УДК 532.517.4

СИММЕТРИИ УРАВНЕНИЙ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. А. АВРАМЕНКО, Б. И. БАСОК, А. И. ТЫРИНОВ

Институт технической теплофизики НАН Украины, Киев

Получено 14.12.2004

Рассмотрено приложение групп симметрий дифференциальных уравнений (групп Ли) к анализу задач течения в пограничном слое. Анализ проведен как для ламинарных, так и для турбулентных потоков. Показано наличие непрерывных и дискретных симметрий. Приведены примеры для различных моделей турбулентности.

Розглянуто застосування груп симетрій диференціальних рівнянь (груп Лі) до аналізу задач течії в пограничному шарі. Аналіз проведений як для ламінарних, так і для турбулентних струменів. Показано наявність безперервних і дискретних симетрій. Наведені приклади для різних моделей турбулентності.

The application of symmetries groups of the differential equations (Lie groups) to the analysis of problems of boundary-layer flow is surveyed. The analysis is conducted both for laminar, and for turbulent streams. The presence of continuous and discrete symmetries is shown. The examples for different models of turbulence are given.

ВВЕДЕНИЕ

Как известно, теория пограничного слоя была разработана Людвигом Прандтлем, который упростил эллиптические уравнения Навье-Стокса до параболического приближения. Это позволило существенно увеличить количество симметрий (групп Ли) дифференциальных уравнений и тем самым упростить их анализ. Уравнения пограничного слоя имеют следующий вид:

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\left[(\nu+\nu_t)\frac{\partial u}{\partial y}\right],$$
$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{1}$$
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где x, y – продольная и поперечная координаты; u, v – компоненты скорости, соответствующие координатам x, y; p – давление; ν – кинематическая молекулярная вязкость; ν_t – турбулентная вязкость. Так как количество и вид симметрий зависят от формы дифференциальных уравнений, рассмотрим раздельно группы симметрии для ламинарных и турбулентных потоков.

1. ЛАМИНАРНЫЙ РЕЖИМ

Группы симметрии стационарного пограничного слоя исследованы в работе [1]. В инфинитезимальной форме они могут быть представлены следующим образом:

$$q_1 = \Phi(x)\frac{\partial}{\partial y} + \Phi'(x)u\frac{\partial}{\partial v},\ q_2 = \frac{\partial}{\partial x},$$
$$q_3 = 2x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} - v\frac{\partial}{\partial v}, \tag{2}$$
$$q_4 = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u} + 2p\frac{\partial}{\partial p},\ q_5 = \frac{\partial}{\partial p},$$

где $\Phi(x)$ – произвольная функция. Первая симметрия q_1 носит название принципа смещения Прандтля (Prandtl's transposition principle) [2]. В работе [3] на основании выражений (2) с использованием методики, приведенной в [4], построена оптимальная система подалгебр Ли без учета симметрии q_1:

$$q_1,\ b_1q_1 + b_2q_2,\ b_2q_2 + b_3q_3,\ b_3q_3 + b_4q_4, \tag{3}$$

т. е. система, которая позволяет конструировать оптимальную систему инвариантных решений. Здесь $b_1 - b_4$ произвольные постоянные. Напомним, что “оптимальной системой” инвариантных относительно s-параметрических групп решений системы дифференциальных уравнений называется набор решений, обладающий тем свойством, что если $f(x)$ – любое другое решение, инвариантное относительно s-параметрической группы, то существует такая симметрия, которая отображает $f(x)$ в решение из этого набора. Выполнив экспоненцирование выражений (2), находим

$$u^{(1)} = u(x, y-\Theta),\ v^{(1)} = v(x, y-\Theta),$$
$$u^{(2)} = u(x-b_2\Theta, y-b_1\Theta),$$
$$v^{(2)} = v(x-b_2\Theta, y-b_1\Theta),$$
$$u^{(3)} = \exp(-2b_3\Theta)u(x-b_2\Theta, y\exp(-b_3\Theta)),$$
$$v^{(3)} = \exp(-b_3\Theta)v(x-b_2\Theta, y\exp(-b_3\Theta)),$$
$$u^{(4)} = \exp((b_4-2b_3)\Theta)u(\exp(-b_4\Theta),$$
$$y\exp(-b_3\Theta)),$$
$$v^{(4)} = \exp(-b_3\Theta)v(x\exp(-b_4\Theta), y\exp(-b_3\Theta)),$$

где Θ – параметр группового преобразования. Представленные соотношения связывают “новые” и ”старые” решения.

