

## **О приближении плоской задачи в теории макроскопически изотропного композитного материала**

**В. Т. Головчан**

Институт сверхтвердых материалов им. В. М. Бакуля НАН Украины, Киев, Украина

*Исследуется приближение плоской задачи на примере средних по объему фаз напряжений в двухфазном макроскопически изотропном композитном материале. Выполнен анализ численных результатов для вольфрамокобальтовых твердых сплавов с граничными типами микроструктуры. Микронапряжения, определенные в рамках плоской деформации, при простом сдвиге могут быть больше истинных напряжений и в случае одноосного напряженного состояния – меньше. Остаточные термические напряжения при этом меньше истинных остаточных напряжений. С увеличением содержания кобальтовой связки имеет место выравнивание напряжений, вычисленных при двух- и трехмерном подходах.*

**Ключевые слова:** макроскопически изотропный композитный материал, твердый сплав, плоская задача, напряжения в фазах.

**Введение.** Определение напряженно-деформированного состояния в фазах композитного материала при заданной внешней нагрузке, в общем, представляет довольно сложную математическую задачу. Строгие эффективные методы ее решения разработаны лишь для упругих матричных композитов с регулярной микроструктурой и с дисперсной фазой в форме шаров и круговых цилиндров [1]. Вычислить микронапряжения в случае нерегулярной структуры можно с помощью численных методов, в частности, используя метод конечных элементов (МКЭ) [2–6]. Выбор области композитного материала, в которой предполагается проводить решение соответствующей граничной задачи, является принципиальной проблемой. Во-первых, такая область должна содержать достаточное количество частиц каждой фазы и иметь характерную для рассматриваемого композита микроструктуру, чтобы ее физико-механические свойства соответствовали макроскопическим свойствам данного материала. Во-вторых, она должна быть как можно меньше, чтобы применяемую конечноэлементную процедуру можно было бы практически реализовать на компьютере. Для выполнения этих противоречивых требований используют двумерную область, которая выделяется в плоскости шлифа, и решают соответствующую плоскую задачу. Данная расчетная схема связана, по существу, с заменой макроскопически изотропного материала текстурированным композитным материалом с гексагональной (трансверсально-изотропной) симметрией. В этом случае композит считается изотропным в расчетной области, а текстура связана с перпендикулярным к этой области направлением. Вопрос о соответствии вычисляемого таким образом напряженно-деформированного состояния реальному состоянию композитного материала остается нерешенным. Основной целью настоящей работы является исследование этой проблемы на примере средних по объему фаз двухфазного композитного материала напряжений и деформаций.

**Основные соотношения двумерного анализа.** Уравнения термоупругости трансверсально-изотропного материала в условиях плоской деформации имеют вид

$$\begin{cases} \sigma_X = C_{11}\varepsilon_X + C_{12}\varepsilon_Y - \beta\theta; \\ \sigma_Y = C_{12}\varepsilon_X + C_{11}\varepsilon_Y - \beta\theta; \\ \varepsilon_Z = S_{13}(\sigma_X + \sigma_Y) + S_{33}\sigma_Z + \alpha_L\theta = 0; \\ \beta = (C_{11} + C_{12})\alpha_T + C_{13}\alpha_L, \end{cases} \quad (1)$$

где деформации и напряжения зависят лишь от координат  $X$  и  $Y$  (плоскость  $XY$  является плоскостью изотропии);  $\alpha_T$  и  $\alpha_L$  – линейные коэффициенты теплового расширения в плоскости изотропии и в перпендикулярном к ней направлении (по оси  $Z$ ) соответственно.

