

## **Применение смешанной аппроксимации к решению двумерных задач теории малых упругопластических деформаций методом конечных элементов**

**А. Ю. Чирков, А. А. Ворончук**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Для решения двумерных краевых задач теории малых упругопластических деформаций используется треугольный конечный элемент, обеспечивающий устойчивость и сходимость смешанной аппроксимации. Приведена система разрешающих матричных уравнений смешанного метода, для решения которой применяется трехслойный итерационный алгоритм с переобуславливающей матрицей. Сопоставлены численные результаты решения модельных задач, полученные классическим и смешанным методами конечных элементов.*

**Ключевые слова:** теория пластичности, метод конечных элементов, смешанная схема, трехслойный итерационный алгоритм.

**Введение.** В настоящее время наиболее универсальным методом решения краевых задач механики деформируемого тела является метод конечных элементов (МКЭ). Успешное применение МКЭ к решению задач механики сплошных сред обусловлено тем, что в нем сочетаются преимущества обобщенных постановок с сеточными схемами. Использование обобщенных постановок краевых задач позволяет снизить требования к гладкости искомого решения. В свою очередь, применение сеточных методов облегчает известные трудности, связанные с построением базисных функций в проекционных методах. В результате эффективность МКЭ слабо зависит от конфигурации тела, характера граничных условий, закона изменения свойств среды и внешнего воздействия на тело.

К настоящему времени наиболее исследованными и широко применяемыми являются классические схемы МКЭ в перемещениях, что отражено во многих публикациях отечественных и зарубежных авторов. Отмечая достоинства классического МКЭ, следует учитывать и его недостатки. К наиболее существенным из них относятся разрывная аппроксимация напряжений и деформаций, а также более низкий порядок сходимости аппроксимации для напряжений и деформаций по сравнению с таковым для перемещений. В то же время напряжения обычно есть основные искомые функции в задачах механики деформируемого тела и, следовательно, должны определяться с достаточно высокой степенью точности.

В связи с этим перспективным в численном анализе задач механики деформируемого тела представляется применение смешанных формулировок МКЭ, в которых напряжения или деформации входят в разрешающие уравнения наряду с перемещениями как равноправные неизвестные. Основное преимущество использования смешанных формулировок МКЭ по сравнению с классическим в форме метода перемещений состоит в уменьшении погрешности аппроксимации для напряжений и деформаций, а также в возможности точного удовлетворения статических граничных условий на

поверхности тела. Еще одно преимущество заключается в том, что смешанные схемы МКЭ позволяют обеспечить непрерывность аппроксимации не только для перемещений, но и для напряжений и деформаций.

**Построение аппроксимирующих функций.** Будем рассматривать только треугольные элементы, совокупность которых описывает допустимую триангуляцию  $T_h = T_h(\Omega)$  области  $\Omega \subset R^2$ . Перемещения  $v_h$  в пределах треугольника  $T \in T_h(\Omega)$  зададим в виде линейных функций от координат  $x = (x_1, x_2)$ :

$$v_h(x) = \sum_{j=1}^3 \bar{v}_j \lambda_j(x), \quad \forall x \in T. \quad (1)$$

Здесь  $\bar{v}_j = v_h(x_j)$  – узловые значения перемещений в вершинах;  $\lambda_j(x)$  – линейные интерполяционные функции треугольника  $T \in T_h(\Omega)$ , обладающие свойствами

$$0 \leq \lambda_j(x) \leq 1; \quad \sum_{j=1}^3 \lambda_j(x) = 1; \quad \lambda_j(x_i) = \delta_{ji}; \quad \forall x \in T, \quad (2)$$

где  $\delta_{ji}$  – символ Кронекера [1].

Обозначим через  $x_T = (x_{1T}, x_{2T})$  – координаты центра тяжести треугольника  $T \in T_h(\Omega)$  и определим “внутреннюю”, равную нулю на всех сторонах треугольника  $T$ , функцию  $\lambda_T(x)$  такую, что  $\lambda_T(x_T) = 1$ . Такое определение функции  $\lambda_T(x)$  не является однозначным. Тем не менее напряжения и деформации в пределах треугольника  $T \in T_h(\Omega)$  формально запишем в виде

$$\eta_h(x) = \sum_{j=1}^3 \bar{\eta}_j \lambda_j(x) + (\bar{\eta}_T - \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 \bar{\eta}_j) \lambda_T(x), \quad \forall x \in T, \quad (3)$$

где  $\bar{\eta}_j = \eta_h(x_j)$  и  $\bar{\eta}_T = \eta_h(x_T)$  – узловые значения в вершинах и центре тяжести треугольника  $T \in T_h(\Omega)$ . Отметим, что функция  $\lambda_T(x)$  может быть построена с помощью линейной комбинации кусочно-полиномиальных восполнений и так называемой “функции-колокола”, т.е. функции вида  $\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x)$ .