Можно также построить решение, порождаемое полным векторным полем (2). Оно выглядит следующим образом:

$$u^{(\Sigma)} = \exp\Big((b_4-2b_3)\Theta\Big)u\bigg(\Big(\frac{b_2}{b_4}+x\Big)\exp(-b_4\Theta)-$$
$$-\frac{b_2}{b_4}, \Big(\frac{b_1}{b_3}+y\Big)\exp(-b_3\Theta)-\frac{b_1}{b_3}\bigg),$$
$$v^{(\Sigma)} = \exp(-b_3\Theta)v\bigg(\Big(\frac{b_2}{b_4}+x\Big)\exp(-b_4\Theta)-$$
$$-\frac{b_2}{b_4}, \Big(\frac{b_1}{b_3}+y\Big)\exp(-b_3\Theta)-\frac{b_1}{b_3}\bigg).$$

Группы Ли обладают замечательным свойством, которое позволяет строить автомодельные формы системы дифференциальных уравнений. Для такого построения автомодельных форм системы (1) перепишем (2) в следующем виде:

$$q_\Sigma = (b_1+b_3y)\partial_y + (b_2+b_4x)\partial_x +$$
$$+(b_4-2b_3)u\partial_u - b_3v\partial_v. \qquad (4)$$

Напомним, что автомодельные переменные определяются как инварианты векторного поля (4), т. е. как решения однородных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, порожденных полем (4). Для независимой автомодельной переменной η имеем следующее уравнение:

$$(b_1+b_3y)\partial_y\eta + (b_2+b_4x)\partial_x\eta = 0,$$

которое решаем, используя метод характеристик [5]. В результате имеем

$$\eta = C\frac{(b_1+b_3y)^{b_4}}{(b_2+b_4x)^{b_3}},$$

где C – произвольная постоянная. При нахождении вида автомодельных функций необходимо задаться параметрической переменной. Выберем в качестве таковой x, как обычно это делается в теории пограничного слоя. Тогда определяющие уравнения для u и v имеют вид

$$(b_2+b_4x)\partial_x f'(\eta) + (b_4-2b_3)u\partial_u f'(\eta) = 0,$$

$$(b_2+b_4x)\partial_x\phi(\eta) - b_3v\partial_v\phi(\eta) = 0,$$

где штрих обозначает дифференцирование по η. В качестве искомой функции для u выбрана производная для удобства в дальнейших преобразованиях. Решение этих уравнений:

$$u = f'(\eta)(b_2+b_4x)^{1-2b_3/b_4}/m,$$

$$v = \phi(\eta)(b_2+b_4x)^{-b_3/b_4},$$

где m – произвольная константа. Используя уравнение неразрывности, найдем связь между $f'(\eta)$ и $\phi(\eta)$:

$$\phi = \frac{C^{-1/b_4}}{m}\bigg(f'\eta^{1/b_4} + \frac{b_3-b_4}{b_3b_4}\int\limits_0^\eta f'\eta^{1/b_4-1}d\eta\bigg).$$

Следовательно, выражение для нормальной компоненты скорости имеет вид

$$v = \frac{C^{-1/b_4}}{m(b_2+b_4x)^{b_3/b_4}}\bigg(f'\eta^{1/b_4} +$$
$$+\frac{b_3-b_4}{b_3b_4}\int\limits_0^\eta f'\eta^{1/b_4-1}d\eta\bigg).$$

Подставим u и v в первое уравнение (1) при учете отсутствия градиента давления. В результате получим [3]

$$(b_4-2b_3)f'^2 + (b_3-b_4)f''\eta^{1-1/b_4}\int\limits_0^\eta f'\eta^{1/b_4-1}d\eta =$$

$$= m(b_3b_4)^2C^{2/b_4}f''' +$$
$$+mb_3^2b_4(b_4-1)c^{2/b_4}\eta^{1-1/b_4}f''. \qquad (5)$$

Это уравнение можно назвать обобщенным уравнением Блазиуса. Оно имеет интегро-дифференциальную форму. Однако его можно сделать чисто дифференциальным, если выделить интеграл, который стоит в левой части, и затем один раз продифференцировать. В результате получим дифференциальное уравнение четвертого порядка.