Коэффициенты податливости  $S_{ij}$  выражаются через модули упругости  $C_{ij}$  с помощью равенств

$$\begin{aligned} S_{11} + S_{12} &= \frac{C_{33}}{C}; & S_{11} - S_{12} &= \frac{1}{C_{11} - C_{12}}; & S_{13} &= -\frac{C_{13}}{C}; \\ S_{33} &= \frac{1}{C}(C_{11} + C_{12}); & C &= C_{33}(C_{11} + C_{12}) - 2C_{13}^2. \end{aligned} \quad (2)$$

Перепишем соотношения (1) в следующей эквивалентной форме:

$$\begin{cases} \varepsilon_X - \varepsilon_Y = \frac{1}{2\mu}(\sigma_X - \sigma_Y); \\ \varepsilon_X + \varepsilon_Y = \frac{1}{2k}(\sigma_X + \sigma_Y) + 2\left(\alpha_T + \alpha_L \frac{C_{13}}{2k}\right)\theta; \\ \sigma_Z = -\frac{1}{S_{33}}[S_{13}(\sigma_X + \sigma_Y) + \alpha_L\theta]; \\ \mu = \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}); \quad k = \frac{1}{2}(C_{11} + C_{12}). \end{cases} \quad (3)$$

Аналогичные уравнения для изотропного материала имеют вид

$$\begin{cases} \varepsilon_X - \varepsilon_Y = \frac{1}{2\mu}(\sigma_X - \sigma_Y); \\ \varepsilon_X + \varepsilon_Y = \frac{1}{2k}(\sigma_X + \sigma_Y) + 2(1 + \nu)\alpha\theta; \\ \sigma_Z = \nu(\sigma_X + \sigma_Y) - E\alpha\theta; \quad k = \frac{\mu}{1 - 2\nu}. \end{cases} \quad (4)$$

При установлении связи между микроскопическими (средними по объему фаз) и макроскопическими (средними в представительном объеме композита) напряжениями принимаем в качестве определяющих для фаз урав-

нения (4), а в качестве определяющих для рассматриваемого двухфазного композитного материала – уравнения (3). Добавив к этим уравнениям равенства

$$\begin{aligned} c_1(\varepsilon_{X,1} \mp \varepsilon_{Y,1}) + c_2(\varepsilon_{X,2} \mp \varepsilon_{Y,2}) &= \varepsilon_X \mp \varepsilon_Y, \\ c_1(\sigma_{X,1} \mp \sigma_{Y,1}) + c_2(\sigma_{X,2} \mp \sigma_{Y,2}) &= \sigma_X \mp \sigma_Y, \end{aligned} \quad (5)$$

получим две системы алгебраических уравнений, из которых находим следующие выражения для микронапряжений:

$$\left\{ \begin{aligned} \sigma_{X,1} - \sigma_{Y,1} &= m_{12}(\sigma_X - \sigma_Y); & \sigma_{X,2} - \sigma_{Y,2} &= m_{21}(\sigma_X - \sigma_Y); \\ \sigma_{X,1} + \sigma_{Y,1} &= k_{12}(\sigma_X + \sigma_Y) + \frac{1}{c_1} B\theta; \\ \sigma_{X,2} + \sigma_{Y,2} &= k_{21}(\sigma_X + \sigma_Y) - \frac{1}{c_2} B\theta; \\ m_{12} &= \frac{\mu_1}{c_1 \mu} \frac{\mu_2 - \mu}{\mu_2 - \mu_1}; & m_{21} &= \frac{\mu_2}{c_2 \mu} \frac{\mu_1 - \mu}{\mu_1 - \mu_2}; \\ k_{12} &= \frac{k_1}{c_1 k} \frac{k_2 - k}{k_2 - k_1}; & k_{21} &= \frac{k_2}{c_2 k} \frac{k_1 - k}{k_1 - k_2}; \\ B &= \frac{4k_1 k_2}{k_2 - k_1} \left[ \alpha_T + \frac{C_{13}}{2k} \alpha_L - c_1(1 + \nu_1) \alpha_1 - c_2(1 + \nu_2) \alpha_2 \right]. \end{aligned} \right. \quad (6)$$

Микронапряжения  $\sigma_{Z,1}$  и  $\sigma_{Z,2}$  определяются с помощью третьего уравнения в (4). Следствием равенства  $\sigma_Z = c_1 \sigma_{Z,1} + c_2 \sigma_{Z,2}$  являются два строгих соотношения

$$\begin{aligned} C_{13} &= 2k(c_1 \nu_1 k_{12} + c_2 \nu_2 k_{21}), \\ \alpha_L &= S_{33} [c_1 E_1 \alpha_1 + c_2 E_2 \alpha_2 - (\nu_1 - \nu_2) B], \end{aligned} \quad (7)$$