Для определенности будем рассматривать только два типа функций  $\lambda_T(x)$ . При построении первого типа используем кусочно-линейную интерполяцию в пределах треугольника  $T \in T_h(\Omega)$ . С этой целью разделим треугольник  $T$  на три треугольника с общей вершиной в центре тяжести  $x_T$ . Тогда в пределах каждого из этих треугольников определим  $\lambda_T(x)$  как линейную функцию, равную нулю на внешней стороне треугольника  $T$  и единице в точке  $x_T$ . Для построения второго типа функций  $\lambda_T(x)$  используем нормированную функцию-колокол, т.е.  $\lambda_T(x) = 27\lambda_1(x)\lambda_2(x)\lambda_3(x)$ . Таким образом, оба типа функций  $\lambda_T(x)$  определяются однозначно.

Отметим, что аппроксимация (1)–(3) обеспечивает непрерывность перемещений, напряжений и деформаций на всем множестве  $\Omega$ , поскольку непрерывность линейных интерполяционных функций  $\lambda_j(x)$  на любой стороне, общей для произвольных треугольников, обеспечивается однозначным определением этих функций в узлах, расположенных на этой стороне, а функция  $\lambda_T(x)$  по определению равна нулю на всех сторонах треугольника  $T \in T_h(\Omega)$ . Кроме того, аппроксимация (3) удовлетворяет условию постоянства напряжений и деформаций на всем множестве  $\Omega$  и гарантирует получение устойчивого решения дискретной задачи для двух типов функций  $\lambda_T(x)$ .

**Матричные уравнения смешанного метода.** На основании приведенной аппроксимации для перемещений, деформаций и напряжений систему разрешающих уравнений смешанного метода можно представить в виде [2]

$$\begin{cases} [M_h]\{\varepsilon_h\} = [H_h]\{u_h\}; \\ \{\sigma_h\} = [D_h(\{\varepsilon_h\})](\{\varepsilon_h\} - \{\xi_h\}); \\ [H_h]^T \{\sigma_h\} = \{\rho_h\}. \end{cases} \quad (4)$$

Первое уравнение определяет вектор значений деформаций  $\{\varepsilon_h\}$  в узлах сетки по известным узловым перемещениям  $\{u_h\}$ , второе – связано с уравнением состояния материала для построения вектора напряжений  $\{\sigma_h\}$  и третье – обеспечивает выполнение условий статического равновесия. Векторы  $\{\rho_h\}$  и  $\{\xi_h\}$  соответствуют приведенным к узлам сетки заданным нагрузкам и начальным деформациям.

При вычислении коэффициентов разрешающих матриц  $[M_h]$  и  $[H_h]$  использовались квадратурные формулы, точки интегрирования которых совпадают с узлами интерполяции треугольника  $T \in T_h(\Omega)$ . Весовые множители квадратуры  $\omega_\alpha$  и  $\omega_T$ , соответствующие трем вершинам и центру тяжести треугольника  $T \in T_h(\Omega)$ , задавались таким образом, чтобы коэффициенты матрицы  $[H_h]$  вычислялись точно и модифицировалась только матрица  $[M_h]$ . В результате система уравнений (4) существенно упрощается, поскольку матрица  $[M_h]$  становится диагональной и, значит, не требуется ее явного обращения для нахождения вектора деформаций  $\{\varepsilon_h\}$  из первого уравнения системы (4). Тогда первое уравнение системы (4) распадается на независимые уравнения относительно узловых значений деформаций, соответствующих узлам триангуляции и центрам тяжести треугольников, и, следовательно, систему разрешающих уравнений можно представить в следующем виде:

$$\begin{cases} \{\widehat{\varepsilon}_h\} = [\widehat{M}_h]^{-1}[\widehat{H}_h]\{u_h\}; \\ \{\overline{\varepsilon}_h\} = [\overline{M}_h]^{-1}[\overline{H}_h]\{u_h\}; \\ \{\widehat{\sigma}_h\} = [\widehat{D}_h(\{\widehat{\varepsilon}_h\})](\{\widehat{\varepsilon}_h\} - \{\widehat{\xi}_h\}); \\ \{\overline{\sigma}_h\} = [\overline{D}_h(\{\overline{\varepsilon}_h\})](\{\overline{\varepsilon}_h\} - \{\overline{\xi}_h\}); \\ \omega_\alpha [\widehat{H}_h]^T \{\widehat{\sigma}_h\} + \omega_T [\overline{H}_h]^T \{\overline{\sigma}_h\} = \{\rho_h\}. \end{cases} \quad (5)$$

Система уравнений (5) определяет матричную формулировку смешанного метода для решения краевых задач пластичности в перемещениях, деформациях и напряжениях. Отметим, что уравнения подобного типа детально рассматривались в работе [3], и соответствующие схемы получили название “узловых”. Однако недостатком этих схем является чувствительность к погрешностям входных данных и ошибкам вычислений, поскольку используемые в них аппроксимирующие функции не обеспечивают получение устойчивого решения дискретной задачи. Система уравнений (5) лишена этого недостатка и гарантирует устойчивость численного решения. Кроме того, если напряжения и деформации в контурных узлах сетки корректировать таким образом, чтобы удовлетворялись статические граничные условия на поверхности тела, то получим систему разрешающих уравнений смешанного метода, в которой учитываются граничные условия для напряжений.

