \in [x_2, x_1], \quad (12)$$

де t – параметр, вибір якого пов'язаний з особливостями задачі.

Значення тиску, визначене за співвідношенням (12), після підстановки до (8) та інтегрування, дає можливість знайти перше значення функції $r_b(P_2) = r_{b1}(x_2, t)$ у залежності від параметра t .

Особливість у верхній границі інтервалу інтегрування виключається аналітично, а інтеграл знаходиться чисельними методами.

Друге значення величини $r_{b2}(x_2, t)$ визначається після інтегрування системи (9). Система зводиться до нормального вигляду, dP/dx покладається рівним t , початкові умови задаються значеннями асимптотичного розв'язку. При цьому значення $P(x)$ так само визначаються за співвідношенням (8) і в часі розв'язання системи (9) вважаються відомою функцією. За знайденими у такий спосіб значеннями $r_{b1}(x_2, t)$ та $r_{b2}(x_2, t)$ будується значення функції $F(t)$:

$$F(t) = r_{b1}(x_2, t) - r + b2(x_2, t). \quad (13)$$

Далі значення dP/dx у точці x_2 визначається за наведеним вище як розв'язок рівняння $F(t) = 0$ і знаходиться чисельним методом.

Після визначення параметрів у точці x_2 зазначений процес повторюється до значення $x_n = 1$. У цій точці перевіряється виконання умови (10) і у разі невиконання змінюється значення довільно вибраного на першому кроці певного вільного коефіцієнта B_2 . Для визначення розподілу $P(x)$, яке відповідає заданим умовам на донному зрізі, цей коефіцієнт обирається за параметр T і будується нова функція $\Phi(T)$:

$$\Phi(B_2) = P_{\text{дон}} - P(1, B_2),$$

де значення $P(1, B_2) = P_n$ визначено за наведеним вище алгоритмом, а значення коефіцієнту B_2 може бути знайдене як розв'язок рівняння $\Phi(B_2) = 0$ побудовою ітераційного процесу, аналогічному процесові для знаходження розподілу тиску, але на зовнішньому по відношенню до побудованого раніше. Певні спрощення у розв'язання задачі можна запровадити, якщо застосувати групу перетворень (11). У цьому випадку можна для задоволення умови (10) побудувати зовнішній ітераційний процес на тих самих засадах, що їх описано раніше, але визначення функції розподілу тиску $P(x)$ проводити тільки один раз до визначення особливої точки, у якій $dP/dx \rightarrow \infty$ [2]. У такому варіанті виключається доволі складні обчислення для визначення значень $P(x)$ за різних значень параметра B_2 і виконується тільки перерахунок значень розподілу функції $P(x)$, визначених тільки один раз, для різних значень параметру групи перетворень, що суттєво скорочує час, який необхідний для побудови розв'язку задачі. Докладно цей метод викладений в роботі [13].

Надалі отриманий розв'язок задачі про гіперзвукове обтікання вісесиметричного тіла степене-

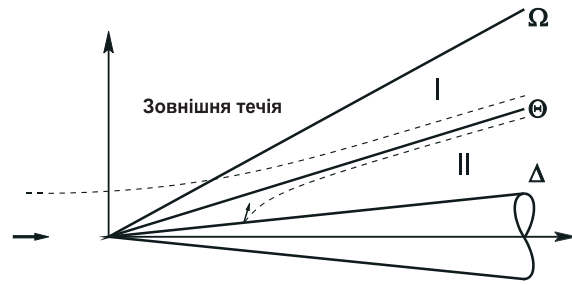


Рис. 4. Модель надзвукового обтікання некруглого у поперечному перетині конуса, через оболонку якого вдувається газ рівномірно вдовж всієї поверхні тіла

вої форми при помірному режимі вдуву було успішно використано для проведення досліджень, пов'язаних з проблемами оптимізації параметрів масопереносу з метою забезпечення заданих аеродинамічних характеристик "фіктивного" тіла. Так, у роботі [14] була розв'язана задача знаходження такого закону вдуву, який забезпечує мінімальне значення аеродинамічного опору "фіктивного" тіла. Проблемам мінімізації хвильового опору "фіктивного" тіла за умов, що сформульовано вище, присвячена робота [15].