В задачах пограничного слоя обычно принимается $b_4 = 1$. В этом случае уравнение (5) существенно упрощается (здесь принято, как обычно в задачах гидродинамического пограничного слоя $f(0) = 0$):

$$(1 - 2b_3)f'^2 + (b_3 - 1)f''f = m(b_3C)^2 f'''.$$

Кроме того, также обычно принимается, что $b_1 = b_2 = 0$, так как при этом легко удовлетворить условия прилипания на стенке. Тогда, объединив b_3 и C в новую константу C^*, перепишем предыдущее уравнение в следующей форме:

$$(1 - 2b_3)f'^2 + (b_3 - 1)f''f = mC^{*2} f'''. \qquad (6)$$

Из уравнения (6) следуют всевозможные варианты исследованных ранее видов течения типа "пограничный слой". Если положить $b_3 = 1/2$, $m = 1$, $C^* = 1$, то уравнение (6) превращается в уравнение Блазиуса, описывающее процессы течения в пограничном слое около плоской пластины и на границе раздела двух потоков:

$$f''f + 2f''' = 0.$$

При $b_3 = 2/3$, $m = 3$ и $C^* = 1/3$ мы переходим к уравнению, которое описывает течение в плоской затопленной струе:

$$f'^2 f + f''f + f''' = 0.$$

Уравнение (6) переходит в уравнение для плоской полуограниченной струи, если принять $b_3 = 3/4, \quad m = C^* = 1$:

$$2f'^2 f + f''f + 4f''' = 0.$$

При $b_3 = 1$ из уравнения (6) получаем

$$f'^2 + mC^{*2} f''' = 0. \qquad (7)$$

Это уравнение обладает трехпараметрической разрешимой группой Ли:

$$q_1 = \partial_\eta, \quad q_2 = \partial_f, \quad q_3 = -\eta\partial_\eta + f\partial_f.$$

Следовательно, согласно [4], уравнение (7) может быть проинтегрировано в квадратурах. Решение имеет вид

$$u = -\Theta_l(\frac{\eta}{\sqrt{6mC^{*2}}} + C_2,$$

$$h_2 = 0, \quad h_3 = C_1)(mx)^{-1},$$

$$v = -\eta\Theta_l(\frac{\eta}{\sqrt{6mC^{*2}}} + C_2,$$

$$h_2 = 0, \quad h_3 = C_1)(C^* mx)^{-1},$$

где Θ_l – эллиптическая функция Вейерштрасса; C_1 и C_2 – константы интегрирования; h_2 и h_3 – так называемые инварианты функции Вейерштрасса. Полученные решения согласуются с распределением скорости в следе за обтекаемым телом при турбулентном режиме течения. На основе этих профилей и индуктивной теории Г. Рейхардт по экспериментальным данным можно получать информацию о турбулентной структуре потока. Уравнение (6) допускает двухпараметрическую группу симметрий

$$q_1 = \partial_\eta,$$

$$q_2 = -\eta\partial_\eta + f\partial_f.$$

Это позволяет редуцировать уравнение (6) на два порядка. Техника и примеры редукции представлены в [3–6]. Кроме непрерывных симметрий, для уравнений Прандтля существуют дискретные симметрии отражения. Эти симметрии характеризуются инфинитезимальными генераторами

$$q = x\frac{\partial}{\partial x} + u\frac{\partial}{\partial u}, \quad q = y\frac{\partial}{\partial y} + v\frac{\partial}{\partial v}. \qquad (8)$$

Первый генератор (8) порождает следующие автомодельные переменные:

$$\eta = \frac{y}{L}, \quad u = \frac{x\nu}{L^2} f'(\eta), \quad v = -\frac{\nu}{L} f(\eta).$$

Соответствующее автомодельное уравнение имеет вид

$$f''' + ff'' - f'^2 = 0.$$

Примеры использования таких типов симметрий для конкретных задач можно найти в [6].

