

УДК 532.595

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ И ЗАВИСИМОСТИ ДАВЛЕНИЕ – РАСХОД ПРИ ВОЛНОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ ЖИДКОСТИ В СИСТЕМАХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТРУБОК

Н. Н. КИЗИЛОВА

Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина

Получено 10.01.2005

Приведены результаты исследования осесимметричного волнового течения вязкой несжимаемой жидкости в толстостенной трубке из вязкоупругого материала. Получены выражения для компонент скорости движения жидкости, перемещения стенки и давления в жидкости. Проведены расчеты объемного расхода в трубке с переменным сечением с учетом отражения волны на конце трубки. На основе полученных результатов рассчитаны параметры волн, которые распространяются в артериальных руслах, моделируемых системами трубок с заданными геометрическими и механическими свойствами. Исследованы спектры волновой проводимости русел с разной геометрией, зависимости давление – расход на входе в систему, а также интенсивности падающей и отраженных волн разрежения и сжатия, связанных с отражениями в системах трубок. Путем компьютерного моделирования проведен сравнительный анализ влияния различных геометрических и механических параметров русла на исследованные зависимости. Выделены диагностически информативные параметры, которые позволяют оценить состояние кровообращения в системе по результатам измерения давления и расхода в питающей артерии органа.

Наведені результати дослідження осесимметричної хвильової течії в'язкої нестисливої рідини у товстостінній трубці з в'язкоупругого матеріалу. Отримані вирази для компонентів швидкості руху рідини, зміщення стінки й тиску в рідині. Проведені розрахунки об'ємної витрати у трубці зі змінним перерізом з урахуванням відображення хвилі на кінці трубки. На основі отриманих результатів розраховані параметри хвиль, які поширюються в артеріальних руслах, змодельованих системами трубок із заданими геометричними і механічними властивостями. Досліджено спектри хвильової провідності русел з різною геометрією, залежності тиск – витрата на вході в систему та інтенсивності падаючої й відбитої хвиль розрідження та стиску, зв'язаних з відбиттями хвиль у системах трубок. Шляхом комп'ютерного моделювання проведено порівняльний аналіз впливу різних геометричних і механічних параметрів русла на досліджені залежності. Виділені діагностично інформативні параметри, які дозволяють оцінити стан кровообігу в системі за результатами вимірювання тиску й витрати у живильній артерії органа.

The results of investigation of an axisymmetric wave flow of a viscous incompressible liquid in a thick-walled tube of viscoelastic material are presented. The expressions for the components of liquid velocity, wall displacement and pressure in the liquid are obtained. Calculations of the volumetric flow rate in the tube with variable cross-section are carried out with allowance for wave reflection at the tube end. Parameters of the waves propagating in the arterial bed, modeled as the system of tubes with given geometrical and mechanical properties, are calculated on the basis of the obtained results. The wave conductivity spectrum of the beds having various geometry, pressure-flow dependencies in bed's inlet and intensity of the compression and extension incident and reflected waves related with reflections in the system are studied. A comparative analysis of influence of various geometric and mechanical parameters of the beds on the considered dependencies is carried out by means of computer modeling. Certain diagnostically informative parameters are distinguished, which allow the estimation of blood circulation state in the system on the basis of results of pressure and volumetric rate measurement in organ's feeding artery.

ВВЕДЕНИЕ

Для анализа и биомеханической интерпретации кривых давления $P(t)$ и объемного расхода $Q(t)$, экспериментально регистрируемых в различных артериях внутренних органов человека, используется модель осесимметричного течения вязкой несжимаемой жидкости в упругодеформируемой трубке при условии продольного закрепления наружной стенки трубки к окружающим тканям [1]. В последнее время появились результаты экспериментальных исследований реологических параметров сосудистой стенки [2–6], которые могут быть использованы для обобщения модели [1] и проведения более детальных расчетов с целью приложения результатов в медицинской диагностике.

Вязкоупругие свойства стенок артериальных сосудов влияют на скорость распространения волн, их затухание по мере продвижения по системе артерий и коэффициент отражения волн в местах ветвления сосудов. Отражения волн давления на бифуркациях артериальных сосудов приводят к тому, что регистрируемый сигнал $P(t)$ представляет собой суперпозицию падающей и многочисленных отраженных волн. В свою очередь, отраженные волны вызывают ретроградный ток крови и изменяют вид кривой $Q(t)$. Диагностический анализ регистрируемых зависимостей $P(t)$ и $Q(t)$ позволяет выявить ценную клиническую информацию и должен основываться на знании закономерностей распространения волн в артериальном русле с заданными геометрическими и механиче-

скими параметрами. В данной работе, являющейся обобщением результатов предыдущих исследований [7], проведен детальный анализ таких закономерностей.

1. ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим осесимметричное течение вязкой несжимаемой жидкости по цилиндрической трубке из вязкоупругого материала. На конце трубки имеется дополнительный проводящий элемент с сопротивлением Z_t , который может являться сужением, разветвлением трубки или сложной системой трубок (как, например, внутриорганный артериальное русло, расположенное ниже по течению крови). Комплексная величина Z_t характеризует резистивные и емкостные свойства проводящего элемента и определяет условия отражения волны на конце трубки. При $Z_t = 0$ отраженная волна отсутствует (открытый конец), а $Z_t = \infty$ соответствует закрытому концу (полное пережатие артерии).

Система уравнений для жидкости и трубки включает законы сохранения массы и импульсов для жидкости и материала стенки:

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \nabla) \vec{v} \right) = -\nabla p + \eta \Delta \vec{v}, \quad (2)$$

$$\rho_w \frac{\partial^2 \vec{v}}{\partial t^2} = \operatorname{div} \hat{\sigma}, \quad (3)$$

где $\vec{v} = (v_r, 0, v_x)$; $\vec{u} = (u_r, 0, u_x)$ – скорость движения жидкости и перемещение стенки в связанной с трубкой цилиндрической системе координат; ρ_w , ρ – плотности материала стенки и жидкости; η – вязкость жидкости; p – гидростатическое давление в жидкости; $\hat{\sigma}$ – тензор напряжений материала стенки.