которые связывают макроскопические величины упругих модулей с коэффициентами теплового расширения двухфазного текстурированного композитного материала с гексагональной симметрией. Вывод данных соотношений основан на независимости и произвольности значений напряжений  $\sigma_X$ ,  $\sigma_Y$  и перепада температуры  $\theta$ . Заметим, что точность любых приближенных формул для вычисления макроскопических параметров  $C_{13}$ ,  $S_{33}$ ,  $k$ ,  $\alpha_T$  и  $\alpha_L$  может быть оценена по тому, в какой степени их значения удовлетворяют равенствам (7).

Две из таких формул могут быть получены, в частности, из решения простой модельной задачи для составного цилиндра, поперечное сечение которого представлено на рисунке. Предполагается, что объемное содержание второй фазы  $c_2 = (R_2/R)^2$ . Граничные условия имеют вид

$$\sigma_{r,1} = p, \quad r = R; \quad u_1 = u_2, \quad \sigma_{r,1} = \sigma_{r,2}, \quad r = R_2.$$

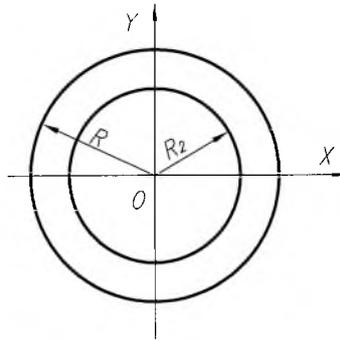


Схема поперечного сечения составного цилиндра.

Перемещения и деформации в этом случае будут

$$u_1 = A_1 r + B_1 / r; \quad R_2 \leq r \leq R; \quad u_2 = A_2 r; \quad 0 \leq r \leq R_2;$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}; \quad \varepsilon_\varphi = \frac{u}{r},$$

а напряжения –

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) + k(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) - 2k\alpha\theta; \\ \sigma_\varphi &= -\mu(\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi) + k(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) - 2k\alpha\theta. \end{aligned}$$

Произвольные постоянные  $A_1$ ,  $B_1$  и  $A_2$  определяются из граничных условий. Затем в качестве эквивалентного выбираем однородный цилиндр радиуса  $R$ , к боковой поверхности которого приложено напряжение  $p$ . Условие эквивалентности (равенство перемещений точек боковой поверхности составного и однородного цилиндров) имеет вид

$$\left( \frac{p}{2k} + \alpha_T \theta \right) R = A_1 R + \frac{B_1}{R}.$$

Учитывая, что выбор величин  $p$  и  $\theta$  произвольный, получаем такие соотношения:

$$\begin{aligned} k &= c_1 k_1 + c_2 k_2 - \frac{c_1 c_2 (k_1 - k_2)^2}{k_2 c_1 + k_1 c_2 + \mu_1}; \\ \alpha_T &= \frac{k_1 \alpha_1}{k} - \frac{c_2 (\mu_1 + k_1) (k_1 \alpha_1 - k_2 \alpha_2)}{k_1 (\mu_1 + k_2) - c_2 \mu_1 (k_1 - k_2)}. \end{aligned} \quad (8)$$

Первое равенство в (8) совпадает с соответствующим равенством для макроскопического объемного модуля плоских деформаций [7] при условии, что модуль сдвига тела сравнения равен модулю сдвига матрицы (в [7] используется очень сложный математический аппарат обобщенного сингулярного приближения теории случайных функций). Второе равенство есть строгое соотношение между макроскопическими параметрами  $\alpha_T$  и  $k$ .