В работе [7] рассмотрены приложения анализа симметрий для нестационарного и стационарного ламинарного пограничного слоя в условиях продольного градиента давления. Температурные пограничные слои проанализированы в [6].

2. ТУРБУЛЕНТНЫЙ РЕЖИМ

Свойства симметрии турбулентных потоков исследовались не так интенсивно, как ламинарных. Очевидно, это было обусловлено большой структурной сложностью уравнений для турбулентных течений, а также большим разнообразием моделей турбулентной вязкости, с помощью которых замыкаются уравнения переноса. Каждой модели турбулентности свойственен свой тип симметрии. Поэтому для турбулентного пограничного слоя вид автомодельных переменных будет изменяться при изменении модели турбулентной вязкости.

Начнем рассмотрение с простейшей алгебраической модели, которая получается из модели длины пути смешения Прандтля:

$$\nu_t = l^2 \frac{\partial u}{\partial y} = (\chi y)^2 \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{9}$$

Если для профиля скорости использовать логарифмический закон стенки, то для турбулентной вязкости получаем следующее соотношение:

$$\nu_t = \chi u_\tau y, \tag{10}$$

где $\chi = 0,4$ – постоянная Кармана. Исследование системы (1) с учетом соотношения (10) на свойства симметрии позволили получить выражение для инфинитезимального генератора групп Ли [8]:

$$q = C_3(1+MY)\partial_Y + (C_1 x C_2)\partial_\chi +$$

$$+(C_1 - C_3 M)u\partial_u, \tag{11}$$

где C_1, C_2, C_3 – константы интегрирования; $M = \chi u_\tau/(\nu)^{0.5}$; u_τ – скорость трения; $Y = y/(\nu)^{0.5}$. На основе выражения (11) находим правило получения новых решений по известным решениям:

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= \exp(-\Theta) u\Big(x\exp(-\Theta), Y\Big),\\
V^{(1)} &= V\Big(x\exp(-\Theta), Y\Big),\\
u^{(2)} &= u(x-\Theta, Y),\\
V^{(2)} &= V(x-\Theta, Y),\\
u^{(3)} &= \exp(-M\Theta)u\times\\
&\times\left(x, \frac{\Big[(1+MY)\exp(-M\Theta)-1\Big]}{M}\right),\\
V^{(3)} &= V\left(x, \frac{\Big[(1+MY)\exp(-M\Theta)-1\Big]}{M}\right),
\end{aligned}$$

где $V = v/(\nu)^{0,5}$. Далее, используя опять выражение (11), находим автомодельные формы уравнений (1). Для автомодельной переменной имеем (C – постоянная интегрирования):

$$\eta = C\frac{1+MY}{(C_1 x + C_2)^{MC_3/C_1}}.$$

Если в качестве параметрической переменной выбрать x, то получаем следующие выражения для компонент скорости: автомодельной скорости

$$\begin{aligned}
u &= \frac{f'(\eta)}{(C_1 x + C_2)^{MC_3/C_1 - 1}},\\
V &= \tfrac{1}{CM}\Big[f'\eta M C_3 - f C_1\Big].
\end{aligned}$$