Граничные условия включают условия осевой симметрии профиля скорости, непрерывности скорости на внутренней поверхности подвижной стенки трубки, условия непрерывности нормальной и касательной компонент напряжений на внутренней поверхности стенки, а также условия закрепления наружной поверхности стенки, соответственно:

$$r = 0 : \quad v_r = 0, \quad |v_x| < \infty, \quad (4)$$

$$r = R :$$

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = \vec{v}, \quad -p + \eta \frac{\partial v_r}{\partial r} = \sigma_{rr}, \quad (5)$$

$$\eta \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) = \sigma_{rx},$$

$$r = R + h : \quad \vec{u} = 0, \quad \sigma_{rr} = 0, \quad \sigma_{rx} = 0, \quad (6)$$

где R – невозмущенный радиус; h – толщина стенки трубки.

Во входном сечении задано давление в виде

$$x = 0 : \quad p = \sum_{j=0}^{\infty} P_j e^{i\omega j t}, \quad (7)$$

где ω – круговая частота падающей волны; P_j – коэффициенты разложения; j – номер гармоники. На выходе заданы условия непрерывности давления и расхода, которые фактически определяют входное волновое сопротивление Z_t дополнительного проводящего элемента:

$$x = L : \quad \int_0^{R'} r p dr = \pi Z_t (R')^2 \int_0^{R'} r u_x dr. \quad (8)$$

Здесь $R' = R + u_R$; $u_R = u_r|_{x=R}$. В соответствии с результатами экспериментов [2–6], в качестве определяющего соотношения для материала стенки можно использовать модель Фойхта:

$$\hat{\sigma} = \hat{E} \hat{\varepsilon} + \mu_w \frac{D \hat{\varepsilon}}{Dt}, \quad (9)$$

где \hat{E} – тензор модулей упругости; μ_w – вязкость материала стенки; D/Dt – оператор дифференцирования по времени. Численные значения μ_w и компонент \hat{E} получены экспериментально для ряда артерий человека и животных [2–5, 8, 9]. Рассматривая материал стенки как однородный изотропный, для компонент тензора модулей упругости имеем

$$E_{jj} = \frac{E(1-\varsigma)}{(1+\varsigma)(1-2\varsigma)}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$E_{jj} = G, \quad j = 4, 5, 6, \quad (10)$$

$$E_{jk} = \frac{E\varsigma}{(1+\varsigma)(1-2\varsigma)}, \quad j, k = 1, 2, 3, \quad j \neq k,$$

$$E_{jk} = 0, \quad j, k = 4, 5, 6, \quad j \neq k,$$

где E – модуль Юнга; ς – коэффициент Пуассона; G – модуль сдвига материала стенки.

Подставив выражения (9), (10) в уравнения (1)–(3), получим следующую систему уравнений, описывающую осесимметричное движение жидкости и стенки трубки:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{\partial v_x}{\partial x} = 0, \quad (11)$$

$$\rho \frac{\partial v_r}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} - \frac{v_r}{r^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial x^2} \right), \quad (12)$$

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \right), \quad (13)$$

$$\rho_w \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \left(\lambda + 2\mu + 2\mu_w \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial r} + 2 \left(\mu + \mu_w \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) - \frac{u_r}{r^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} \right), \quad (14)$$

$$\rho_w \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = \left(\lambda + 2\mu + 2\mu_w \frac{\partial}{\partial t} \right) \frac{\partial \Theta}{\partial x} + 2 \left(\mu + \mu_w \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right), \quad (15)$$

где

$$\Theta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{\partial u_x}{\partial x};$$

$$\lambda = \frac{E\zeta}{(1+\zeta)(1-2\zeta)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1+\zeta)}.$$

Отличие задачи (11)–(15) от постановки, рассматривавшейся ранее в [7], состоит в наличии дополнительного оператора дифференцирования по времени в правых частях уравнений (14), (15). Для чисто упругой стенки при $\mu_w = 0$ соотношения (14)–(15) переходят в уравнения модели Ляме [10]. Для случая длинной трубки $R \ll L$ по аналогии [7] можно опустить производные $\partial^2 v_j / \partial x^2$ в правых частях (12), (13). Будем искать решение (11)–(15) в виде разложений:

$$F(t, r, x) = \sum_{j=0}^{\infty} F_j(r) e^{i\omega_j(t-x/c_j)}, \quad (16)$$

где $F = \{v_r, v_x, u_r, u_x, p\}$; $F_j(r)$ – амплитуды разложений соответствующей неизвестной $F(t, r, x)$; c_j –

комплексная скорость распространения j -ой гармоники. Подставив выражение (16) в соотношения (11)–(15), получаем уравнения Бесселя для определения амплитуд $v_{rj}, v_{xj}, u_{rj}, u_{xj}$. Их решения с учетом граничных условий (4) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} p(t, r, x) &= \sum_{j=0}^{\infty} i\omega_j \rho C_1 J_0(\tau_j r) e^{i\omega_j(t-x/c_j)}, \\ v_r(t, r, x) &= \sum_{j=0}^{\infty} i\omega_j (C_{1j} J_1(\tau_j r) + C_{2j} J_1(\zeta_j r)) / c_j e^{i\omega_j(t-x/c_j)}, \\ v_x(t, r, x) &= \sum_{j=0}^{\infty} i\omega_j (C_1 J_0(\tau_j r) / c_j + C_{2j} \gamma_j J_0(\zeta_j r)) e^{i\omega_j(t-x/c_j)}, \\ u_r &= \sum_{j=0}^n i\omega_j (C_{3j} J_1(\zeta_j r) + C_{4j} Y_1(\omega_j \kappa_j r) + C_{5j} J_1(\tau_j r) + C_{6j} Y_1(\tau_j r)) / c_j e^{i\omega_j(t-x/c_j)}, \\ u_x &= \sum_{j=0}^n [\omega_j (C_{3j} J_0(\kappa_j r) \kappa_j + C_{4j} Y_0(\kappa_j r) \kappa_j) + i\omega_j (C_{5j} J_0(\tau_j r) + C_{6j} Y_0(\tau_j r)) / c_j] e^{i\omega_j(t-x/c_j)}. \end{aligned} \quad (17)$$

