УДК 539.1

Применение моментной схемы метода конечных элементов для решения задач инкрементальной теории упругости с начальными напряжениями

Б. М. Дохняк[а], В. В. Киричевский[б], М. И. Ищенко[а]

[а] Восточно-украинский национальный университет им. В. Даля, Луганск, Украина

[б] Запорожский государственный университет, Запорожье, Украина

Рассмотрено применение метода конечных элементов к решению задач теории упругости с начальными напряжениями. На основе инкрементальной теории деформируемого твердого тела получены соотношения метода конечных элементов для вычисления коэффициентов матрицы жесткости предварительно напряженного пространственного элемента серендипова семейства с квадратичной аппроксимацией перемещений. Выполнен расчет напряженно-деформированного состояния внецентренно сжатой балки и круглой плиты в условиях продольно-поперечного изгиба. Приведено сравнение численных результатов с аналитическими решениями. Исследовано изменение деформаций сжатия и сдвига цилиндрического амортизатора в зависимости от степени деформирования и последовательности приложения нагрузок.

Ключевые слова: метод конечных элементов, матрица жесткости, инкрементальная теория.

Существует большой класс конструкций, в которых предварительное напряжение существенно изменяет их деформативные свойства. К таким конструкциям относятся резинометаллические шарниры, резинокордные изделия (баллоны пневматических амортизаторов, резинопневматические муфты, шины и др). Широко применяемые в технике резиновые элементы, работающие на сжатие и растяжение, изготовляют обычно в виде цилиндров или параллелепипедов с привулканизованными к торцам металлическими пластинками, которые служат для крепления амортизатора. Характер и последовательность приложения нагрузок влияют на деформативные свойства материала и конструкций.

Большинство решенных задач механики деформируемой сплошной среды аналитическими и численными методами базируются на традиционной теории упругости. Учет предварительного напряжения при решении практических задач предполагает применение инкрементальной теории и связан со значительными математическими трудностями. Поэтому существует ограниченный класс задач теории упругости, для которых получены аналитические решения [1–3].

Для широкого класса конструкций учет влияния начальных напряжений позволяет выявить дополнительные резервы их прочности и жесткости.

Среди работ, посвященных применению метода конечных элементов к решению практических задач, отметим [4–10]. В то же время следует заметить, что при многочисленной теоретической базе недостаточно полно освещены решения практических задач.

Цель работы – на базе трехмерной инкрементальной теории деформируемого твердого тела реализовать численное решение практических задач с начальными напряжениями на основе метода конечных элементов.

Краевая задача для конструкции с предварительным напряжением определяется заданием дополнительных массовых сил $\bar{q}^i$, дополнительных внешних сил $\bar{p}^i$ на S_σ и перемещений u_i на поверхности S_u, где перемещения отсчитываются от исходного состояния.

Формулировка инкрементальной теории начинается с представления пути деформирования в виде последовательности равновесных состояний $T^{(0)}, T^{(1)}, ..., T^{(N)}, T^{(N+1)}, ..., T^{(f)}$, где $T^{(0)}$ и $T^{(f)}$ – начальное и конечное состояния деформирования соответственно; $T^{(N)}$ – произвольное промежуточное состояние.

В линейной инкрементальной теории достаточно рассмотреть два равновесных состояния $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$. Пусть положения произвольной материальной точки тела в состояниях $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ обозначим через $P^{(0)}$ и $P^{(1)}$ соответственно, $\bar{r}^{(0)}$ и $\bar{r}^{(1)}$ – радиусы-векторы этих точек. Декартовы координаты точек $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ равны z_i, Z_i $(i=1, 2, 3)$.

Итак, имеем

$$\bar{r}^{(0)} = z_i \bar{i}_i,$$

$$\bar{r}^{(1)} = Z_i \bar{i}_i = \bar{r}^{(0)} + \bar{u} = (z_i + u_i)\bar{i}_i,$$

где $\bar{i}_i$ $(i=1, 2, 3)$ – базисные векторы прямоугольной декартовой системы координат; $\bar{u}$ $(i=1, 2, 3)$ – вектор перемещений и его компоненты в состоянии $T^{(1)}$.

Обозначим тензоры деформаций Грина в состояниях $T^{(0)}$ и $T^{(1)}$ через ε_{ij}^0 и ε_{ij} соответственно. Они определяются как

$$2(\varepsilon_{ij}^0 + \varepsilon_{ij}) = \bar{r}_{,i}^{(1)}\bar{r}_{,j}^{(1)} - \bar{r}_{,i}^{(0)}\bar{r}_{,j}^{(0)} = (u_i^0 + u_i)_{,j} + (u_j^0 + u_j)_{,i} +$$

$$+ (u_k^0 + u_k)_{,i}(u_k^0 + u_k)_{,j},$$

где $u_{j,i} = \partial u_j / \partial z_i$.