4. ПРОСТОРОВЕ НАДЗВУКОВЕ ОБТІКАННЯ НЕВІСЕСИМЕТРИЧНИХ КОНІЧНИХ ТІЛ

У надзвуковому потоці знаходиться некруглий у поперечному перетині конус, скрізь оболонку Δ якого вдувається газ рівномірно вдовж всієї поверхні тіла під деяким довільним кутом θ_{bd} ($0 < \theta_{bd} < \pi/2$) до неї. Стрибок ущільнення Ω приєднаний до носика конуса, а швидкість газу, який вдувається, є такою, що відповідає режиму сильного вдуву [2].

Дослідження рівнянь Нав'є-Стокса для випадку інтенсивного вдуву, проведене за допомогою асимптотичних методів, дозволило поділити область течії газу від стрибка ущільнення до конуса на дві нев'язкі зони [16]. При цьому шар змішування (взаємодіє) зовнішнього і внутрішнього потоків замінюється контактним розривом Θ , поверхня якого також має конічну форму і приєднана до носика конуса (рис. 4).

4.1. Суть запропонованого метода полягає в представленні розв'язку задачі у вигляді суперпозиції нелінійного розв'язку, який описує основний вісесиметричний потік, що обтікає круглий у поперечному перетині конус із вдувом, та лінеаризованих розв'язків, які визначають збурення, що

виникають у вісесиметричному потоці через відхилення форми поперечного перетину конуса від форми круга, меридіанальну нерівномірність масопереносу тощо. У найбільш загальному випадку постановка задачі передбачає наявність у надзвуковому потоці нахилених до його напрямку під малим кутом атаки та скосу некруглих у поперечному перетині “фіктивного” конічного тіла і пористого конуса, скрізь поверхню якого здійснюється меридіонально нерівномірний вдув газу.

Вихідною системою диференціальних рівнянь є система рівнянь Ейлера.

Через автомоделність розв’язків всі газодинамічні та геометричні параметри в областях I та II є функціями лише ξ_I, ξ_{II} і φ , які пов’язані зі сферичною системою координат (r, θ, ψ) таким чином:

$$\xi_I = \frac{\eta - \Theta}{\Omega - \Theta}, \quad \varphi = \psi, \quad \xi_{II} = \frac{\Theta - \eta}{\Theta - \Delta},$$

$$\varphi = \psi, \tag{14}$$

де $\eta = \text{tg } \theta$.

Рівняння поверхонь пористого конуса Δ , контактного розриву Θ і стрибка ущільнення Ω можуть бути записані у загальному вигляді як:

$$\Gamma = \Gamma_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \Gamma_{\ell} \cos \ell\varphi + \sum_{m=1}^{\infty} \Gamma_m \sin m\varphi, \tag{15}$$

де Γ_0 – відповідні поверхні $\Delta_0, \Theta_0, \Omega_0$, що мають круглий поперечний перетин, а коефіцієнти $\Gamma_l, \Gamma_m - (\Delta_l, \Delta_m, \Theta_l, \Theta_m, \Omega_l, \Omega_m)$ – малі величини, які характеризують відхилення форми поперечного перетину тіла від форми перетину круглого конуса.

Газодинамічні параметри можна представити у вигляді:

$$f = f_0 + \sum_{\ell=0}^{\infty} \Theta_{\ell} f_{\ell} \cos \ell\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \Theta_m f_m \sin m\varphi,$$

$$f = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ p \\ \rho \\ S \end{Bmatrix},$$

$$w = \sum_{\ell=1}^{\infty} \ell \Theta_{\ell} w_{\ell} \sin \ell\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} m \Theta_m w_m \cos m\varphi, \tag{16}$$

індексом “0” позначені функції, які є розв’язком основної вісесиметричної течії, а індексами l і m – функції, що характеризують збурення вісесиметричного потоку.