Здесь $J_{0,1}$ и $Y_{0,1}$ – функции Бесселя первого и второго рода;

$$\tau_j = i\omega_j / c_j; \quad \zeta_j = i\omega_j \gamma_j;$$

$$\gamma_j = (i\rho / (\eta\omega_j) + c_j^{-2})^{0.5};$$

$$\kappa_j = (\rho_w / (\mu + i\omega_j \mu_w) - c_j^{-2})^{0.5};$$

C_{1j}, \dots, C_{6j} – неизвестные постоянные, подлежащие определению из оставшихся неиспользованными граничных условий (5), (6). Подставив выражение (16) в соотношения (5), (6), получим систему уравнений в матричной форме:

$$M\vec{C} = 0, \quad (18)$$

где $\vec{C}^T = (C_{1j}, C_{2j}, C_{3j}, C_{4j}, C_{5j}, C_{6j})$;

$$M_{31} = M_{32} = M_{61} = M_{62} = 0;$$

$$\begin{aligned}
 M_{11} &= 2\mu\alpha_j^2 J_1(\alpha_j R); \\
 M_{12} &= \mu\alpha_j^2(1 + c_j^2\gamma_j^2)J_1(\beta_j R); \\
 M_{13} &= \Theta_1(R, J_1); \\
 M_{14} &= \Theta_1(R, Y_1); \\
 M_{15} &= \Theta_3(R, J_1); \\
 M_{16} &= \Theta_3(R + h, J_1); \\
 M_{21} &= (\rho\alpha_j c_j - 2\mu\alpha_j^3)J_0(\alpha_j R) + 2\mu i\alpha_j^2 J_1(\alpha_j R)/R; \\
 M_{22} &= 2\mu i\alpha_j \gamma_j (iJ_1(\beta_j R)/R - \beta_j J_0(\beta_j R)); \\
 M_{23} &= \Theta_2(R, J_0, J_1); \\
 M_{24} &= \Theta_2(R, Y_0, Y_1); \\
 M_{25} &= \Theta_4(R, J_0, J_1); \\
 M_{26} &= \Theta_4(R, Y_0, Y_1); \\
 M_{33} &= \Theta_1(R + h, J_1); \\
 M_{34} &= \Theta_1(R + h, Y_1); \\
 M_{35} &= \Theta_3(R, J_1); \\
 M_{36} &= \Theta_3(R + h, J_1); \\
 M_{41} &= -\alpha_j J_0(\alpha_j R); \\
 M_{42} &= -\omega j \gamma_j J_0(\beta_j R); \\
 M_{43} &= -\xi_j J_0(\omega j \kappa_j R); \\
 M_{44} &= -\xi_j Y_0(\omega j \kappa_j R); \\
 M_{45} &= -i\alpha_j^2 c_j J_0(\alpha_j R); \\
 M_{46} &= -i\alpha_j^2 c_j Y_0(\alpha_j R); \\
 M_{51} &= iJ_1(\alpha_j R); \\
 M_{52} &= iJ_1(\beta_j R); \\
 M_{53} &= \nu_j J_1(\omega j \kappa_j R); \\
 M_{54} &= \nu_j Y_1(\omega j \kappa_j R); \\
 M_{55} &= \omega j J_1(\alpha_j R); \\
 M_{56} &= \omega j Y_1(\alpha_j R); \\
 M_{63} &= \Theta_2(R + b, J_0, J_1); \\
 M_{64} &= \Theta_2(R + b, Y_0, Y_1); \\
 M_{65} &= \Theta_4(R + h, J_0, J_1); \\
 M_{66} &= \Theta_4(R + h, Y_0, Y_1).
 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 \alpha_j &= \omega j / c_j; & \xi_j &= \alpha_j^2 c_j \kappa_j / (\mu + i\omega\mu_w); \\
 \nu_j &= \alpha_j c_j / (i\mu - \omega\mu_w); & \beta_j &= \alpha_j \gamma_j c_j;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_1(z, H) &= \alpha_j^2 (c_j^2 \kappa_j^2 - 1) H(\omega j \kappa_j z); \\
 \Theta_2(z, H_1, H_2) &= 2c_j \kappa_j \alpha_j^2 (iH_1(\omega j \kappa_j z)/z - \\
 &\quad - \alpha_j H_2(\omega j \kappa_j z));
 \end{aligned}$$

$$\Theta_3(z, H) = -2(\mu + i\omega\mu_w)\alpha_j^2 H(\alpha_j z);$$

$$\begin{aligned}
 \Theta_4(z, H_1, H_2) &= (2\alpha_j^3(\mu + i\omega\mu_w) - \alpha_j^2 c_j^2 \rho_w) \times \\
 &\quad \times H_1(\alpha_j z) - 2(i\mu - \omega\mu_w)\alpha_j^2 H_2(\alpha_j z)/z.
 \end{aligned}$$

Условие разрешимости однородной алгебраической системы (18) $\det(\mathbf{M})=0$ приводит к дисперсионному уравнению $\Xi(c_j, \omega j)=0$, из которого можно получить зависимость скорости c_j от частоты j -й гармоники. Полный вид уравнения не приведен ввиду чрезвычайной громоздкости. В частном случае при $\mu_w=0$ соотношение $\Xi(c_j, \omega j)=0$ переходит в биквадратное уравнение

$$\begin{aligned}
 (\Psi_j + 2\Lambda)(1 - \varsigma^2)c_j^4 + (\Psi_j(2\Lambda + 4\varsigma) + \\
 + \Psi_j(2\Lambda - 1) - 4)c_j^2 c_0^2 + 4(1 - \Psi_j)c_0^4 = 0,
 \end{aligned} \tag{19}$$

где

$$\Lambda = \rho_w h / (\rho R); \quad c_0 = (Eh / (2\rho R))^{0.5};$$

$$\Psi_j = 2J_1(z_j) / (z_j J_0(z_j));$$

$$z_j = (i^3 R^2 \omega j \rho / \eta)^{0.5}.$$

Решения уравнения (19) соответствуют модам Юнга (медленные волны, распространяющиеся в жидкости) и модам Лэмба (быстрые волны, распространяющиеся в стенке трубки), которые подробно исследовались ранее при ряде дополнительных упрощений [11, 12].