Линеаризуя ε_{ij} по u_k, получаем

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}[(\delta_{kj} + u_{k,j}^0)u_{k,i} + (\delta_{ki} + u_{k,i}^0)u_{k,j}]. \tag{1}$$

Для описания напряженного состояния вводится тензор напряжений Эйлера, действующие в точках $P^{(0)}$ и $P^{(1)}$ напряжения обозначим через величины σ_0^{ij} и σ^{ij} соответственно, где σ_0^{ij} – напряжения, действующие на шести гранях

$$z_i = \text{const}, \qquad z_i + dz_i = \text{const} \qquad (i=1, 2, 3) \tag{2}$$

бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда, содержащего точку $P^{(0)}$ в состоянии $T^{(0)}$, и отнесенные к единичной площади в состоянии $T^{(0)}$. Аналогично σ_{ij} – напряжения, действующие на шести гранях $Z_i =$ $= \mathrm{const}$, $Z_i + dZ_i = \mathrm{const}$ $(i = 1, 2, 3)$, бесконечно малого прямоугольного параллелепипеда, содержащего точку $P^{(1)}$ в состоянии $T^{(1)}$, и отнесенные к единичной площади в состоянии $T^{(1)}$.

Введем модифицированный тензор напряжений Кирхгоффа в точке $P^{(1)}$ через величины $\sigma_0^{ij} + \sigma^{ij}$. Модифицированный тензор напряжений Кирхгоффа определяется следующим образом. Бесконечно малый параллелепипед, ограниченный шестью поверхностями (2), зафиксирован в состоянии $T^{(0)}$. Действующий на этот прямоугольный параллелепипед тензор напряжений Эйлера обозначим через σ_0^{ij}. В состоянии $T^{(1)}$ прямоугольный параллелепипед деформируется в бесконечно малый параллелепипед, но уже не прямоугольный.

Инкрементальная теория формулируется с помощью модифицированного подхода Лагранжа, в котором используются модифицированные тензоры напряжений Эйлера и модифицированные тензоры деформаций Грина. Отметим, что напряжения и внешние силы на S_u отнесены к единичной площади, а массовые силы – к единичному объему состояния $T^{(0)}$. Тогда принцип виртуальной работы в состоянии $T^{(1)}$ запишем в виде [2]

$$\iiint\limits_V [(\sigma_0^{ij} + \sigma^{ij})\delta\varepsilon_{ij} - (\bar{q}_i^0 + \bar{q}_i)\delta u_i]dV - \iint\limits_{S_\sigma} (\bar{p}_i^0 + \bar{p}_i)\delta u_i dS = 0, \tag{3}$$

где $u_i = \bar{u}_i$ на S_u; ε_{ij} описываются уравнением (2), вариации определяются по отношению к u_i.

Массовые и поверхностные силы на S_σ определяются по отношению к единичному объему и единичной площади в состоянии $T^{(1)}$, т.е. $dV =$ $= dZ_1 dZ_2 dZ_3$ и dS представляют собой соответственно элементарные объем и площадь поверхности в состоянии $T^{(1)}$. Пренебрегая членами высшего порядка малости по приращениям перемещений, после преобразований получаем

$$\iiint\limits_V \left[\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sigma_0^{ij}\delta\left(\frac{\partial u_k}{\partial Z_i}\frac{\partial u_k}{\partial Z_j}\right) - \bar{q}_i\delta u_i + \sigma_0^{ij}\delta\varepsilon_{ij} - \bar{q}_i^0\delta u_i\right]dV -$$

$$-\iint\limits_{S_\sigma} (\bar{p}_i^0 + \bar{p}_i)\delta u_i dS = 0. \tag{4}$$

Если $T^{(1)}$ – равновесное состояние, то в уравнении (4) члены вариации упругой энергии с учетом начального напряжения будут

$$\iiint_V [\sigma_0^{ij} \delta \varepsilon_{ij} - \bar{q}_i^0 \delta u_i] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{p}_i^0 \delta u_i dS = 0, \tag{5}$$

и уравнение равновесия принимает вид

$$\iiint_V \left[\sigma^{ij} \delta \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2} \sigma_0^{ij} \delta \left(\frac{\partial u_k}{\partial Z_i} \frac{\partial u_k}{\partial Z_j} \right) - \bar{q}_i \delta u_i \right] dV - \iint_{S_\sigma} \bar{p}_i \delta u_i dS = 0. \tag{6}$$

Для исследования напряженно-деформированного состояния пространственных конструкций из эластомеров рассмотрим изопараметрический конечный элемент (КЭ) серендипова семейства в виде шестигранного параллелепипеда с длиной ребер, равной двум. Начало базисной системы координат Z_i и произвольной местной системы x^i, оси которой совпадают с направлением его ребер, помещаем в центре куба.