При этом уравнение (1) переходит в автомодельное уравнение

$$(C_1 - MC_3)f'^2 - C_1 f f'' = \eta f''' C M^2 + f'' C M^2,$$

примеры анализа которого можно найти в [6]. Если использовать модель длины пути смешения (9) в ее общем виде, то для системы уравнений (1) и (9) получим инфинитезимальный генератор в следующем виде [9–11]:

$$q = [C_1 Y + C_3\Phi(x)]\partial_Y + [C_1 x + C_2]\partial_x -$$

$$-C_1 u\partial_u + [C_3\Phi'(x)u - C_1 V]\partial_V. \tag{12}$$

На основе приведенного инфинитезимального генератора, без учета подалгебры Ли C_3, находим вид автомодельных величин:

$$\begin{aligned}
\eta &= \frac{sy}{b(x_0+x)}, \quad & Re_x &= \frac{U_\infty(x_0+x)}{\nu},\\
\bar{u} &= \frac{\phi'}{bRe_x}, \quad & \bar{v} &= \frac{v}{U_\infty} = \frac{\phi'\eta}{bRe_x}.
\end{aligned}$$

Здесь x_0 соответствует либо началу ламинарно-турбулентного перехода, либо $x_0 = 0$, если гипотетический турбулентный пограничный слой возникает на передней кромке обтекаемого тела. Коэффициенты b и s играют роль масштабных множителей, и их значения могут быть выбраны, исходя из удобства численных расчетов.

Уравнения движения (1) в указанных переменных приобретают вид обыкновенного дифференциального уравнения

$$-\frac{b}{s^2}\phi'^2 = \left[\left(1 + \frac{\chi^2}{s}\eta^2\phi''\right)\phi''\right]'. \tag{13}$$

Рассмотрим модели более высокого порядка. Первая модель – так называемая "ν"-модель – в которой появляется дополнительное уравнение, описывающее поведение суммарной ν_Σ (турбулентной и молекулярной) вязкости. Данная модель была предложена в работе [12] и пригодна как для пристенных, так и для свободных (струйных) течений. В соответствии с этой моделью в дополнение к уравнениям системы (1) появляется уравнение

$$u\frac{\partial\bar\nu_\Sigma}{\partial_x}+V\frac{\partial\bar\nu_\Sigma}{\partial_Y} = \bar\nu_\Sigma\frac{\partial^2\bar\nu_\Sigma}{\partial Y^2}+\left(\frac{\partial\nu_\Sigma}{\partial Y}\right)^2+$$

$$+A_K(\bar\nu_\Sigma-j)\left|\frac{\partial u}{\partial Y}\right|-\frac{B_K}{L_K^2}(\bar\nu_\Sigma-j)\bar\nu_\Sigma, \qquad (14)$$

где $\bar\nu_\Sigma = \nu_\Sigma/\nu$, $A_K = 0,133/\sqrt{\nu}$; $B_K = 0,8$; $L_K = Y$ для пристенных течений и $L_K \sim \delta/\sqrt{\nu}$ и для струйных, j может равняться либо единице, либо нулю в зависимости от того, что используется в последних двух слагаемых уравнения (14). Если используется турбулентная вязкость, то $j = 1$, если же суммарная, то $j = 0$. Групповой анализ системы уравнений (1) и (14) показывает, что инфинитезимальный генератор в данном случае приобретает вид

$$q = [C_1Y+C_3\Phi(x)]\partial_Y+[C_1x+C_2]\partial_x+C_1u\partial_u+$$

$$+[C_3\Phi'(x)u+C_1V]\partial_V+2C_1\bar\nu_\Sigma\partial_{\bar\nu_\Sigma}. \qquad (15)$$

Анализ, проведенный на основе инфинитезимального генератора (15), как и в предыдущих случаях, позволяет получить форму автомодельных переменных (симметрия C_3 не учитывалась)

$$\eta = \tfrac{y}{x}, \qquad \bar u = \phi' Re_x,$$
$$\bar v = [\phi'\eta-2\phi]Re_x, \quad \bar\nu_\Sigma = M(\nu)Re_x^2.$$

Используя эти переменные, получим следующую систему уравнений:

$$M\phi'''+(M'+2\phi)\phi''-\phi'^2 = 0,$$

$$2(\phi'M-\phi M') = MM''+M'^2+$$

$$+A_K\phi''\left[M-\frac{j}{Re_x^2}\right]-\frac{B_K}{\eta^2}M\left[M-\frac{j}{Re_x^2}\right], \qquad (16)$$