При выполнении условия $\det(\mathbf{M})=0$ неизвестные постоянные C_{2j}, \dots, C_{6j} можно выразить через одну величину, например, C_{1j} :

$$\begin{aligned}
 C_{2j} &= -\frac{\Delta_{12}}{\Delta_{11}} C_{1j}, & C_{3j} &= \frac{\Delta_{13}}{\Delta_{11}} C_{1j}, \\
 C_{4j} &= -\frac{\Delta_{14}}{\Delta_{11}} C_{1j}, & C_{5j} &= \frac{\Delta_{15}}{\Delta_{11}} C_{1j}, \\
 C_{6j} &= -\frac{\Delta_{16}}{\Delta_{11}},
 \end{aligned} \tag{20}$$

где Δ_{jk} – определитель минора, который получается из матрицы M путем удаления j -ой строчки и k -го столбца.

Подставив соотношения (20) в формулу (16) и использовав условие (7), выразим последнюю неизвестную величину C_{1j} через амплитуды давления на входе в трубку:

$$C_{1j} = \frac{R'P_j}{2i\rho c_j J_1(\alpha_j R')}.$$

Наличие дополнительного элемента с волновым сопротивлением Z_t определяет параметры волны, отраженной на конце трубки. Давление и скорости движения жидкости и стенки в произвольном сечении трубки будут при этом определяться суперпозицией волн, движущихся вдоль оси трубки в противоположных направлениях:

$$p(t, r, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{R'\alpha_j P_j J_0(\alpha_j r)}{2J_1(\alpha_j R')} e^{i\omega_j t} \times \left(e^{-i\omega_j x/c_j} + \Gamma_j e^{i\omega_j(x-2L)/c_j} \right), \quad (21)$$

где Γ_j – коэффициент отражения j -ой гармоники волны, равный отношению амплитуд j -ых гармоник падающей и отраженной волн. Он определяется путем подстановки соотношения (20) в последнее неиспользованное граничное условие (8). Соотношения, аналогичные формуле (21), можно записать и для остальных величин задачи (11)–(15). Объемный расход жидкости через сечение трубки определим путем интегрирования продольной компоненты скорости по сечению:

$$Q(t, x) = 2\pi \int_0^{R'(t,x)} r v_x(t, r, x) dr. \quad (22)$$

После подстановки выражения (16), интегрирования и последующего учета отраженной волны давления (21), которая вызывает ретроградный ток жидкости в трубке, формула (22) примет вид:

$$Q(t, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\pi R'^2 P_j J_0(\alpha_j R)}{2\rho c_j J_1(\alpha_j R)} \Omega_j e^{i\omega_j t} \times \left(e^{-i\omega_j x/c_j} - \Gamma_j e^{i\omega_j(x-2L)/c_j} \right), \quad (23)$$

где

$$\Omega_j = \frac{2\Delta_{11} J_1(\alpha_j R) - 2\Delta_{12} J_1(\beta_j R)}{\Delta_{11} \alpha_j R J_0(\alpha_j R)}.$$

Теперь можно вычислить волновую проводимость трубки $Y = Q/p$ при наличии отражения

волны на конце. Из соотношений (22)–(23) следует

$$Y = Y_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\pi R'^2 \Omega_j}{i\omega_j \rho} \frac{e^{i\omega_j L/c_j} - \Gamma_j e^{-i\omega_j L/c_j}}{e^{i\omega_j L/c_j} + \Gamma_j e^{-i\omega_j L/c_j}}, \quad (24)$$

где $Y_0 = \pi R^4 / (\pi R^4 \text{Re}(Z_t) + 8\eta L)$ – проводимость трубки для стационарного потока жидкости.

На основе расчетов давлений и объемного расхода по формулам (21), (23) могут быть построены и исследованы кривые давление–расход $p(Q)$, которые в последнее время все активнее внедряются в биофизическую и клиническую практику для детального анализа и интерпретации параметров волн, распространяющихся в артериальных руслах [13, 14].

2. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Проведя численные расчеты по полученным выражениям (16)–(21), исследуем распределения давлений и поля скоростей в трубке с заданными механическими и геометрическими параметрами. Практическая ценность полученного решения заключается в возможности исследовать закономерности распространения волны давления (7) по системе трубок, геометрия которой соответствует артериальным руслам различных внутренних органов или внеорганных систем артерий. При этом возможно сопоставление теоретических расчетов с данными экспериментов и клинических наблюдений. При экспериментальных исследованиях гидродинамики кровообращения проводятся измерения давления $p(t, X)$ в произвольном сечении X достаточно крупной артерии путем внедрения внутрь сосуда катетера с микроанометрическим датчиком. В клиниках доступными для исследователей являются также результаты ультразвуковых измерений радиальных смещений стенки сосуда $u_R(t, X)$ и линейной скорости кровотока $v_x(t, a, X)$ в произвольной точке $a \in [0; R - \delta]$ ядра течения $r \leq R - \delta$ (где δ – толщина пристенного слоя, заполненного практически чистой плазмой крови). Величина δ косвенно оценивается по результатам расчетов стационарного течения крови как неньютоновской жидкости [14]. В ряде случаев ультразвуковые исследования дают величину $Q(t, x)$, определяемую путем синхронных измерений $v_x(t, a, X)$ и диаметра артерии в том же сечении $d(t, X) = d^o(X) + 2u_R(t, X)$ (где $d^o(X)$ – среднее по времени значение диаметра сосуда в данном сечении). Определение величин $Q(t, x)$ и $d^o(X)$ заложено в программу прибора и основано на использовании модели [1]. Величи-

ну Y для русла можно получить как отношение амплитуд измеренных величин $Q(t, X)$, $p(t, X)$. Таким образом, непосредственную практическую ценность представляет расчет значений $p(t, X)$, $u_R(t, X)$, $v_x(t, a, X)$, $Q(t, X)$, Y . Обобщение результатов на систему трубок с заданной геометрией основано на суммировании волновых проводимостей трубок в соответствии со способом их соединения в системе. Методика суммирования предложена в [15] для регулярных симметричных дихотомически ветвящихся систем трубок, а затем обобщена на случай асимметричных русел [16] и артериальных систем с анастомозами [17, 18].