Рассмотрим вывод матриц жесткости предварительно напряженного конечного элемента. Под предварительными напряжениями понимаем те напряжения, которые возникли в конструкции в исходном состоянии, т.е. перед началом интересующей нас деформации, до приложения рабочей нагрузки. В задаче с предварительными напряжениями выберем исходное состояние в качестве отсчетного. Перемещение по объему КЭ серендипова семейства аппроксимируем в виде квадратичного полинома:

$$u_k = \sum_{pqr}^{lmn} \omega_k^{(pqr)} \psi^{(pqr)} \qquad \left(\sum_{pqr}^{lmn} = \sum_{p=0}^{l} \sum_{q=0}^{m} \sum_{r=0}^{n} \right), \tag{7}$$

где ω_k – коэффициенты разложения; $\psi^{(pqr)}$ – набор степенных функций вида

$$\psi^{(pqr)} = \frac{(x^1)^p}{p!} \frac{(x^2)^q}{p!} \frac{(x^3)^r}{r!}$$
$$(p = 0, 1, \ldots, l;\; q = 0, 1, \ldots, m;\; r = 0, 1, \ldots, n); \tag{8}$$

$$u_k = \omega_k^{(000)} + \omega_k^{(100)} x^1 + \frac{1}{2} \omega_k^{(200)} (x^1)^2 + \omega_k^{(010)} x^2 + \omega_k^{(110)} x^1 x^2 +$$
$$+ \frac{1}{2} \omega_k^{(210)} (x^1)^2 x^2 + \frac{1}{2} \omega_k^{(020)} (x^2)^2 + \frac{1}{2} \omega_k^{(120)} x^1 (x^2)^2 + \omega_k^{(001)} x^3 + \omega_k^{(101)} x^1 x^3 +$$
$$+ \frac{1}{2} \omega_k^{(201)} (x^1)^2 x^3 + \omega_k^{(011)} x^2 x^3 + \omega_k^{(111)} x^1 x^2 x^3 + \frac{1}{2} \omega_k^{(211)} (x^1)^2 x^2 x^3 +$$
$$+ \frac{1}{2} \omega_k^{(021)} (x^2)^2 x^3 + \frac{1}{2} \omega_k^{(121)} x^1 (x^2)^2 x^3 + \frac{1}{2} \omega_k^{(002)} (x^3)^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\omega_k^{(102)}x^1(x^3)^2+\frac{1}{2}\omega_k^{(012)}x^2(x^3)^2+\frac{1}{2}\omega_k^{(112)}x^1x^2(x^3)^2. \tag{9}$$

Для координатных функций $\psi^{(pqr)}$ справедливо соотношение дифференцирования:

$$\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)}\psi^{(pqr)}=\psi^{(p-\alpha)(q-\beta)(r-\gamma)}, \tag{10}$$

где α, β, γ – порядок производных.

Для построения уравнений метода конечных элементов (МКЭ) используется уравнение (6). Пусть $W=\sum\limits_{k=1}^{n}W_{(k)}^{э}$ – потенциал упругой энергии деформации.

В соответствии с (6) вариацию δW энергии упругой деформации конечного элемента принимаем в виде

$$\delta W=\iiint\limits_V\left[\sigma^{ij}\delta\varepsilon_{ij}+\sigma_0^{ij}\frac{1}{2}\delta(u_{k,i}u_{k,j})\right]dV, \tag{11}$$

работа внутренних и внешних сил на упругих деформациях будет равна

$$\delta A=\iiint\limits_V\overline{q}_i\delta u_i dV-\iint\limits_S\overline{p}_i\delta u_i dS.$$

Компоненты тензора упругих напряжений принимаем в виде закона Гука:

$$\sigma^{ij}=2\mu g^{ik}g^{il}\varepsilon_{kl}+\lambda\Theta g^{ij}, \tag{12}$$

где μ, λ – коэффициенты Ламе; g^{ij} – компоненты метрического тензора; Θ – функция изменения объема.

Представим компоненты тензора деформаций ε_{ij} в виде ряда Маклорена с разложением в окрестности начала координат:

$$\varepsilon_{ij}=\sum_{s=0}^{L_{ij}}\sum_{t=0}^{M_{ij}}\sum_{g=0}^{N_{ij}}e_{ij}^{(stg)}\psi^{(stg)}. \tag{13}$$

Выражение (13) в матричной форме таково:

$$\{\varepsilon_{ij}\}=\{e_{ij}\}^T\{\psi_{(ij)}\}. \tag{14}$$

Компоненты разложения e_{ij} тензора деформации ε_{ij} в ряд Маклорена представим через коэффициенты $\omega_k^{(pqr)}$ посредством преобразования:

$$\{e_{ij}\}=[F_{ij}^k]\{\omega_k\}. \tag{15}$$

Для учета слабой сжимаемости эластомеров функцию изменения объема запишем также в виде ряда:

$$\Theta = \sum_{\alpha=0}^{l-1}\sum_{\beta=0}^{m-1}\sum_{\gamma=0}^{n-1} \xi^{(\alpha\beta\gamma)} \psi^{(\alpha\beta\gamma)}, \tag{16}$$