Приведем квадратурные схемы и весовые множители квадратуры  $\omega_\alpha$  и  $\omega_T$ , соответствующие трем вершинам  $x_j$ ,  $1 \leq j \leq 3$ , и центру тяжести  $x_T$  треугольника  $T \in T_h(\Omega)$ . В результате применения кусочно-линейного восполнения и функции-колокола для плоских задач получаем следующую формулу:

$$\int_T \eta(x) dx \approx \Delta_T [\omega_\alpha \sum_{j=1}^3 \eta(x_j) + \omega_T \eta(x_T)], \quad (6)$$

где  $\omega_\alpha = 2/9$ ,  $\omega_T = 1/3$  – для кусочно-линейного восполнения;  $\omega_\alpha = 11/60$ ,  $\omega_T = 27/60$  – при использовании функции-колокола.

Для осесимметричных задач квадратурная формула имеет вид

$$\int_T \eta(x) x_1 dx \approx \Delta_T \{ \omega_\alpha \sum_{j=1}^3 (r_j + \omega_S r_T) \eta(x_j) + \omega_T r_T \eta(x_T) \}, \quad (7)$$

где  $\omega_\alpha = 1/12$ ,  $\omega_T = 1/9$  – для кусочно-линейного восполнения;  $\omega_\alpha = 5/60$ ,  $\omega_T = 9/60$  – для функции-колокола;  $\omega_S = 1 - 4\omega_T$ ;  $r_T = r_1 + r_2 + r_3$ ; через  $r_j$  обозначена координата  $x_1$  узла  $x_j$ .

Приведем выражения, с помощью которых определяются матрицы  $[\bar{M}_h]$ ,  $[\bar{H}_h]$  и  $[\hat{M}_h]$ ,  $[\hat{H}_h]$ , матричные блоки которых соответствуют центрам тяжести треугольников и узлам триангуляции. Пусть  $\alpha, \beta, \gamma$  – глобальная нумерация вершин треугольников  $T \in T_h(\Omega)$ , образованная против часовой стрелки, причем

$$\begin{cases} b_\alpha = x_{2\beta} - x_{2\gamma}; & c_\alpha = x_{1\gamma} - x_{1\beta}; \\ b_\beta = x_{2\gamma} - x_{2\alpha}; & c_\beta = x_{1\alpha} - x_{1\gamma}; \\ b_\gamma = x_{2\alpha} - x_{2\beta}; & c_\gamma = x_{1\beta} - x_{1\alpha}. \end{cases} \quad (8)$$

Кроме того,  $T_\alpha$  – объединение треугольников  $T \in T_h(\Omega)$ , содержащих узел  $x_\alpha$ ;  $T_{\alpha\beta}$  – пересечение множеств  $T_\alpha$  и  $T_\beta$ , т.е.  $T_{\alpha\beta} = T_\alpha \cap T_\beta$ .

Для двумерных задач теории упругости имеем

$$\left\{ \begin{aligned} [\bar{M}_h]_T &= \Delta_T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & [\bar{H}_h]_T &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} b_\alpha & 0 & b_\beta & 0 & b_\gamma & 0 \\ 0 & c_\alpha & 0 & c_\beta & 0 & c_\gamma \\ c_\alpha & b_\alpha & c_\beta & b_\beta & c_\gamma & b_\gamma \end{bmatrix}; \\ [\hat{M}_h]_{\alpha} &= \sum_{T \subset T_\alpha} \Delta_T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; & [\hat{H}_h]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{T \subset T_{\alpha\beta}} \begin{bmatrix} b_\beta & 0 \\ 0 & c_\beta \\ c_\beta & b_\beta \end{bmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