Ниже приведены результаты численных расчетов по формулам (21), (23), (24) с использованием следующих численных данных [3–6, 8, 9, 14]: $\rho = (1 \div 1.1) \cdot 10^3$ кг/м³, $\rho_w = (0.2 \div 1.2) \cdot 10$ кг/м³, $\eta = (3 \div 4.5) \cdot 10^{-3}$ Па·с, $E = (6 \div 10) \cdot 10^6$ Па, $\zeta = 0.4 \div 0.45$, $\mu_w = (0.5 \div 9.7) \cdot 10^5 \omega^{-1}$ Па·с, $R = (1.5 \div 2.5) \cdot 10^{-3}$ м, $h = 0.1 \div 0.2$ м, $L = 0.02 \div 0.16$ м. На рис. 1 представлены иллюстрации зависимости давление–расход $P(Q)$ для симметричного дихотомически ветвящегося артериального дерева. В соответствии с общепринятыми теоретическими подходами к моделированию артериальных систем считалось, что для каждой трубки $L_m = aR_m^b$ [19], где m – порядковый номер трубки; a и b – постоянные для данной системы величины. В каждом ветвлении в соответствии с [19, 20] выбирались постоянная асимметрия χ и параметр λ , определяющий соотношение между диаметрами материнского и дочерних сосудов. На основании подобного подхода, задавая набор постоянных величин $\{a, b, \chi, \lambda, R_1\}$, можно создавать модели артериальных систем, которые по своим гидравлическим и волновым свойствам соответствуют реальным артериальным руслам различных органов. В то же время, для описания геометрии реального артериального русла, содержащего N сегментов, потребовалось бы не менее $2N$ параметров (длины и диаметры соответствующих сегментов).

Компьютерное моделирование при варьировании параметров $\{a, b, \chi, \lambda, R_1\}$ в широком диапазоне физиологических значений показало, что общий вид зависимостей $P(Q)$ сохраняется для русел с разной геометрией, но существенно меняется при изменении условий отражения волн давления на конечных элементах модели, соответствующих системе микроциркуляции. Так, уменьшение сопротивления $\text{Re}(Z_t)$ дополнительного элемента приводит к снижению наклона петли $P(Q)$ за счет быстрого оттока крови из системы через дополнительные элементы с малым сопротивле-

нием. Этот процесс сопровождается резким падением давления, что приводит также к уменьшению площади области, ограниченной петлей $P(Q)$ (рис. 1, а–в). Увеличение же податливости проводящих элементов приводит к медленному снижению давления и дополнительным потерям энергии на растяжение стенок податливых трубок. Это выражается в возрастании площади, ограниченной петлями $P(Q)$. Со снижением сопротивления дополнительного элемента наклон петель также уменьшается. Аналогичные результаты получены в работе [7] для упрощенной модели артериального русла. Можно показать, что кривые $P(Q)$ в рассмотренном случае (7) представляют собой эллипсы [7]. Из сопоставления рис. 1, а–е видно, что отношение длин осей эллипсов B/A , угол наклона φ большей оси к оси OX и площадь S , ограниченная петлей $P(Q)$, представляют набор параметров, позволяющих однозначно определить соотношение $\text{Re}(Z_t)/\text{Im}(Z_t)$ для данной кривой. Таким образом, набор $\{B/A, \varphi, S\}$, соответствующий экспериментально полученной зависимости $P(Q)$, может быть рекомендован для использования в медицинской диагностике для биомеханической интерпретации клинических данных.

Альтернативный метод диагностического анализа кривых $P(t)$, $Q(t)$ или $P(t)$, $V(t)$ (здесь V – линейная скорость кровотока на оси сосуда) предложен в [13, 14] и исследован в [7]. При этом используется важная диагностическая информация, содержащаяся в значениях дифференциалов интенсивностей

$$dI_{\pm} = \pm \frac{1}{4\rho c} (dP \pm \rho c dU)^2 \quad (25)$$

падающей и отраженных волн, которые распространяются в жидкости и зависят от характеристик артериальной системы в целом. Эти параметры определяют коэффициент отражения Γ_1 на конце самой крупной (питающей) артерии русла [13, 14]. Вычислив по формулам (21)–(24) давление и скорость движения жидкости в первой (самой крупной) трубке модели ветвящегося русла и подставив их в выражения (25), получим зависимости $dI_{\pm}(t, X)$ в произвольном сечении трубки X . Результаты расчетов для модели с $a=5$, $b=1$, $\chi=1$, $\lambda=3$, $R_1=0.003$ м представлены на рис. 2 при $X=L_1/2$. Римские цифры II, IV обозначают участки $dI_{\pm} > 0$, соответствующие падающим волнам. Здесь II – волна разрежения ($dP < 0$), а IV – волна сжатия ($dP > 0$). Цифры I, III обозначают участки $dI_{\pm} < 0$, соответствующие отраженным волнам сжатия (I) и разрежения (III). Как и в предыдущем случае, здесь существенное влияние