Після підстановки (15) і (16) в систему рівнянь Ейлера, залишивши лише члени першого порядку відносно Θ_l і Θ_m , отримаємо три системи диференціальних рівнянь, які аналогічні за структурою як для зовнішнього, так і для внутрішнього потоків. Вісесиметрична течія описується нелінійною системою нульового наближення:

$$\nu_0 \frac{\partial \nu_0}{\partial \xi_N} + \frac{1}{\rho_0} \frac{dp_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \eta_0 u_0 \nu_0, \tag{17}$$

$$\nu_0 \frac{dp_0}{d\xi_N} + \gamma p_0 \frac{d\nu_0}{d\xi_N} - \sigma_0 \gamma p_0 (\nu_0 + 2\eta_0 u_0) = 0,$$

$$\frac{dp_0}{d\xi_N} + \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{d\xi_N} = 0,$$

$$u_0^2 + \nu_0^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} D.$$

Для визначення збурень в основному потоці маємо дві лінійні системи диференціальних рівнянь, одна з яких не залежить від параметра Θ_m , а інша – від Θ_l :

$$\nu_0 \frac{d\nu_i}{d\xi_N} + \frac{d\nu_0}{d\xi_N} + \frac{1}{\rho_0} \left(\frac{dp_i}{d\xi_N} - \frac{\rho_i}{\rho_0} \frac{dp_0}{d\xi_N} \right) -$$

$$- \sigma_0 (\eta_0 u_0 \nu_i + \eta_0 u_i \nu_0 + \eta_i u_0 \nu_0) - \sigma_i \eta_0 u_0 - n u_0 = 0, \tag{18}$$

$$n u_0 \frac{dw_i}{d\xi_0} - \sigma_0 \left[w_i (\nu_0 + \eta_0 u_0 -$$

$$- \frac{\sqrt{1 + \eta^2}}{\rho_0} \left(p_i + \frac{\eta_i}{\Theta_0 - \Delta_0} \frac{dp_0}{d\xi_0} \right) \right] = 0,$$

$$\nu_0 \frac{dp_i}{d\xi_0} + \nu_i \frac{dp_0}{d\xi_0} + \gamma \left(p_{\ell i} \frac{d\nu_0}{d\xi_0} + p_0 \frac{d\nu_i}{d\xi_0} \right) -$$

$$- \gamma \sigma_0 \left\{ p_i (\nu_0 + 2\eta_0 u_0 + p_0 [\nu_i + 2(\eta_0 u_i + \eta_i u_0) +$$

$$+ w_i \sqrt{1 + \eta_0^2}] \right\} - \sigma_i \gamma p_0 (\nu_0 + 2\eta_0 u_0) = 0,$$

$$u_0 u_i + \nu_0 \nu_i + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0} \left(\frac{p_i}{p_0} - \frac{\rho_i}{\rho_0} \right) = 0,$$

$$\frac{p_i}{p_0} - \gamma \frac{\rho_i}{\rho_0} = S_1.$$

У виразах (17) і (18) прийняти такі позначення: $i = l$, коли система не залежить від Θ_m , або $i = m$, коли система не залежить від Θ_l ; N – номер області течії;

$$\sigma = \frac{\Theta_0 - \Delta_0}{\eta_0 (1 + \eta_0^2)}, \quad \eta_0 = \Theta_0 + \xi (\Delta_0 - \Theta_0),$$

$$\sigma_i = \frac{\Theta_i - \sigma_0 (1 + 3\eta_0^2) \eta_i}{\eta_i = \Theta_i (1 + \eta_0^2)},$$

$$\eta_i = \Theta_i(1 - \xi), D = \frac{C_{kp\infty}}{C_{kpbd}}$$

Аналогічним чином отримуємо граничні умови в обох областях течії. На стрибку ущільнення записуються співвідношення, які витікають із законів збереження маси, імпульсу та енергії [12], на поверхні контактної розриву – умови непротікання і неперервності тиску, на поверхні конуса – умови, що задають параметри вдуву газу.

4.2. Сформульована математична модель, наперед граничні умови, дозволяють класифікувати отриману задачу як пряму або обернену. Термін “пряма задача” використовується, якщо задана форма поверхні “фіктивного” тіла і необхідно знайти відповідний режим вдуву через пористу поверхню конуса із відомими геометричними характеристиками. “Оберненою” задачею є сукупність рівнянь та граничних умов, які задають закон розподілу поверхневого масопереносу в поперечному перетині пористого конуса відомої форми, при цьому геометричні параметри поверхні розподілу залишаються невідомі [17].