где коэффициенты разложения $\xi_{ij}^{(\alpha\beta\gamma)}$ определяются соотношением

$$\xi^{(\alpha\beta\gamma)} = \left. \frac{\partial^{(\alpha+\beta+\gamma)} u_{i,j} g^{ij}}{(\partial x^1)^\alpha (\partial x^2)^\beta (\partial x^3)^\gamma} \right|_{x^1=x^2=x^3=0}. \tag{17}$$

В матричной форме соотношения (16) и (17) имеют вид

$$\Theta = \{\xi\}^T \{\psi_{(\Theta)}\}; \tag{18}$$

$$\{\xi\} = [F_\Theta^k]\{\omega_k\}. \tag{19}$$

Подставляя (12) и (14) в вариацию энергии упругой деформации (11), получаем

$$\delta W^э = \iiint_V \{\delta\varepsilon_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\}^T 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{(kl)}\}\{\varepsilon_{kl}\} dV +$$

$$+ \iiint_V \{\delta\xi\}^T \{\psi_{(\Theta)}\}^T \lambda g^{ij} \{\psi_{(\Theta)}\}\{\xi\} dV + \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_0^{ij} \delta(u_{k,i} u_{k,j}) dV;$$

$$\delta W^э = \iiint_V \{\delta\varepsilon_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\} 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{(kl)}\}\{\varepsilon_{kl}\} dV +$$

$$+ \iiint_V \{\delta\xi\}^T \{\psi_{(\Theta)}\} \lambda g^{ij} \{\psi_{(\Theta)}\}\{\xi\} dV + \frac{1}{2}\iiint_V \sigma_0^{ij} [\delta u_{k,i} u_{k,i} + u_{k,i} \delta u_{k,j}] dV;$$

$$\delta W^э = \iiint_V \{\delta\varepsilon_{ij}\}^T \{\psi_{(ij)}\}^T 2\mu g^{ik} g^{jl} \{\psi_{(kl)}\}\{\varepsilon_{kl}\} dV +$$

$$+ \iiint_V \{\delta\xi\}^T \{\psi_{(\Theta)}\}^T \lambda g^{ij} \{\psi_{(\Theta)}\}\{\xi\} dV + \iiint_V \sigma_0^{ij} u_{k,i} \delta u_{k,j} dV =$$

$$= \{\delta\varepsilon_{ij}\}^T [E^{ijkl}]\{\varepsilon_{kl}\} + \{\delta\xi\}^T [E^{(\Theta)}]\{\xi\} + \{\delta\omega_k\}^T \{\psi_{k,i}\}^T \{\sigma_0^{ij}\}\{\psi_{k,j}\}\{\omega_k\} =$$

$$= \{\delta e_{ij}\}^T [E^{ijkl}]\{e_{kl}\} + \{\delta\xi\}^T [E^{(\Theta)}]\{\xi\} +$$

$$+\{\delta u_k\}[A]^T\{\psi_{(k,i)}\}^T\{\sigma_0^{ij}\}\{\psi_{(k,j)}\}[A]\{u_k\},$$

где

$$[E^{ijkl}]=\int\int_{-1}^{1}\int 2\mu g^{ik}g^{jl}\{\psi_{(ij)}\}^T\{\psi_{(kl)}\}\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3;$$
$$[E^{(\Theta)}]=\int\int_{-1}^{1}\int \lambda g^{ij}\{\psi_{(\Theta)}\}^T\{\psi_{(\Theta)}\}\sqrt{g}\,dx^1dx^2dx^3. \qquad (20)$$

С учетом (14) и (18) выражение $\delta W^э$ имеет следующий вид:

$$\delta W^э=\delta\{\omega_s\}^T[F_{ij}^s]^T[E^{ijkl}][F_{kl}^t]\{\omega_t\}+\delta\{\omega_s\}^T[F_{(\Theta)}^s]^T[E^{(\Theta)}][F_{(\Theta)}^t]\{\omega_t\}+$$

$$+\{\delta u_s\}[A]^T\{\psi_{(s,i)}\}^T[\sigma_0^{ij}]\{\psi_{(t,j)}\}[A]\{u_t\}. \qquad (21)$$

Для построения матрицы жесткости необходимо перейти в выражении (21) от коэффициентов ω_s к значениям перемещений в узлах конечного элемента, что можно осуществить с помощью матрицы преобразования $[A]$ функции формы N_L. Эта матрица задает связь между аппроксимирующими функциями Лагранжа и степенными ψ:

$$\{\omega_k\}=[A]\{u_k\}, \qquad (22)$$

где $[A]$ – матрица перехода от степенных функций к функциям формы.