Для вычисления входящих в выражения для микронапряжений (6) величин  $C_{13}$ ,  $S_{33}$ ,  $k$ ,  $\alpha_T$ ,  $\alpha_L$  и  $\mu$  (и в выражение (7) для коэффициента теплового расширения  $\alpha_L$ ) необходимо дополнить совокупность равенств (7) и (8) двумя соотношениями. В качестве таковых выбираем уравнения из [7]:

$$\begin{aligned} \mu &= c_1\mu_1 + c_2\mu_2 - \frac{c_1c_2(\mu_1 - \mu_2)^2}{c_2\mu_1 + c_1\mu_2 + b_c}; & b_c &= \mu_c \frac{3K_c + \mu_c}{3K_c + 7\mu_c}; \\ C_{33} &= c_1\eta_1 + c_2\eta_2 - \frac{c_1c_2(\eta_1 - \eta_2)^2}{c_2\eta_1 + c_1\eta_2 + \mu_c}; & \eta_i &= K_i + \frac{4}{3}\mu_i, \quad i=1, 2. \end{aligned} \quad (9)$$

При этом величину  $f_{k\mu}D_\lambda$  в приведенном в [7] выражении для  $C_{33}$  заменяем  $f_{\eta\mu}D_\eta$ , так как лишь в этом случае вычисленный по формуле (8) поперечный коэффициент теплового расширения совпадает с линейным коэффициентом теплового расширения, определенным по формуле

$$\alpha_T = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + \frac{K_1K_2(\alpha_1 - \alpha_2)}{K_2 - K_1} \left[ 3(S_{11} + S_{12} + S_{13}) - \frac{c_1}{K_1} - \frac{c_2}{K_2} \right].$$

**Основные соотношения трехмерного анализа.** Для макроскопически изотропного композитного материала с изотропными фазами физические уравнения термоупругости представим в виде

$$\begin{cases} \sigma = 3K(\varepsilon - \alpha\theta); & s_{ij} = 2\mu e_{ij}; \\ \sigma = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}); & \varepsilon = \frac{1}{3}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}); \\ s_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma\delta_{ij}; & e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon\delta_{ij}. \end{cases} \quad (10)$$

Добавив к этим уравнениям в случае двухфазного композита соотношения усреднения по объему

$$\begin{aligned} \sigma &= c_1\sigma_1 + c_2\sigma_2; & \varepsilon &= c_1\varepsilon_1 + c_2\varepsilon_2; \\ s_{ij} &= c_1s_{ij,1} + c_2s_{ij,2}; & e_{ij} &= c_1e_{ij,1} + c_2e_{ij,2}, \end{aligned} \quad (11)$$

получим две замкнутые системы, из которых находим следующие выражения для микроскопических напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= K_{12}\sigma + \frac{3K_1K_2}{c_1(K_2 - K_1)}(A - c_1\alpha_1 - c_2\alpha_2)\theta, & s_{ij,1} &= g_{12}s_{ij}; \\ K_{12} &= \frac{1}{c_1} \frac{K_1(K_2 - K)}{K(K_2 - K_1)}, & g_{12} &= \frac{1}{c_1} \frac{\mu_1(\mu_2 - G)}{G(\mu_2 - \mu_1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

Микронапряжения во второй фазе определяются на основании (11) с учетом (12).

Макроскопические модуль всестороннего сжатия  $K$ , модуль сдвига  $G$  и линейный коэффициент теплового расширения  $A$  определим с помощью равенств:

$$\begin{aligned} M &= c_1 M_1 + c_2 M_2 - \frac{c_1 c_2 (M_1 - M_2)^2}{c_2 M_1 + c_1 M_2 + b_M^c}; \\ M &= K, G; \quad G_1 = \mu_1; \quad G_2 = \mu_2; \\ b_K^c &= \frac{4}{3} \mu_c; \quad b_G^c = \frac{\mu_c (9K_c + 8\mu_c)}{6(K_c + 2\mu_c)}; \\ A &= c_1 \alpha_1 + c_2 \alpha_2 + \frac{K_1 K_2}{K_2 - K_1} \left( \frac{1}{K} - \frac{c_1}{K_1} - \frac{c_2}{K_2} \right) (\alpha_1 - \alpha_2). \end{aligned} \quad (13)$$

Данные равенства использованы из монографии [7]. Заметим, однако, что выражения для объемного модуля  $K$  и коэффициента теплового расширения  $A$  для двухфазного матричного композитного материала легко могут быть получены из решения простой модельной центрально симметричной задачи для составного шара (см. выше случай составного цилиндра для плоской деформации). Полученные таким образом формулы тождественно совпадают с (13) при условии равенства модуля сдвига тела сравнения модулю сдвига матрицы.