Слід зауважити, що у випадку, коли течія має площину симетрії, в якій розташована вісь основного кінцевого потоку, достатньо одного підсумовування (по l або m), а для течії з двома площинами симетрії необхідно підсумовувати лише члени з парними коефіцієнтами.

При цьому окремо слід виділити випадок, коли $l = 1, m = 0$, тобто площиною симетрії є площина $\varphi = 0, \varphi = \pi$. Таке рішення має великий практичний інтерес і описує обтікання круглого конуса під кутом атаки [18].

4.3. Метод отримання повного розв’язку задачі побудовано на ідеї послідовного визначення газодинамічних та геометричних параметрів в областях I та II і наступного зрощування цих локальних розв’язків на поверхні контактної розриву за допомогою умови неперервності тиску. При цьому, в кожній області течії крайова задача зводиться до задачі типу Коші з початковими умовами, що містять довільні параметри, остаточне значення яких встановлюється після інтегрування системи рівнянь та виконання відповідних граничних умов. Основою алгоритму є два ітераційних процеси, один з яких вкладений у другий.

4.4. У межах сформульованих вище припущень була розглянута задача про вдув горючої суміші газів. Як й у випадку гіперзвукового обтікання степеневого тіла, що був наведений вище, приймається, що в середині області II течії суміші у тонкому шарі горіння відбувається хімічна екзотермічна реакція. Таким чином, область II є розділеною

на дві зони.

У першому наближенні шар горіння замінюється поверхнею G фронту полум’я, швидкість розповсюдження якого є відомою фізико-хімічною величиною для кожної конкретної горючої суміші [19], що дає першу граничну умову на поверхні G : $\nu_A = V_n$.

Додаткові умови витікають з законів збереження маси, імпульсу й енергії для звершеного газу [19]:

$$u_A = u_B, \rho_A = \rho_B, \rho_A \nu_A^2 + p_A = \rho_B \nu_B^2 + p_B,$$

$$\frac{K_A}{K_A - 1} \frac{p_A}{\rho_A} + \frac{u_A^2 + \nu_A^2}{2} = \frac{K_B}{K_B - 1} \frac{p_B}{\rho_B} + \frac{u_B^2 + \nu_B^2}{2} - Q,$$

де Q – кількість тепла, що виділяється в фронті полум’я внаслідок хімічної реакції; індексами А та В позначаються параметри у відповідних областях течії горючої суміші.

Крайова задача формується системою рівнянь Ейлера, граничних умов на фронті полум’я та на поверхнях конуса й контактної розриву, які були розглянуті раніше. Докладно це дослідження викладено в роботі [20].

ВИСНОВКИ

На основі асимптотичного аналізу рівнянь Нав’є-Стокса розроблений підхід до вивчення інтенсивного поверхневого масопереносу на тілах обертання в високошвидкісних потоках газу.

Для класу задач застосована двошарова модель течії газу з невідомою внутрішньою границею, що дає змогу окремо розглядати крайові задачі для зовнішнього і внутрішнього потоків газу.

Сформульований принцип їх розв’язання, за яким у кожній області розв’язок задачі будується як суперпозиція розв’язків, що відповідають автономній течії, та збуренням потоку, які пов’язані з впливом геометричних параметрів тіла.

Запропонований метод розв’язання ґрунтується на зведенні крайової задачі з невідомою границею до задачі типу Коші з початковими умовами, які містять довільний параметр, вибір якого пов’язаний з особливостями конкретної задачі. Характерним є сполучення чисельних методів з аналітичними, які базуються на асимптотичному аналізі рівнянь.

Процедура розв’язання задачі передбачає побудову певної трансцендентної функції від обраного параметра задачі і чисельне знаходження кореня цієї функції.

Автори вважають своїм обов'язком наголосити, що в різні роки неоцінимої допомоги та підтримки київській групі надали такі видатні вчені, як В. Я. Нейланд, В. А. Левін, К. І. Бабенко, В. В. Сичов. Надзвичайно плідним і корисним було співробітництво з І. І. Липатовим, Ю. Б. Радвогіним, В. Ф. Захарченко та іншими вченими. Всім їм автори висловлюють щире вдячність та глибоку повагу.