которая не является полностью автомодельной из-за наличия постоянной j. В случае $j = 0$ приходим к полностью автомодельной системе уравнений. Наличие неавтомодельности не должно вызывать затруднений при численном расчете, так как на каждом шаге маршевой переменной следует задавать Re_x как постоянный параметр и проводить решение системы как системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

В качестве модели турбулентной вязкости второго порядка рассмотрим $k-\varepsilon$-модель. В соответствии с этой моделью к уравнениям движения и энергии добавляются два уравнения для кинетической энергии турбулентности k и для скорости диссипации ε:

$$u\frac{\partial k}{\partial x}+V\frac{\partial k}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\left[(1+\frac{C_\nu}{\kappa_K}\frac{k^2}{\nu\varepsilon})\frac{\partial k}{\partial Y}\right]+$$

$$+\frac{C_\nu}{\nu}\frac{k^2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2-\varepsilon,$$

$$u\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+V\frac{\partial\varepsilon}{\partial Y} = \frac{\partial}{\partial Y}\left[\left(1+\frac{C_\nu}{\kappa_\varepsilon}\frac{k^2}{\nu\varepsilon}\right)\frac{\partial\varepsilon}{\partial Y}\right]+ \qquad (17)$$

$$+C_{1\varepsilon}\frac{C_\nu}{\nu}k\left(\frac{\partial u}{\partial Y}\right)^2-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}-$$

$$-C_{2\varepsilon}\frac{\varepsilon^2}{k}\left\{1-A_\varepsilon\exp\left[-B_\varepsilon\left(\frac{k^2}{\nu\varepsilon}\right)\right]\right\},$$

где C_ν, $C_{1\varepsilon}$, $C_{2\varepsilon}$, κ_K, κ_ε, A_ε, B_ε – константы модели турбулентности. Групповой анализ системы, состоящей из уравнений (1) и (17), позволил получить следующий инфинитезимальный генератор:

$$q = [C_1Y+C_3\Phi(x)]\partial_Y+[C_1x+C_2]\partial_x-$$

$$-C_1u\partial_u+[C_3\Phi'(x)u-C_1V]\partial_V- \qquad (18)$$

$$-2C_1k\partial_k-4C_1k\partial_k-4C_1\varepsilon\partial_\varepsilon.$$

На основе инфинитезимального генератора находим вид автомодельных переменных (принимаем $C_2 = C_3 = C_5 = 0$):

$$\eta = \frac{y}{x},\ \bar u = \frac{\phi}{Re_x},\ V = \frac{U_\infty}{\sqrt{\nu}Re_x},$$

$$\bar k = \frac{k}{U_\infty^2} = \frac{K(\eta)}{Re_x^2},\ \bar\varepsilon = \frac{\varepsilon\nu}{U_\infty^4} = \frac{E(\eta)}{Re_x^4}.$$

В данном случае систему уравнений турбулентного пограничного слоя можно представить в автомодельной форме

$$-\phi^2 = \left[\left(1+C_\nu\frac{K^2}{E}\right)\phi'\right]',$$

$$-2\phi K = \left[\left(1 + C_\nu \frac{K^2}{\kappa_K E}\right) K'\right]' + C_\nu \frac{K^2}{E}\phi'^2 - E, \tag{19}$$

$$-4\phi E = \left[\left(1 + C_\nu \frac{K^2}{\kappa_\varepsilon E}\right) E'\right]' + C_\nu C_{1\varepsilon} K \phi'^2 -$$

$$- C_{2\varepsilon}\frac{E^2}{K}\left[1 - A_\varepsilon \exp\left(-B_\varepsilon \frac{K^4}{E^2}\right)\right].$$

Примеры численных решений уравнений (13), (16) и (19) и их приближенный аналитический анализ можно найти в работах [6,8-11].