При рассмотрении осесимметричных задач получаем

$$\left\{ \begin{aligned} [\bar{M}_h]_T &= \Delta_T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r_T}{3} \end{bmatrix}; & [\bar{H}_h]_T &= \frac{r_T}{6} \begin{bmatrix} b_\alpha & 0 & b_\beta & 0 & b_\gamma & 0 \\ 0 & c_\alpha & 0 & c_\beta & 0 & c_\gamma \\ c_\alpha & b_\alpha & c_\beta & b_\beta & c_\gamma & b_\gamma \\ \frac{2\Delta_T}{r_T} & 0 & \frac{2\Delta_T}{r_T} & 0 & \frac{2\Delta_T}{r_T} & 0 \end{bmatrix}; \\ [\hat{M}_h]_{\alpha} &= \sum_{T \subset T_\alpha} \Delta_T (r_\alpha + \omega_S r_T) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \\ [\hat{H}_h]_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} \sum_{T \subset T_\alpha} \begin{bmatrix} (r_\alpha + \omega_S r_T) b_\beta & 0 \\ 0 & (r_\alpha + \omega_S r_T) c_\beta \\ (r_\alpha + \omega_S r_T) c_\beta & (r_\alpha + \omega_S r_T) b_\beta \\ 2(\delta_{\alpha\beta} + \omega_S) \Delta_T & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Пусть  $[D]$  – матрица связи между векторами напряжений и деформаций. Тогда матрицы  $[\bar{D}_h]$  и  $[\hat{D}_h]$  имеют блочно-диагональную структуру, диагональные блоки которых  $[\bar{D}_h]_T$  и  $[\hat{D}_h]_\alpha$  соответствуют центрам тяжести треугольников  $x_T$  и узлам триангуляции  $x_\alpha$ , причем

$$[D(\bar{\varepsilon})] = \frac{G(\bar{\varepsilon})}{\frac{k_0}{4} + G(\bar{\varepsilon})} \begin{bmatrix} k_0 + G(\bar{\varepsilon}) & \frac{k_0}{2} - G(\bar{\varepsilon}) & 0 \\ \frac{k_0}{2} - G(\bar{\varepsilon}) & k_0 + G(\bar{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{k_0}{4} + G(\bar{\varepsilon}) \end{bmatrix} \quad (11)$$

– при плоском напряженном состоянии;

$$[D(\bar{\varepsilon})] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} k_0 + 4G(\bar{\varepsilon}) & k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) & 0 \\ k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) & k_0 + 4G(\bar{\varepsilon}) & 0 \\ 0 & 0 & 3G(\bar{\varepsilon}) \end{bmatrix} \quad (12)$$

– при плоской деформации;

$$[D(\bar{\varepsilon})] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} k_0 + 4G(\bar{\varepsilon}) & k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) & 0 & k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) \\ k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) & k_0 + 4G(\bar{\varepsilon}) & 0 & k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) \\ 0 & 0 & 3G(\bar{\varepsilon}) & 0 \\ k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) & k_0 - 2G(\bar{\varepsilon}) & 0 & k_0 + 4G(\bar{\varepsilon}) \end{bmatrix} \quad (13)$$

– при решении осесимметричной задачи.

В формулах (11)–(13) используются такие обозначения:  $k_0$  – модуль объемной деформации;  $G(\bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})/3\bar{\varepsilon}$  – секущий модуль сдвига материала;  $\bar{\sigma}$ ,  $\bar{\varepsilon}$  – интенсивности девиаторов напряжений и деформаций.

**Трехслойный итерационный алгоритм для решения уравнений смешанного метода.** Для решения системы нелинейных уравнений (5) рассмотрим трехслойный итерационный алгоритм с линейной переобуславляющей матрицей  $[\Lambda_h]$ , которая симметрична и положительно определена. Пусть  $\{u_h^0\}$  – произвольное начальное приближение к решению  $\{u_h\}$ . Тогда процесс последовательных линейных приближений строится в виде

$$\begin{cases} \{\bar{\varepsilon}_h^k\} = [\bar{M}_h]^{-1} [\bar{H}_h] \{u_h^k\}; \\ \{\bar{\varepsilon}_h^k\} = [\bar{M}_h]^{-1} [\bar{H}_h] \{u_h^k\}; \\ \{\bar{\sigma}_h^k\} = [\bar{D}_h(\{\bar{\varepsilon}_h^k\})] (\{\bar{\varepsilon}_h^k\} - \{\bar{\varepsilon}_h\}); \\ \{\bar{\sigma}_h^k\} = [\bar{D}_h(\{\bar{\varepsilon}_h^k\})] (\{\bar{\varepsilon}_h^k\} - \{\bar{\varepsilon}_h\}); \\ \{r_h^k\} = \omega_\alpha [\bar{H}_h]^T \{\bar{\sigma}_h^k\} + \omega_T [\bar{H}_h]^T \{\bar{\sigma}_h^k\} - \{\rho_h\}; \\ [\Lambda_h] \{\omega_h^k\} = \{r_h^k\}; \\ \{u_h^{k+1}\} = (1 + \beta_k) (\{u_h^k\} - \alpha_k \{\omega_h^k\}) - \beta_k \{u_h^{k-1}\}, \end{cases} \quad (14)$$