С учетом (22) выражение (21) примет вид

$$\delta W^э=\delta\{u_s\}^T[A]^T[F_{ij}^s]^T[E^{ijkl}][F_{kl}^t][A]\{u_t\}+$$

$$+\delta\{u_s\}^T[A]^T[F_{(\Theta)}^s]^T[E^{(\Theta)}][F_{(\Theta)}^t][A]\{u_t\}+$$

$$+\{\delta u_s\}^T[A]^T\{\psi_{s,i}\}^T[\sigma_0^{ij}]\{\psi_{t,j}\}[A]\{u_t\}=$$

$$=\delta\{\delta u_s\}^T[K^{st}]\{u_t\}+\delta\{\delta u_s\}^T[K_0^{st}]\{u_t\}, \qquad (23)$$

где

$$[K^{st}]_{3\times3}=[[A]^T[F_{ij}^s]^T[E^{ijkl}][F_{kl}^t][A]+[A]^T[F_{(\Theta)}^s]^T[E^{(\Theta)}][F_{(\Theta)}^t][A]]_{60\times60} \quad (24)$$

– геометрическая матрица жесткости.

Инкрементальная матрица жесткости вычисляется по формуле

$$[K_0^{st}]_{3\times3}=[[A]^T\{\psi_{s,i}\}^T[\sigma_0^{ij}]\{\psi_{t,j}\}[A]]_{60\times60} \qquad (s=20,\ t=20). \qquad (25)$$

Матрица жесткости преднапряженного элемента равна

$$[\Phi^{st}] = [K^{st}] + [K_0^{st}].$$

Таким образом, система линейных алгебраических уравнений имеет вид

$$[\Phi^{st}]\{u_t\} = \{P^s\}.$$

Из выражений (24) и (25) следует, что для построения матриц жесткости $[K^{st}]$ и $[K_0^{st}]$ необходимо определить две специальные матрицы: $[F_{ij}^s]$ и $[A]$.

Коэффициенты разложения $e_{ij}^{(pqr)}$ (15) определим согласно МСКЭ по формулам [4].

Анализ каждой из компонент $e_{ij}^{(pqr)}$ показал, что некоторые коэффициенты $\omega_k^{(pqr)}$ не входят в разложение для аппроксимации перемещений (9). Те коэффициенты деформаций $e_{ij}^{(pqr)}$, которые содержат хотя бы один из членов, отсутствующий в (9), должны быть опущены в разложении (13). Для ε_{11} получаем следующее разложение:

$$\varepsilon_{11} \approx e_{11}^{(000)} + e_{11}^{(100)} x^1 + e_{11}^{(010)} x^2 + e_{11}^{(110)} x^1 x^2 + \frac{1}{2} e_{11}^{(020)} (x^2)^2 + e_{11}^{(001)} x^3 +$$

$$+ e_{11}^{(101)} x^1 x^3 + e_{11}^{(011)} x^2 x^3 + e_{11}^{(111)} x^1 x^2 x^3 + \frac{1}{2} e_{11}^{(021)} (x^2)^2 x^3 +$$

$$+ \frac{1}{2} e_{11}^{(002)} (x^3)^2 + \frac{1}{2} e_{11}^{(012)} x^2 (x^3)^2. \qquad (26)$$

На основании выражения (26) записывается матрица $[F_{11}^k]$. Разложение тензора ε_{12} имеет вид

$$\varepsilon_{12} \approx e_{12}^{(000)} + e_{12}^{(100)} x^1 + e_{12}^{(010)} x^2 + e_{12}^{(110)} x^1 x^2 + e_{12}^{(001)} x^3 +$$

$$+ e_{12}^{(101)} x^1 x^3 + e_{12}^{(011)} x^2 x^3 + e_{12}^{(111)} x^1 x^2 x^3 + \frac{1}{2} e_{12}^{(002)} (x^3)^2. \qquad (27)$$

Проводя аналогичные выкладки для остальных компонент тензора деформации, получаем выражения их разложения в ряд Маклорена и матрицы $[F_{22}^k]$, $[F_{33}^k]$, $[F_{12}^k]$, $[F_{13}^k]$, $[F_{23}^k]$ соответственно для тензоров ε_{22}, ε_{33}, ε_{12}, ε_{13}, ε_{23}.

Рассмотрим процесс построения матрицы преобразования $[A]$. Аппроксимацию компонент перемещений $\widetilde{u}_i$ по объему КЭ можно представить через функцию формы $N_{(pqr)}$ и узловые перемещения $u_i^{(pqr)}$:

$$\widetilde{u}_i = \sum_{pqr}^{lmn} u_i^{(pqr)} N_{(pqr)}. \qquad (28)$$

В матричной форме выражения (6) и (28) имеют такой вид:

$$\widetilde{u}_i = \{u_i\}^T \{N\}; \qquad (29)$$

$$u_k = \{\omega_k\}^T \{\psi\}. \qquad (30)$$

Как видно из (29) и (30), с помощью линейного преобразования можно перейти от системы функций формы $\{N\}$ к системе координатных функций $\{\psi\}$, используя соотношение

$$\{N\} = [A]^T \{\psi\}. \qquad (31)$$

Матрица $[A]$ определяется из соотношений (29) и (30).