**Численные результаты и их обсуждение.** Выполним сравнение величин микронапряжений, определенных на основании изложенных выше расчетных схем. Для этого рассмотрим такие макроскопически однородные напряженные состояния композитного материала, как сдвиг напряжением  $\tau_{12}$  и одноосное напряженное состояние  $\sigma_{11}$ . Кроме того, сравним термические напряжения в фазах при условии, что макроскопические напряжения равны нулю.

Напряжения в фазе 1 при плоской деформации определяются из (6):

$$\begin{aligned} \tau_{XY,1} &= m_{12} \tau_{12}; & \sigma_{X,1} &= 0,5(m_{12} + k_{12}) \sigma_{11}; \\ \sigma_{Y,1} &= 0,5(k_{12} - m_{12}) \sigma_{11}; & \sigma_{res,1} &= \frac{B}{2c_1} \theta. \end{aligned} \quad (14)$$

Выражения для аналогичных напряжений в случае трехмерного анализа получаем из (12):

$$\begin{aligned} \tau_{12,1} &= g_{12} \tau_{12}; \quad \sigma_{11,1} = \frac{1}{3} (K_{12} + 2g_{12}) \sigma_{11}; \\ \sigma_{22,1} &= \frac{1}{3} (K_{12} - g_{12}) \sigma_{11}; \\ \sigma_{res,1} &= \frac{3K_1 K_2}{c_1 (K_2 - K_1)} (A - c_1 \alpha_1 - c_2 \alpha_2) \theta. \end{aligned} \quad (15)$$

Вычисления по формулам (14) и (15) выполнялись для таких значений физико-механических характеристик фаз рассматриваемого композитного материала:

$$\begin{aligned} \mu_1 = 81,5 \text{ ГПа}; \quad K_1 = 187,3 \text{ ГПа}; \quad \mu_2 = 301 \text{ ГПа}; \quad K_2 = 392 \text{ ГПа}; \\ \alpha_1 = 13,4 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}; \quad \alpha_2 = 5,2 \cdot 10^{-6} \text{ К}^{-1}, \end{aligned}$$

что соответствует вольфрамкобальтовым твердым сплавам. Результаты вычислений представлены в таблице, в которой величинам  $\eta_1$ ,  $\eta_2$ ,  $\eta_3$  и  $\eta_4$  отвечают отношения напряжений (14) к напряжениям (15) соответственно. Для матричного композита упругие модули тела сравнения  $\mu_c = \mu_1$ ,  $K_c = K_1$ , для композита с каркасной микроструктурой  $\mu_c = c_1\mu_1 + c_2\mu_2$ ,  $K_c = c_1K_1 + c_2K_2$ .

Отношения напряжений (14) к напряжениям (15)

$c_1$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\eta_3$	$\eta_4$
0,1	<u>1,18</u>	<u>0,59</u>	<u>0,07</u>	<u>0,83</u>
	1,26	0,53	0,08	0,91
0,2	<u>1,16</u>	<u>0,77</u>	<u>0,12</u>	<u>0,83</u>
	1,24	0,74	0,14	0,90
0,3	<u>1,15</u>	<u>0,85</u>	<u>0,15</u>	<u>0,82</u>
	1,22	0,85	0,18	0,89
0,4	<u>1,13</u>	<u>0,90</u>	<u>0,17</u>	<u>0,82</u>
	1,19	0,91	0,20	0,88
0,5	<u>1,11</u>	<u>0,92</u>	<u>0,18</u>	<u>0,81</u>
	1,17	0,94	0,21	0,86