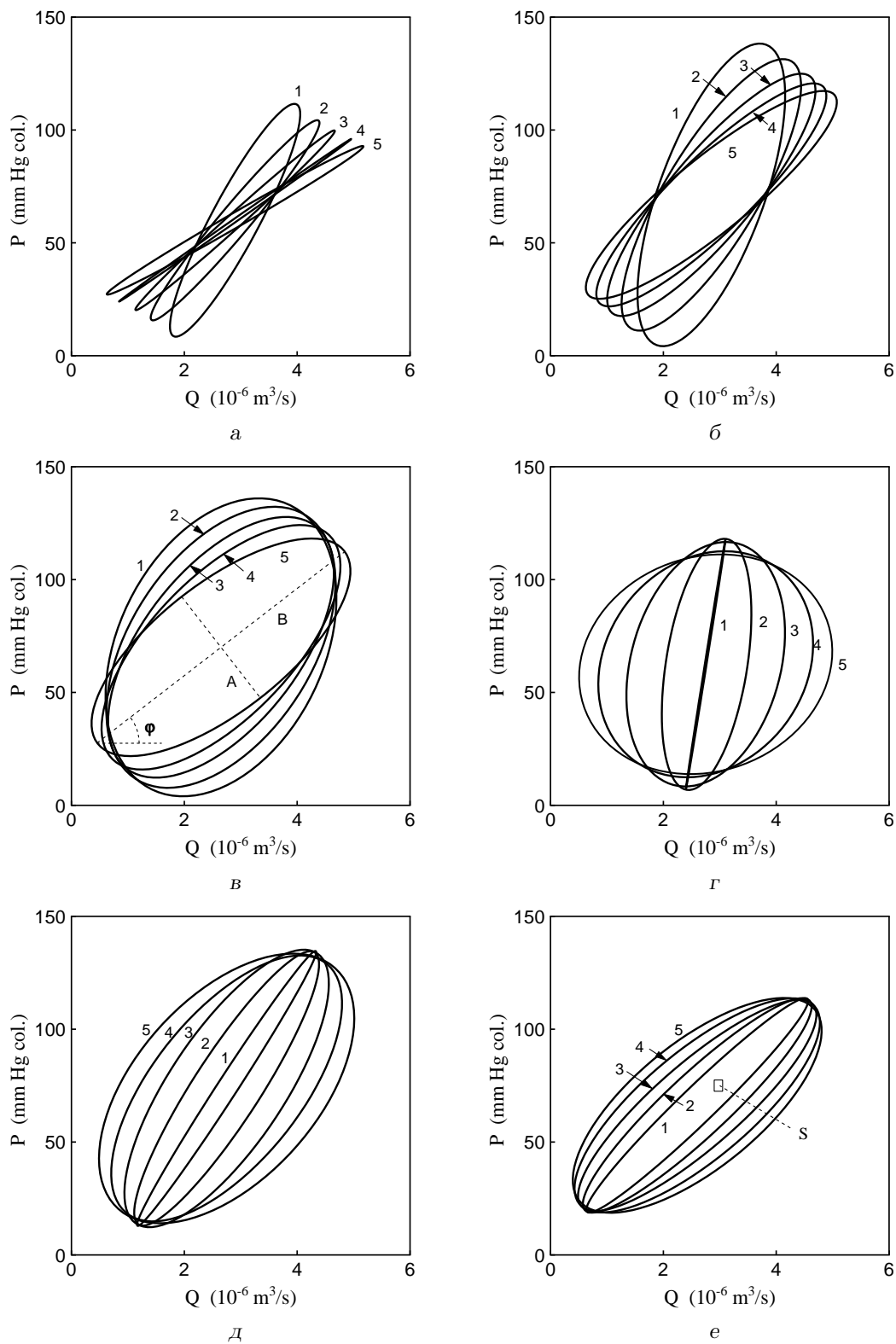


Рис. 1. Зависимости $P(Q)$ для модели артериальной системы:
 а - $\text{Im}(Z_t)=100$, б - $\text{Im}(Z_t)=2$, в - $\text{Im}(Z_t)=1$, 1-5 - $\text{Re}(Z_t)=5, 2.5, 1.7, 1.2, 1$;
 г - $\text{Re}(Z_t)=100$, д - $\text{Re}(Z_t)=2$, е - $\text{Re}(Z_t)=1$, 1-5 - $\text{Im}(Z_t)=5, 2.5, 1.7, 1.2, 1$

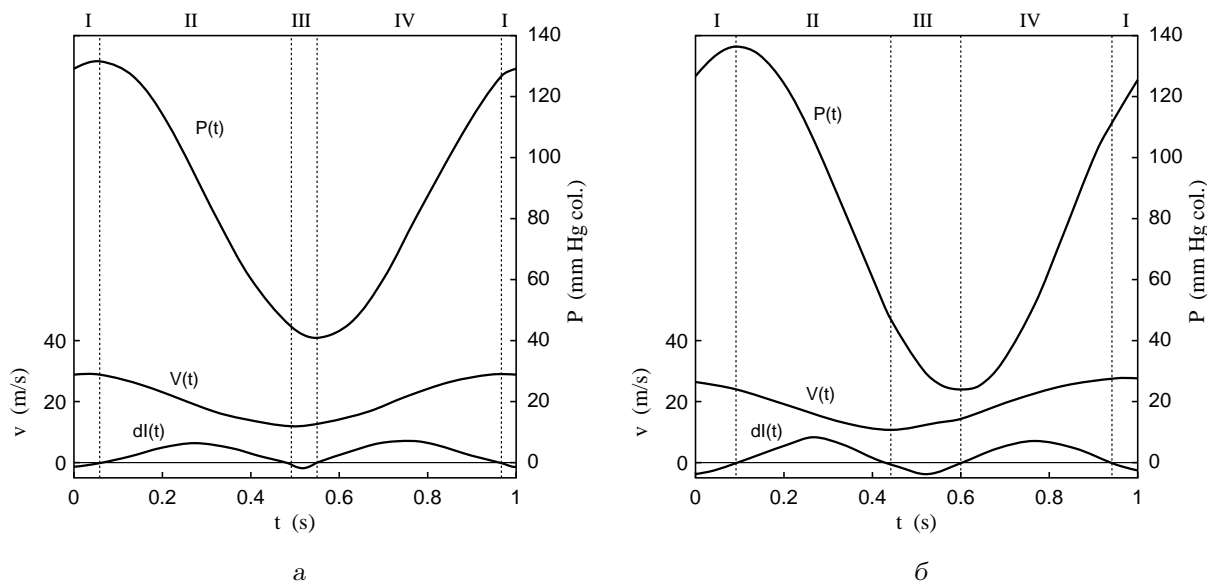


Рис. 2. Зависимости $P(t)$ (кривые 1), $V(t)$ (кривые 2) и $dI(t)$ (кривые 3) при $\text{Im}(Z_t) = 2$:
 а – $\text{Re}(Z_t) = 2$, б – $\text{Re}(Z_t) = 20$

на вид зависимостей $dI_{\pm}(t, X)$ оказывают условия отражения волн в системе. Так, при увеличении сопротивления $\text{Re}(Z_t)$ в 10 раз интенсивность отраженных волн увеличивается по амплитуде и имеет большую протяженность во времени (ср. рис. 2, а, б).