Предложенная методика расчета конструкций с начальными напряжениями МКЭ реализована в вычислительном комплексе «МІРЕЛА+» [11].

Рассмотрим решение некоторых задач.

Задача 1. Продольный изгиб балки. Балка расположена на двух опорах и сжимается (растягивается) силами P, приложенными с эксцентриситетом $e = 0{,}2$ (рис. 1). Размеры балки следующие: ширина $b = 0{,}02$ м; высота $h = 0{,}2$ м; длина $l = 1$ м; модуль упругости $E = 0{,}2$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}3$.

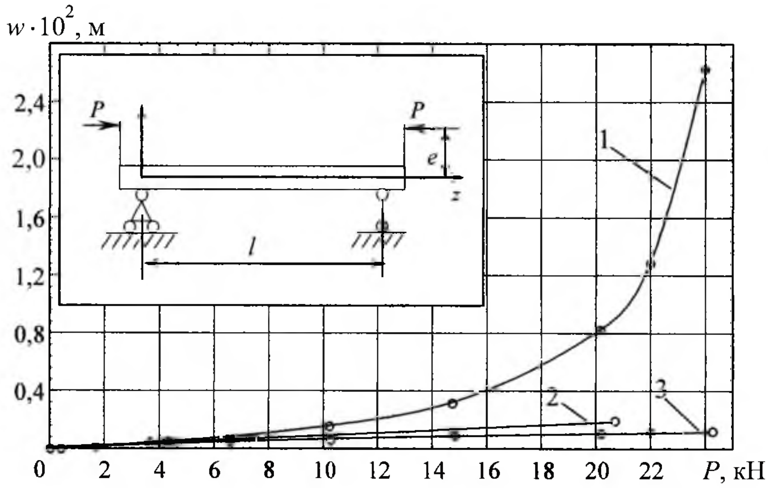

Рис. 1. Зависимость прогиба w от продольной нагрузки P: *1* – сжатие с преднапряжением; *2* – сжатие без учета преднапряжения; *3* – растяжение. (Линии – аналитическое решение; точки – конечноэлементное решение.)

Аналитическое значение для прогиба при сжатии вычисляется по формуле [7]

$$w = e\left[1 - \cos(kl) - \sin(kl)\frac{1 - \cos(kz)}{\sin(kz)}\right],$$

где

$$k = \sqrt{\frac{P}{EI}}; \qquad z = 0{,}5; \qquad I = \frac{bh^3}{12}; \qquad k\frac{l}{2} = \pi; \qquad \frac{2\pi}{l} = \sqrt{\frac{P}{EI}}; \qquad P = \frac{4\pi^2 EI}{l^2};$$

для прогиба при растяжении – по формуле [7]

$$w = e\left[\mathrm{ch}(kl) - 1 - \mathrm{sh}(kl)\frac{\mathrm{ch}(kz) - 1}{\mathrm{sh}(kz)}\right].$$

Характер продольного изгиба при растяжении и сжатии совершенно разный. На рис. 1 приведена зависимость прогиба w от продольной нагрузки P. Решения получены при условии сходимости численных результатов для сетки разбиения на КЭ $2\times11\times21$.

Анализ результатов решений показал, что с увеличением нагрузки сжатия P для балки с преднапряжением прогиб обращается в бесконечность при нагрузке $P = \dfrac{4\pi^2 EI}{l^2}$. При сжатии без учета в матрице жесткости преднапряжения зависимость прогиба от нагрузки является линейной и не отражает реальную картину деформирования. Прогиб увеличивается, но не превышает величину эксцентриситета e. При внецентренном растяжении предварительное напряжение не оказывает существенного влияния на свойства конструкции, и зависимость прогиба от нагрузки носит линейный характер.

Задача 2. Изгиб круглой плиты в условиях радиального сжатия. Исследовали плиту радиусом $R = 0{,}3$ м и толщиной $h = 0{,}01$ м. Нагрузка радиального сжатия p, поперечная нагрузка $q = 1$ МПа (рис. 2). Упругие постоянные материала таковы: модуль упругости $E = 1$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}25$.

При сжатии прогиб w аналитически определяется из уравнения [2]

$$\frac{6}{7}\xi^3 + \left[\frac{16}{3(1-\nu^2)} - 4p^*\right]\xi = q^*,$$

где

$$q^* = \frac{q}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^4; \qquad p^* = \frac{p}{E}\left(\frac{R}{h}\right)^2; \qquad \xi = \frac{w}{h}.$$

На рис. 2 приведена зависимость относительного прогиба ξ от нагрузки p. Видно, что с повышением нагрузки p при сжатии плиты с преднапряжением прогиб увеличивается (кривые *1*, *2*), при растяжении – уменьшается (кривая *3*).