**Примечание.** Над чертой приведены значения для матричной микроструктуры композита, под чертой – для каркасной.

Как следует из данных таблицы, лишь при макроскопическом напряженном состоянии простого сдвига композита касательные микронапряжения в фазе 1 в случае плоской деформации больше аналогичных напряжений, которые определены с использованием трехмерной расчетной схемы. Характерно, что с увеличением объемного содержания металлической фазы отношение этих микронапряжений (параметр  $\eta_1$ ) стремится к единице. Для деформации при одноосном растяжении в направлении оси  $X$  имеет место обратная зависимость: напряжения в фазе 1 в условиях плоской деформации меньше, чем при сохранении макроскопической изотропии композитного материала. При этом нормальные напряжения в направлении оси  $Y$  существенно различаются между собой в рассматриваемых расчетных схемах. Для простого растяжения также сохраняется тенденция к выравниванию микронапряжений с увеличением концентрации металлической связки. Что касается остаточных термических микронапряжений, то они меньше в случае

двухмерной расчетной схемы, однако их отношение (параметр  $\eta_4$ ) незначительно зависит от содержания в сплаве кобальта. Таким образом, наибольшее различие между количественными результатами двух- и трехмерного анализов имеет место в случае малокобальтовых твердых сплавов. Именно в этих сплавах влияние типа структуры на параметры  $\eta_k$  оказывается наибольшим. Заметим, что матричная и каркасная микроструктуры являются предельными для твердых сплавов WC–Co.

**Заключение.** Средние по объему фаз напряжения, вычисленные с использованием двухмерной расчетной схемы, могут быть как меньше, так и больше соответствующих напряжений в композите в зависимости от вида внешней нагрузки. Приведенные выше алгоритмы могут использоваться для предварительной оценки точности двухмерного приближения. Возможна ситуация, когда такое приближение окажется вполне приемлемым, если допускается погрешность до 10...15%. С помощью МКЭ можно вычислять распределение в композите локальных напряжений, величина которых зависит, в частности, от геометрии межфазной и межзеренной поверхностей (в расчетной области это замкнутые линии). Заметим, что для определения параметров начальных участков диаграмм деформирования в [3] и [5] усредняют по расчетной области вычисленные с помощью МКЭ локальные напряжения и деформации. По сравнению с таким подходом используемый ранее автором данной работы метод [8], основанный на трехмерном анализе напряженного состояния, более прост и эффективен.

## Резюме

Досліджується наближення плоскої задачі на прикладі середніх за об'ємом фаз напружень у двофазному макроскопічно ізотропному композитному матеріалі. Виконано аналіз числових результатів для вольфрамокобальтових твердих сплавів із граничними типами мікроструктури. Мікронапруження, що визначаються в рамках плоскої деформації, при простому зсуві можуть бути більшими за дійсні напруження і у випадку одновісного напруженого стану – меншими. Залишкові термічні напруження при цьому менші за дійсні. Зі збільшенням вмісту кобальтової зв'язки має місце вирівнювання напружень, що розраховувались за дво- і трьохвимірною схемами.

1. Головчан В. Т. Анизотропия физико-механических свойств композитных материалов. – Киев: Наук. думка, 1987. – 304 с.
2. Подорога В. А., Кебко В. П., Лошак М. Г. и др. Термические напряжения в твердом сплаве WC–Co после спекания // Пробл. прочности. – 1990. – № 12. – С. 87 – 93.
3. Poehch M. H., Fischmeister H. F., and Spiegler R. Assessment of the sity flow properties of the cobalt phase in WC–Co hard metals // J. Hard Mater. – 1991. – 2, No. 3-4. – P. 197 – 205.
4. Spiegler R., Schmauder S., and Exner H. E. Finite element modelling of the thermal residual stress distribution in a WC–10 wt.% Co alloy // Ibid. – 1992. – 3, No. 2. – P. 143 – 151.

5. *Poeh M. H., Fichmeister H. F., Kaute D., and Spiegler R.* FE-modeling of the deformation behavior of WC–Co alloys // *Comp. Mater. Sci.* – 1993. – **1**, No. 3. – P. 213 – 224.
6. *Siegmund T., Werner E., and Fischer F. D.* Structure-property relations in duplex materials // *Ibid.* – P. 225 – 235.
7. *Шермергор Т. Д.* Теория упругости микронеоднородных сред. – М.: Наука, 1977. – 494 с.
8. *Головчан В. Т.* О вычислении диаграмм деформирования двухфазных керметов // *Пробл. прочности.* – 2006. – № 3. – С. 99 – 111.

Поступила 10. 01. 2006