1. Антонов А. М., Комашенко А. П. Некоторые автомодельные задачи о сильном вдуве газа через пластинку в сверхзвуковом потоке // Прикладная механика.– вып.10 т. 5.– 1969.– С. 111–114.
2. Матвеева Н. С., Нейланд В. Я. Сильный вдув на теле конечной длины в сверхзвуковом потоке // Ученые записки ЦАГИ.– 1970.– Т. 1, N 5.– С. 13–22.
3. Cole J., Aroesty J. The blowhard problem inviscid flows with surface injection // Int. J. Heat and Mass Transfer.– 1968.– V. 11.– P. 1167–1183.
4. Липатов И. И. Сверхзвуковое обтекание клина конечных размеров при сильном вдуве газа через его поверхность // Ученые записки ЦАГИ.– 1975.– Т. 6, N 5.– С. 119–123.
5. Антонов А. М., Зайцев А. В. Учет влияния донной области на обтекание осесимметричных тел со вдувом // Прикладная механика.– 1979.– Т. XV, N 6.– С. 110–115.
6. Антонов А. М., Зайцев А. В. Расчет распределения давления по пористым оболочкам вращения при динамическом взаимодействии их с гиперзвуковым потоком газа // Динамика и прочность тяжелых машин.– 1980.– Вып. 5.– С. 64–69.
7. Антонов А. М., Закревский В. А. Исследование влияния донного среза на сверхзвуковое обтекание конуса при степенном законе вдува // Прикладная механика.– 1979.– Т. 15, N 8.– С. 99–103.
8. Антонов А. М., Закревский В. А. Сверхзвуковое обтекание конуса при степенном законе вдува газа через его поверхность // Доклады АН УССР.– 1984.– N 8.– С. 31–35.
9. Нейланд В. В. Вдувание газа в гиперзвуковой поток // Ученые записки ЦАГИ.– 1972.– Т. 3, N 6.– С. 29–40.
10. Закревский В. А. Обтекание гиперзвуковым потоком осесимметричного тела конечной длины при вдуве через боковую поверхность горючей смеси газов // Некоторые вопросы прикладной аэродинамики, Сборник научных трудов.– Киев: КИИГА.– 1988.– С. 51–56.
11. Зак Л. И. Сверхзвуковое обтекание тела конечной длины при наличии интенсивного вдува горючей смеси на его боковой поверхности // Научн. тр. НИИ механики МГУ.– 1974.– N 32.– С. 34–40.
12. Ферри А. Аэродинамика сверхзвуковых течений.– М.: ГИТТЛ, 1952.– 466 с.
13. Зайцев О. В., Хорошилов О. В. Про метод розв'язання задач з вільною границею // Вісн. Київського ун-ту, Математика, механіка.– 2002.– N 7.– С. 47–53.
14. Зайцев А. В. Расчет оптимального вдува на осесимметричных заостренных телах // Математические методы механики жидкости и газа.– Днепропетровск.– 1981.– С. 40–45.
15. Антонов А. М., Зайцев А. В., Прокопенко Л. А. Численное решение задачи об оптимальном управлении вдувом на осесимметричных телах // Неосесимметричные задачи гидроаэромеханики и теории упругости.– Днепропетровск.– 1987.– С. 4–10.
16. Левин В. А., Липатов И. И., Нейланд В. Я. Асимптотические методы исследования тел с интенсивным массообменом.– К.: Знание, 1980.– 24 с.
17. Зайцев О. В., Хорошилов О. В., Черный Д. І. Метод розв'язання прямої та оберненої задач про невісесиметричне обтікання конічних тіл із вдувом // Вісн. Київського ун-ту, Математика, механіка.– 2005.– N 13.– С. 56–63.
18. Антонов А. М., Хорошилов О. В. Расчет параметров газа в области вдува при обтекании пористого конуса под углом атаки // ДАН УССР, серия А.– 1973.– N 1.– С. 52–55.
19. Черный Г. Г. Автомодельные задачи обтекания тел горючей смесью газов // Изв. АН СССР.– МЖГ.– N 5.– С. 1966.
20. Бублик Б. Н., Антонов А. М., Хорошилов О. В. Исследование распространения фронта пламени при вдуве горючей смеси газов.– К.: Знание, 1982.– 24 с.