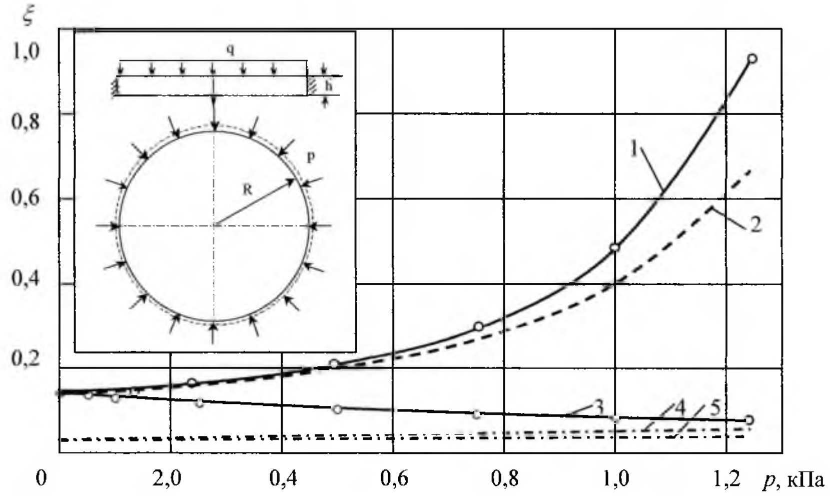

Рис. 2. Зависимость относительного прогиба ξ от продольной нагрузки p: *1* – сжатие, решение МСКЭ; *2* – сжатие (аналитическое решение); *3* – растяжение; *4* – сжатие, решение МСКЭ; *5* – растяжение, решение МКЭ.

Анализ результатов расчета прогиба при сжатии и растяжении показал, что в первом случае удовлетворительное совпадение между численным и аналитическим решением отмечается при деформации до 40%. При радиальном растяжении наблюдается удовлетворительное совпадение численного и аналитического решения.

Применение при расчете изгибаемых элементов МСКЭ позволяет получить достоверные результаты (на рис. 2 кривые *1*–*3*) по сравнению с обычным МКЭ (кривые *4*, *5*).

Задача 3. Цилиндрический амортизатор сжатия–сдвига. Рассчитываем напряженно-деформированное состояние цилиндрического амортизатора (рис. 3) радиусом $R = 0{,}025$ м, высотой $h = 0{,}01$ м под действием сжимающей P и сдвигающей Q нагрузок. Упругие характеристики материала таковы: модуль сдвига $\mu = 0{,}7$ МПа; коэффициент Пуассона $\nu = 0{,}49$.

Исследуем, как ведет себя амортизатор при сдвиговой и сжимающей нагрузках при различных степенях сдвига и сжатия с учетом и без учета преднапряжения. Численные результаты получены на основе исследования сходимости и приведены для сетки разбиения на КЭ $9 \times 15 \times 21$. На рис. 3 представлены зависимости сдвигового перемещения u от сдвиговой нагрузки Q при различных степенях поджатия осевой нагрузкой P с учетом и без учета преднапряжения. Как видно, при разных степенях поджатия с учетом преднапряжения с увеличением сдвигового перемещения u сдвиговая нагрузка Q повышается, без учета преднапряжения она остается постоянной.

Проанализируем характер сжимающей нагрузки P в зависимости от сдвига u. Рис. 4 иллюстрирует зависимость перемещения сжатия w от нагрузки P при различных степенях сдвига u с учетом преднапряжения сдвига и без него. Видно, что в первом случае с увеличением перемещения сжатия w нагрузка P повышается, во втором случае она также увеличивается, но остается одинаковой при различных степенях сдвига.

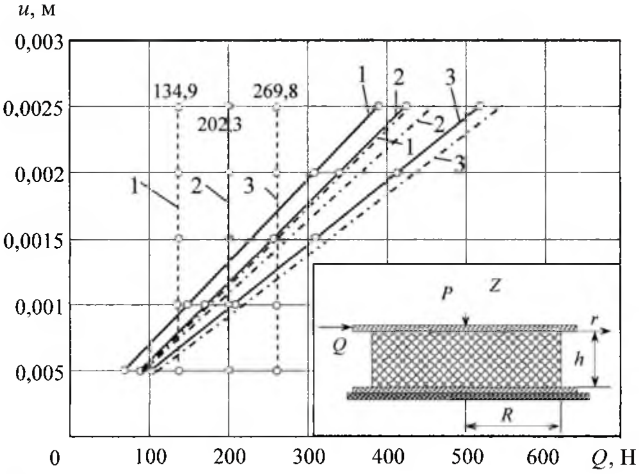

Рис. 3. Зависимость сдвигового перемещения u от нагрузки Q при различных степенях поджатия: *1* – $w/h = 0{,}001$; *2* – $w/h = 0{,}0015$; *3* – $w/h = 0{,}002$. (Сплошные линии – с преднапряжением, МСКЭ; штриховые – без учета преднапряжения, МСКЭ и МКЭ; штрихпунктирные – с преднапряжением, МКЭ.)