где числовые параметры  $\alpha_k$  и  $\beta_k$ , вводимые для управления сходимостью процесса, удовлетворяют условиям  $\alpha_k \in (0, 2)$ ,  $\beta_k \in [0, 1)$ . Среди допустимого класса матриц  $[\Lambda_h]$  выделим  $[\Lambda_h] = [K_h]$ , где  $[K_h]$  – симметричная положительно определенная матрица жесткости, соответствующая схеме метода перемещений и построенная на той же сетке, что и смешанная схема для решения линейной (чисто упругой) задачи. При факторизации матрицы  $[K_h]$  в виде произведения двух треугольных матриц использовалась профильная схема хранения верхней треугольной матрицы [4], для сжатия профиля – алгоритмы Катхилла–Макки [5]. Численные аспекты реализации, алгоритм и вычислительная программа профильного метода приведены в [6]. Эффективность применения трехслойной схемы по сравнению с двух-

слоистой обычно наблюдается при решении задач с развитыми зонами пластических деформаций, в которых достигается существенное уменьшение количества требуемых итераций.

Если для решения уравнения относительно поправки  $\{\omega_h^k\}$  использовать итерационный метод, то приходим к двухступенчатому трехслойному итерационному алгоритму [7]. Внешние итерации строятся согласно методу переменных параметров упругости или упругих решений, в качестве внутренних итераций применяется метод сопряженных градиентов с нулевым начальным приближением [8, 9]. Нет необходимости решать уравнение для поправки  $\{\omega_h^k\}$  с высокой степенью точности. Существует оптимальное число, характеризующее точность нахождения поправки, при котором минимизируются общие вычислительные затраты двухступенчатого итерационного алгоритма. Численная реализация описанного подхода к решению нелинейных уравнений смешанного метода (5) свидетельствует об эффективности его применения для хорошо обусловленных задач с ограниченными зонами пластических деформаций.

Решение упругопластических задач с помощью трехслойной схемы показало, что выбор итерационных параметров  $\alpha_k$  и  $\beta_k$  по приближенным формулам

$$\alpha_k = \frac{2}{1 + \sqrt{\gamma_k}}; \quad \beta_k = \min(\chi_k, \mu_k^2);$$

$$2\gamma_k = \omega_T \min_{x_T} \frac{G_k}{G_0}; \quad \chi_k = \frac{\{\omega_h^k\}^T \{\omega_h^k\}}{\{\omega_h^{k-1}\}^T \{\omega_h^{k-1}\}}; \quad \mu_k = \frac{1 - \sqrt{\gamma_k}}{1 + \sqrt{\gamma_k}} \quad (15)$$

во многих случаях приводит к уменьшению количества требуемых итераций по сравнению с таковыми в двухслойной схеме с выбором параметра  $\alpha_k = 1$ .

**Численный анализ.** Результаты расчетов сопоставляли с известными аналитическими решениями [10] для несжимаемого материала и численными решениями на основе классического МКЭ (КМКЭ). В приведенных ниже модельных задачах использовали безразмерные значения. Например, модуль упругости материала  $E$  полагали равным единице. Для диаграммы деформирования  $\bar{\sigma} - \bar{\varepsilon}$  принимались модель идеально упругопластического материала и модель диаграммы с линейным упрочнением без площадки текучести. При этом модуль упрочнения материала полагали равным 0,1. Для аппроксимации условия несжимаемости материала коэффициент Пуассона задавали близким к 0,5. При решении задач смешанным МКЭ (СМКЭ) учитывали граничные условия для нормальных и касательных напряжений на контуре. Для схем КМКЭ значения напряжений в узлах сетки определяли путем усреднения. При построении треугольной сетки использовали равномерное разбиение типа “крест”.

Ниже приведены примеры, иллюстрирующие сходимость и точность численных решений, полученных на основе СМКЭ с использованием функции-колокола и кусочно-линейного восполнения деформаций и напряжений соответственно для плоской и осесимметричной задач. При сравнении результатов, полученных с помощью КМКЭ, введены следующие обозначения:

КМ-1 – линейный треугольный элемент; КМ-2 – билинейный четырехугольный элемент; КМ-3 – квадратичный шестиузловой треугольный элемент; КМ-4 – квадратичный восьмиузловой четырехугольный элемент [1].

*Толстостенный полный цилиндр под действием внутреннего давления.* Рассматривали полый цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления  $q = 1$ , с отношением радиусов  $R_1/R_2 = 1/2$  (рисунок). Расчет выполняли при условии плоского деформированного состояния для четверти сечения цилиндра. Предел текучести материала при одноосном растяжении принимали равным 1,5. Коэффициент Пуассона задавали равным 0,492. Оценивали точность определения окружного и осевого напряжений, а также радиального перемещения на внутренней поверхности цилиндра. На внешней поверхности, где имеет место упругое распределение напряжений, решения, полученные на основе классического и смешанного МКЭ, оказываются близкими. Результаты сравнения для идеально упругопластического материала представлены в табл. 1–3, для материала с линейным упрочнением – в табл. 4–6. В таблицах приведены данные разбиения по углу и радиусу цилиндра. Видно, что смешанный МКЭ дает более точные аппроксимации как напряжений, так и перемещений по сравнению с классическим МКЭ.