Симметрия C_3 генераторов (12), (15) и (18) (она же симметрия q_1 в (2)) была использована в работе [13] для анализа уравнений пограничного слоя около поверхности произвольной формы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе продемонстрированы приложения методов групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений пограничного слоя. Конечно, остался не охваченным широкий круг проблем. Это и понятно, так как к настоящему времени проведено большое число исследований, в которых используются (может быть не всегда осознано) групповые методы анализа. Эти методы применяются и в новых областях теоретической гидромеханики. Например, групповой метод получения автомодельных форм был использован при анализе биоконвекционных (биоконвенкция изучает массообменные и гидродинамические процессы, связанные с движением микроорганизмов) процессов [14, 15]. В изложенном материале показано несколько вариантов применения групп симметрий дифференциальных уравнений. Разнообразие групповых методов зависит от количества симметрий, которые допускает конкретная система дифференциальных уравнений. Как правило, чем проще структура дифференциальных уравнений, тем большее количество симметрий присуще им и, следовательно, тем шире арсенал групповых методов. Однако даже если не удается найти полные симметрии задачи, можно использовать частичные симметрии. Хотя в этом случае не удается получить полных автомодельных форм, но размерность задачи понижается. При этом приходим к системе уравнений с параметром, которая проще для анализа, чем исходная. Существует проблема правильности выбора симметрии. Необходимо уметь выявить, какая конкретно симметрия присуща той или иной задаче. Иногда в этом помогают интегральные условия сохранения импульса, момента импульса и т. д. Правильный выбор необходимой симметрии может быть связан с симметрией граничных или начальных условий. Этот вопрос разработан еще не достаточно полно.

1. *Павловский Ю. Н.* Исследования некоторых инвариантных решений уравнений пограничного слоя // Журнал выч. математики и мат. физики.– 1961.– 1 N2.– С. 280 - 294.
2. *Oberlack M.* Asymptotic expansion, symmetry groups, and invariant solutions of laminar and turbulent wall-bounded flows // ZAMM.– 2000.– 80 N 11, 12.– P. 791 - 800.
3. *Авраменко А. А.* Группы Ли и автомодельные формы уравнений Прандтля // Прикладна гідромеханіка.– 1999.– 1 (73), N 2.– С. 3 - 11.
4. *Олвер П.* Приложение групп Ли к исследованию дифференциальных уравнений.– М.: Мир, 1989.– 639 с.
5. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка.– М.: Наука, 1966.– 260 с.
6. *Авраменко А.А., Басок Б.И., Кузнецов А.В.* Групповые методы в теплофизике.– Киев: Наук. думка, 2003.– 484 с.
7. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений.– М.: Наука, 1978.– 400 с.
8. *Авраменко А. А.* Свойства симметрии турбулентных динамических и температурных пограничных слоев // Пром. теплотехника.– 2000.– 22, N 5-6.– С. 29 - 36.
9. *Авраменко А. А.* Групповой анализ теплогидродинамимческих процессов в турбулентных параболических течениях // Доповіді НАН України.– 1999.– N8.– С. 76 - 80.
10. *Авраменко А. А.* Автомодельный анализ турбулентных гидродинамических и температурных пограничных слоев // Теплофизика высоких температур.– 2000.– 38, N3.– С. 452 - 457.
11. *Avramenko A. A., Kobzar S. G., Shevchuk I. V., Kuznetsov A. V., Iwanisov L. T.* Symmetry of turbulent boundary-layer flows: Investigation of different eddy viscosity models // Acta Mechanica.– 2001.– 151, N1-2.– P. 1 - 14.
12. *Nee P., Kovasznay L.S.G.* Structure of the turbulent boundary layer // Phys. Fluids.– 1969.– 12, N3.– P. 473 - 484.
13. *Авраменко А. А.* Уравнения пограничного слоя около поверхности произвольной формы // Доповіді НАН України.– 2001.– N4.– С. 95 - 99.
14. *Metcalfe A. M., Pedley T. J.* Falling plumes in bacterial bioconvection // J. Fluid Mech.– 2001.– 445.– P. 121 - 149.
15. *Kuznetsov A.V., Avramenko A.A., Geng P.* Analytical investigation of a falling plume caused by bioconvection of oxytactic bacteria in a fluid saturated porous medium // International Journal of Engineering Science.– 2004.– 42.– P. 557 - 569.