Исследование амплитуд и относительных длительностей интервалов I–IV при вариации параметров модели артериального русла $\{a, b, \chi, \lambda, R_1\}$ и условий отражения волн $\text{Re}(Z_t)$, $\text{Im}(Z_t)$ показало, что однозначное определение этих величин и даже их отношения $\text{Re}(Z_t)/\text{Im}(Z_t)$ по параметрам $dI_{\pm}(t, X)$ не представляется возможным. Детальный анализ отдельных участков I–IV кривых $dI_{\pm}(t, X)$ при условии непрерывной регистрации кривых $P(t)$, $V(t)$ в одном и том же поперечном сечении выбранной артерии позволяет исследовать особенности отражения волн, характерные для того или иного артериального русла. Например, чередование фаз сокращения–расслабления сердечной мышцы приводит к пережатию коронарных артерий и появлению уникальной для конкретного сердца картины $dI_{\pm}(t, X)$ [13, 14]. Тем не менее, выделение нормальных и патологических состояний коронарного кровообращения по результатам исследования только лишь зависимостей $dI_{\pm}(t, X)$ затруднительно. Об этом же свидетельствуют и результаты проведенного компьютерного моделирования.

Еще одна диагностическая методика связана с анализом спектра волновой проводимости артери-

ального русла [21]. Зависимости амплитуды безразмерной проводимости $Y^{\circ} = Y_1/Y^*$ (Y^* – характерное значение проводимости питающей артерии) от номера гармоники, при различных условиях отражения волн, рассчитанные по формулам (24), представлены на рис. 3. Изменение податливости конечных проводящих элементов приводит к однозначному сдвигу максимума кривых $Y^{\circ}(n)$ в сторону длинноволновых гармоник. При этом изменение резистивности элементов $\text{Re}(Z_t)$ вызывает значительные изменения амплитуды Y° в области первой и второй гармоник при незначительном изменении амплитуд других гармоник. Аналогичные сведения получены для модели артериального русла в виде трубки с одним терминальным элементом [21]. Результаты данного исследования показали, что учет вязкости сосудистой стенки дает более гладкие зависимости $P(t)$, $Q(t)$, $Y^{\circ}(n)$, чем для чисто упругой стенки. Таким образом, положение максимума $n = n^*$ на кривой $Y^{\circ}(n)$ однозначно характеризует податливость микроциркуляторного русла, а относительная величина пика $Y^{\circ}(n^*)/Y^{\circ}(0)$ – резистивность микроциркуляторного русла ($Y^{\circ}(0)$ – проводимость русла для стационарного тока жидкости). Компьютерное моделирование русел при различных наборах параметров $\{a, b, \chi, \lambda, R_1\}$ показало, что вид получаемых зависимостей $Y^{\circ}(n)$ практически не отличается от кривых, приведенных на рис. 3, за исключением случаев явных нарушений реологических свойств крови и стенок сосудов [16, 18].