Т а б л и ц а 1

**Результаты расчетов окружных напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра под действием внутреннего давления для идеально упругопластического материала**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	0,9036	0,86898	0,78456	0,79074	0,73205	23,43	18,71	7,17	8,02	0,00
18×9	0,8421	0,82498	0,76780	0,77168	0,73205	15,03	12,69	4,88	5,41	0,00
24×12	0,8137	0,80236	0,75795	0,76196	0,73205	11,15	9,60	3,54	4,09	0,00
30×15	0,7972	0,79120	0,75339	0,75607	0,73205	8,90	8,08	2,92	3,28	0,00
36×18	0,7864	0,77934	0,75014	0,75212	0,73205	7,42	6,46	2,47	2,74	0,00
[10]	0,73205									

Т а б л и ц а 2

**Результаты расчетов осевых напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра под действием внутреннего давления для идеально упругопластического материала**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	0,0465	0,01105	-0,07732	-0,07259	-0,13272	134,71	108,25	42,29	45,82	0,93
18×9	-0,0195	-0,03661	-0,09550	-0,09219	-0,13276	85,44	72,67	28,72	31,19	0,90
24×12	-0,0494	-0,06047	-0,10604	-0,10208	-0,13278	63,13	54,86	20,85	23,80	0,89
30×15	-0,0666	-0,07186	-0,11068	-0,10804	-0,13279	50,29	46,36	17,38	19,36	0,88
36×18	-0,0788	-0,08432	-0,11396	-0,11201	-0,13279	41,18	37,06	14,94	16,39	0,88
[10]	-0,13397									

Т а б л и ц а 3

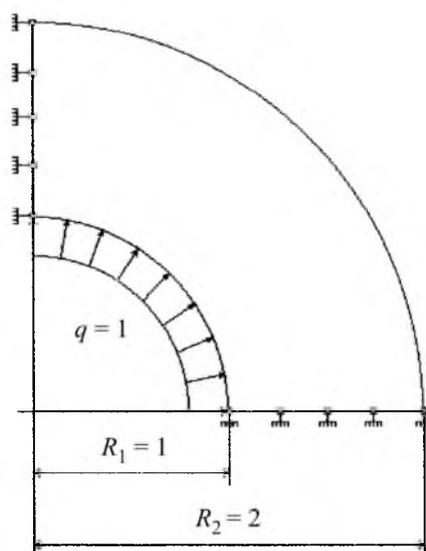
Результаты расчетов радиальных перемещений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра под действием внутреннего давления для идеально упругопластического материала

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	2,3873	2,3927	2,4173	2,4098	2,4118	1,03	0,81	-0,21	0,10	0,02
18×9	2,4049	2,4038	2,4151	2,4126	2,4150	0,30	0,35	-0,12	-0,01	-0,11
24×12	2,4090	2,4096	2,4131	2,4144	2,4147	0,13	0,11	-0,03	-0,09	-0,10
30×15	2,4104	2,4054	2,4130	2,4145	2,4144	0,08	0,28	-0,03	-0,09	-0,09
36×18	2,4113	2,4123	2,4130	2,4144	2,4140	0,04	0,00	-0,03	-0,09	-0,07
[10]	2,41226									

Т а б л и ц а 4

Результаты расчетов окружных напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра под действием внутреннего давления для материала с линейным упрочнением

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	1,0229	0,99291	0,90712	0,91180	0,8430	-17,78	14,33	4,45	4,99	2,93
18×9	0,9687	0,95409	0,89519	0,89813	0,8522	-11,54	9,86	3,07	3,41	1,88
24×12	0,9436	0,93385	0,88886	0,89117	0,8567	-8,65	7,53	2,35	2,61	1,36
30×15	0,9288	0,92143	0,88497	0,88694	0,8593	-6,94	6,10	2,12	2,12	1,06
36×18	0,9191	0,91303	0,88288	0,88410	0,8611	-5,83	5,13	1,80	1,80	0,85
[10]	0,86849									



Полый цилиндр под действием внутреннего давления.