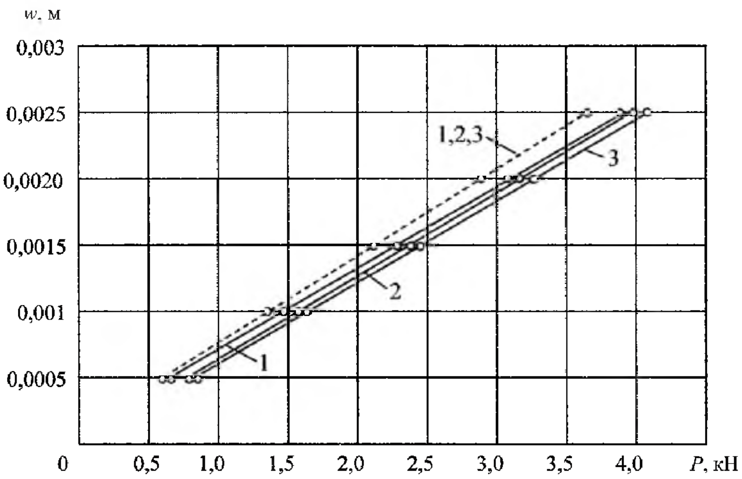

Рис. 4. Зависимость осадки амортизатора w от нагрузки P при различных степенях сдвига: *1* – $u/h = 0{,}001$; *2* – $u/h = 0{,}0015$; *3* – $u/h = 0{,}002$. (Сплошные линии – с преднапряжением, МСКЭ и МКЭ; штриховая – без учета преднапряжения, МСКЭ и МКЭ.)

При расчете конструкций, которые испытывают сдвиговые напряжения, необходимо использовать МСКЭ (рис. 2, 3). Если в результате деформирования определяющими являются нормальные напряжения, то решения МСКЭ и МКЭ совпадают (рис. 1, 4).

Резюме

Розглянуто застосування методу скінченних елементів до розв'язання задач теорії пружності з початковими напруженнями. На основі інкрементальної теорії деформівного твердого тіла отримано співвідношення методу скінченних елементів для обчислення коефіцієнтів матриці жорсткості попередньо напруженого елемента серендипова сімейства з квадратичною апроксимацією переміщень. Виконано розрахунок напружено-деформованого стану позацентрово стиснутої балки та круглої плити в умовах поздовжньо-поперечного згину. Наведено порівняння числових результатів з аналітичними розв'язками. Досліджено зміну деформацій стиску і зсуву циліндричного амортизатора в залежності від ступеня деформування і послідовності прикладання навантажень.

1. *Вольмир А. С.* Гибкие пластинки и оболочки. – М.: Гос. изд-во науч. техн.-теорет. лит., 1956. – 420 с.
2. *Работнов Ю. Н.* Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с.
3. *Бойцов Г. В., Палий О. М., Постнов В. А. и др.* Справочник по строительной механике корабля. Т. 2. Пластины. Теория упругости, пластичности и ползучести. Численные методы. – Л.: Судостроение, 1982. – 464 с.
4. *Сахаров А. С., Кислоокий В. Н., Киричевский В. В. и др.* Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А. С. Сахарова, И. Альтенбаха. – Киев: Вища шк., 1982. – 480 с.
5. *Дохняк Б. М.* Метод скінченних елементів для задач з початковими напруженнями // Вісн. Східно-україн. нац. ун-ту ім. В. Даля. – 2004. – № 5 (75). – С. 47 – 51.
6. *Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г.* Расчет предварительно напряженных конструкций из эластомеров. Проблемы шин и резинокордных композитов // Тр. XIII симп. – М., 2002. – Т. 1. – С. 119 – 122.
7. *Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г., Киричевский Р. В.* Расчет конструкций с предварительными напряжениями. Прикладные задачи математики и механики // Материалы XII науч. конф. ученых Украины, России, Беларуси (15–21 сент. 2003 г.) – Севастополь: Изд-во СевНТУ, 2003. – 252 с.
8. *Васидзу К.* Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.
9. *Хофмейстер Л., Гринбаум Г., Ивенсен Д.* Упругопластический расчет больших деформаций методом конечных элементов // Ракет. техника и космонавтика. – 1971. – **9**, № 7. – 42 с.
10. *Пономарев С. Д., Бидерман В. Л., Лихарев К. К. и др.* Расчеты на прочность в машиностроении. Т. 2. Некоторые задачи прикладной теории упругости. Расчеты на ползучесть. – М.: Гос. науч.-техн. изд-во машиностроительной лит., 1958. – 1118 с.
11. *Киричевский В. В., Дохняк Б. М., Козуб Ю. Г. и др.* Метод конечных элементов в вычислительном комплексе "МІРЕЛА+". – Киев: Наук. думка, 2005. – 403 с.

Поступила 23. 05. 2005