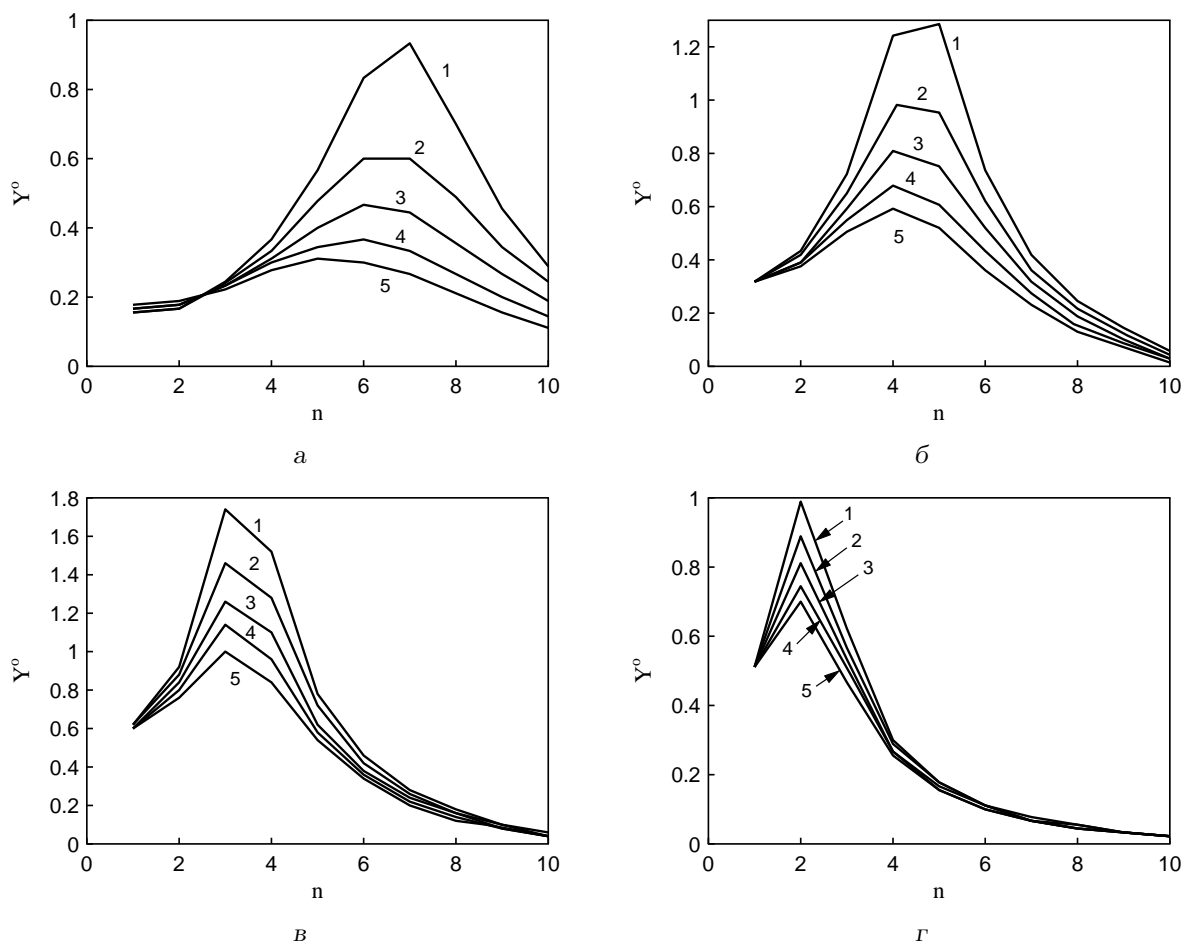


Рис. 3. Зависимости $Y^\circ(n)$ ($\text{Re}(Z_t)=2$):
 а - $\text{Im}(Z_t)=2$; б - $\text{Im}(Z_t)=1$; в - $\text{Im}(Z_t)=0.5$; г - $\text{Im}(Z_t)=0.2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящее время функции $P(t)$, $Q(t)$, $P(Q)$, $dI_{\pm}(t)$, $Y^\circ(n)$ являются основными диагностическими параметрами, получаемыми путем синхронной регистрации давления и расхода (или линейной скорости кровотока) в достаточно крупных внеорганных артериях человека. Результаты проведенного исследования показали, что геометрические параметры модели артериального русла оказывают незначительное количественное влияние на вид этих зависимостей. В то же время, механические характеристики русла (плотность и вязкость крови, упругие модули, вязкость и плотность материала сосудистой стенки) в ряде случаев оказывают значительное воздействие на указанные диагностические параметры.

Наибольшее влияние на вид соответствующих кривых во всех проанализированных случаях проявляют условия отражения волн на конечных

(терминальных) элементах модели, которые соответствуют малым артериям органа. Резистивность и податливость последних определяют состояние микроциркуляции в органе. Изменение резистивных и емкостных характеристик микроциркуляторного русла вызывает однозначные изменения угла наклона φ и площади S , ограниченной кривыми $P(Q)$, а также отношения B/A длин наибольшей и наименьшей осей ограничиваемой $P(Q)$ петли.

Изменение резистивности и податливости малых сосудов вызывает характерный сдвиг максимума кривой, а также изменение относительной амплитуды пика на зависимости входной проводимости русла Y° , определяемой как отношение амплитуд расхода и давления, измеренных в начальном сечении питающей артерии органа, от частоты волны (или номера гармоники в Фурье-разложении). Это позволяет использовать пере-

численные характеристические параметры в медицинской диагностике для определения состояния микроциркуляции в исследуемом артериальном русле.

1. *Womersley J. R.* An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries.– Tech. Rept.– N TR-56-614, 1957.– 45 p.
2. *Johnson M., Tarbell J. M.* A biphasic, anisotropic model of the aortic wall // *Trans. ASME.*– 2001.– **123**.– P. 52–57.
3. *Rodriguez-Macias K. A., Naessen T., Bergqvist D.* Validation of in vivo noninvasive high-frequency ultrasonography of the arterial wall layers // *Ultrasound Med. Biol.*– 2001.– **27**, N 6.– P. 751–756.
4. *VanBavel E., Siersma P., Spaan J. A.* Elasticity of passive blood vessels: a new concept // *Amer. J. Physiol.*– 2003.– **285**, N 5.– P. H1986–H2000.
5. *Vito R. P., Dixon S. A.* Blood vessel constitutive models – 1995–2002 // *Ann. Rev. Biomed. Engng.*– 2003.– **5**.– P. 413–439.
6. *Shankar V., Kumaran V.* Asymptotic analysis of wall modes in a flexible tube revisited // *Eur. Phys. J. B.*– 2001.– **19**.– P. 607–622.
7. *Кизилова Н. Н.* Исследование зависимостей давление–расход и параметров падающей и отраженной волн давления в артериальных руслах // *Акуст. вісн.*– 2004.– **7**, N 1.– С. 50–61.
8. *Peterson S. J., Okamoto R. J.* Effect of residual stress and heterogeneity on circumferential stress in the arterial wall // *Trans. ASME.*– 2000.– **122**, N 8.– P. 454–456.
9. *Qilian Yu, Zhou J., Fung Y. C.* Neutral axis location in bending and Young's modulus of different layers of arterial wall // *Amer. J. Physiol.*– 1993.– **265**.– P. H52–H60.
10. *Ляв А.* Математическая теория упругости.– М.: ОНТИ НКТП, 1935.– 676 с.
11. *Гидромеханика кровообращения / Сб. статей.*– М.: Мир, 1971.– 254 с.
12. *Milnor W. R.* Hemodynamics.– Baltimore: Williams and Wilkins, 1989.– 419 p.
13. *Khair A. W., O'Brien A., Gibbs J. S. R., Parker K. H.* Determination of wave speed and wave separation in the arteries // *J. Biomech.*– 2001.– **34**.– P. 1145–1155.
14. *Khair A. W., Parker K. H.* Measurements of wave speed and reflected waves in elastic tubes and bifurcations // *J. Biomech.*– 2002.– **35**.– P. 775–783.
15. *Taylor M. G.* The input impedance of an assembly of randomly branching elastic tubes // *Biophys. J.*– 1966.– **6**.– P. 29–51.
16. *Bondarenko M. Ye., Kizilova N. N.* Pulse wave reflections in asymmetrically branching arterial networks // *Rus. J. Biomech.*– 2002.– N 4.– P. 52–62.
17. *Кизилова Н. Н.* Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел с анастомозами // *Мат. моделир.*– 2003.– **15**, N 6.– С. 65–71.
18. *Kizilova N. N.* Pulse wave reflections in branching arterial networks and pulse diagnosis methods // *J. Chin. Inst. of Engrs.*– 2003.– **26**, N 6.– P. 869–880.
19. *Dawson C. A., Krenz G. S., Karau K. L.* Structure-function relationships in the pulmonary arterial tree // *J. Appl. Physiol.*– 1999.– **86**.– P. 569–583.
20. *Kizilova N. N.* Computational approach to optimal transport network construction in biomechanics // *Lect. Notes Comp. Sci.*– 2004.– **3044**.– P. 476–485.
21. *Кизилова Н. Н.* Отражение пульсовых волн и резонансные свойства артериальных русел // *Изв. РАН. Сер. МЖГ.*– 2003.– N 5.– С. 127–137.