Т а б л и ц а 5

**Результаты расчетов осевых напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра под действием внутреннего давления для материала с линейным упрочнением**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	0,11007	0,07676	-0,01514	-0,01058	-0,07767	267,41	216,72	76,96	83,90	18,13
18×9	0,04671	0,03041	-0,03156	-0,02818	-0,07315	171,04	146,23	51,99	57,13	11,25
24×12	0,01771	0,00703	-0,04040	-0,03705	-0,07095	126,93	110,68	38,55	43,64	7,91
30×15	0,00091	-0,00706	-0,04511	-0,04240	-0,06965	101,38	89,25	31,39	35,51	5,93
36×18	-0,01010	-0,01649	-0,04761	-0,04597	-0,06878	84,64	74,91	27,59	30,08	4,61
[10]	-0,06575									

Т а б л и ц а 6

**Результаты расчетов радиальных перемещений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра под действием внутреннего давления для материала с линейным упрочнением**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	2,2963	2,3062	2,3239	2,3223	2,3156	1,12	0,70	-0,07	0,00	0,29
18×9	2,3114	2,3151	2,3225	2,3223	2,3203	0,47	0,31	-0,01	0,00	0,09
24×12	2,3165	2,3182	2,3219	2,3223	2,3215	0,25	0,18	0,02	0,00	0,04
30×15	2,3188	3,3197	2,3221	2,3223	2,3220	0,15	0,11	0,01	0,00	0,01
36×18	2,3200	2,3205	2,3220	2,3223	2,3222	0,10	0,08	0,02	0,00	0,00
[10]	2,322356									

*Кольцевой диск постоянной толщины под действием внутреннего давления.* Рассматривали диск, находящийся под действием внутреннего давления  $q = 1$ , с отношением радиусов  $R_1/R_2 = 1/2$ . Ввиду симметрии задачи расчет выполняли для четверти среднего сечения диска при условии плоского напряженного состояния. Полагали, что материал диска не обладает упрочнением, предел текучести при одноосном растяжении составляет 1,5. Коэффициент Пуассона задавали равным 0,49999. Оценивали точность определения окружных напряжений и радиального перемещения на внутренней поверхности диска. Результаты расчетов представлены в табл. 7, 8. Там же приведены данные разбиения по углу и радиусу диска. Сравнение численных решений, полученных с использованием классического и смешанного МКЭ, свидетельствует о преимуществе последнего.

*Толстостенная сферическая оболочка под действием внутреннего давления.* Задачу решали в осесимметричной постановке с отношением радиусов  $R_1/R_2 = 1/2$  и внутренним давлением  $q = 1$ . Расчетная схема формально соответствует задаче о полом цилиндра, находящемся под действием внутреннего давления (рисунок). Ввиду симметрии задачи рассматривали четверть сечения сферы. Предел текучести материала при одноосном растя-

жении принимали равным 0,8. Коэффициент Пуассона задавали равным 0,494. Оценивали точность вычисления окружных напряжений и радиального перемещения на внутренней поверхности сферы. Результаты расчетов представлены в табл. 9, 10. Там же приведены данные разбиения по углу и толщине оболочки. Из табл. 9 видно, что при всех разбиениях смешанный метод дает более точные аппроксимации напряжений по сравнению с классическим МКЭ.

Т а б л и ц а 7

**Результаты расчетов окружных напряжений для задачи об упругопластическом состоянии кольцевого диска под действием внутреннего давления для идеально упругопластического материала**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	0,8766	0,86894	0,79068	0,78849	0,72474	-20,95	-19,90	-9,10	-8,80	0,00
18×9	0,8318	0,82441	0,76929	0,76806	0,72474	-14,77	-13,75	-6,15	-5,98	0,00
24×12	0,8073	0,80079	0,75614	0,75755	0,72474	-11,39	-10,49	-4,33	-4,53	0,00
30×15	0,7919	0,78622	0,75153	0,75114	0,72474	-9,27	-8,48	-3,70	-3,64	0,00
36×18	0,7814	0,77632	0,74444	0,74683	0,72474	-7,82	-7,12	-2,72	-3,05	0,00
42×21	0,7737	0,76917	0,74183	0,74373	0,72474	-6,75	-6,13	-2,36	-2,62	0,00
[10]	0,72474									

Т а б л и ц а 8

**Результаты расчетов радиальных перемещений для задачи об упругопластическом состоянии кольцевого диска под действием внутреннего давления для идеально упругопластического материала**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	2,7114	2,6975	2,7257	2,7298	2,7355	1,13	1,64	0,61	0,46	0,26
18×9	2,7274	2,7145	2,7269	2,7285	2,7394	0,55	1,02	0,57	0,51	0,11
24×12	2,7353	2,7175	2,7216	2,7254	2,7410	0,26	0,91	0,76	0,62	0,06
30×15	2,7370	2,7220	2,7194	2,7263	2,7402	0,20	0,75	0,84	0,59	0,08
36×18	2,7390	2,7231	2,7261	2,7260	2,7415	0,13	0,71	0,60	0,60	0,03
42×21	2,7400	2,7238	2,7262	2,7265	2,7419	0,09	0,68	0,59	0,58	0,02
[10]	2,7425									

**Заключение.** Приведенные выше тестовые примеры и опыт решения практических задач свидетельствуют об улучшенных аппроксимациях полей напряжений, полученных с помощью смешанного метода. При этом улучшение сходимости аппроксимации для напряжений не приводит к ухудшению сходимости для перемещений. Существенное улучшение приближенного решения обычно наблюдается при решении задач о концентрации напряжений с развитыми зонами пластических деформаций. Использование регулярных и квазирегулярных сеток, а также учет статических граничных

Т а б л и ц а 9

**Результаты расчетов окружных напряжений для задачи об упругопластическом состоянии толстостенной сферической оболочки под действием внутреннего давления для идеально упругопластического материала**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	0,0067	-0,10355	-0,14360	-0,14534	-0,1958	103,35	48,23	28,20	27,33	2,10
18×9	-0,0872	-0,13584	-0,16235	-0,16317	-0,1976	56,40	32,08	18,83	18,42	1,20
24×12	-0,1229	-0,15197	-0,17487	-0,17224	-0,1983	38,55	24,02	12,57	13,88	0,85
30×15	-0,1412	-0,16165	-0,17964	-0,17772	-0,1987	29,40	19,18	10,18	11,14	0,65
36×18	-0,1523	-0,16808	-0,18314	-0,18140	-0,1989	23,85	15,96	8,43	9,30	0,55
42×21	-0,1598	-0,17267	-0,18546	-0,18403	-0,1991	20,10	13,67	7,27	7,99	0,45
[10]	-0,2									

Т а б л и ц а 10

**Результаты расчетов радиальных перемещений для задачи об упругопластическом состоянии толстостенной сферической оболочки под действием внутреннего давления для идеально упругопластического материала**

Сетка	Внутренняя поверхность					Погрешность, %				
	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ	КМ-1	КМ-2	КМ-3	КМ-4	СМКЭ
12×6	1,5041	1,5555	1,5639	1,5772	1,5560	3,87	-0,58	-0,05	0,80	0,55
18×9	1,5477	1,5608	1,5680	1,5693	1,5674	1,08	-0,25	0,21	0,30	-0,18
24×12	1,5602	1,5659	1,5706	1,5711	1,5692	0,28	0,08	0,38	0,41	-0,29
30×15	1,5645	1,5688	1,5710	1,5720	1,5711	0,01	0,27	0,41	0,47	-0,41
36×18	1,5669	1,5695	1,5708	1,5718	1,5712	-0,14	0,31	0,39	0,46	-0,42
42×21	1,5680	1,5698	1,5710	1,5713	1,5707	-0,21	0,33	0,41	0,43	-0,39
[10]	1,56464									

условий на поверхности тела приводит к более точным численным результатам. Применение смешанной аппроксимации к решению нелинейных задач механики разрушения позволяет получить более устойчивые решения для напряжений и деформаций по сравнению с классическим МКЭ в форме метода перемещений. Для задач с локальными зонами пластических деформаций, имеющих незначительный градиент напряжений, результаты расчетов на основе смешанного и классического МКЭ близки к точным решениям. На редких сетках применение смешанного метода к расчету тел сложной конфигурации позволяет получить более точные результаты по сравнению с классическим МКЭ.

## Резюме

Для розв'язання двовимірних крайових задач теорії малих пружно-пластичних деформацій використовується трикутний скінченний елемент, що забезпечує стійкість та збіжність змішаної апроксимації. Наведено систему

розв'язувальних матричних рівнянь змішаного типу, для розв'язку якої використовується тришаровий ітераційний алгоритм із переобумовлюючою матрицею. Зіставлено числові результати розв'язку модельних задач, що отримані класичним та змішаним методами скінченних елементів.

1. *Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L.* The Finite Element Method. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi: Butterworth-Heinemann, 2000. – 1482 p.
2. *Чирков А. Ю.* Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения задач теории упругости // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 70 – 100.
3. *Уманский С. Э.* Общая теория и практическое применение смягченно-смешанных схем метода конечных элементов // Там же. – 1984. – № 12. – С. 83 – 89.
4. *Jennings A.* A compact storage scheme for the solution of symmetric linear simultaneous equations // Comput. J. – 1966. – 9. – P. 281 – 285.
5. *Cuthill E. and McKee J.* Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices // Proc. 24th Nat. Conf. Assoc. Comput. Mach. – ACM Publ., 1969. – P. 157 – 172.
6. *Felippa C. A.* Solution of linear equations with skyline-stored symmetric matrix // Comp. Struct. – 1975. – 5, No. 1. – P. 13 – 29.
7. *Дьяконов Е. Г.* Минимизация вычислительной работы. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
8. *Hestens M. and Stiefel E.* Methods of conjugate gradients for solving linear system // Nat. Bur. Std. J. Res. – 1952. – 49. – P. 409 – 436.
9. *Reid J. K.* On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations // Large Sparse Sets Linear Equations. – London; New York: Academ Press. – 1971. – P. 231 – 252.
10. *Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наук. думка, 1981. – 492 с.

Поступила 04. 04. 2005