

## Применение в конечноэлементных расчетах модифицированного алгоритма метода сопряженных градиентов

**А. Ю. Чирков**

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

*Для решения систем линейных алгебраических уравнений методом конечных элементов рассматривается обобщенный метод сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей, построенной с помощью матрицы перехода для метода симметричной верхней релаксации. Показана возможность двукратного ускорения итерационного алгоритма. Представлены численные результаты анализа скорости сходимости итерационного процесса при решении двумерных модельных задач теории упругости и линейной механики разрушения с использованием классического и модифицированного алгоритма метода сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей метода симметричной верхней релаксации.*

**Ключевые слова:** метод конечных элементов, метод сопряженных градиентов, переобуславливающая матрица, сходимость, точность.

При исследовании прикладных задач механики методом конечных элементов наиболее трудоемким этапом расчета является решение больших систем линейных алгебраических уравнений с разреженной симметричной положительно определенной матрицей коэффициентов. Для решения систем линейных уравнений методом конечных элементов (МКЭ) применяются как прямые методы, так и итерационные [1–4]. Основным прямым алгоритмом решения систем линейных уравнений МКЭ служит метод Гаусса и его различные модификации – фронтальный метод, метод Холецкого и др. [1–3]. Наибольшее распространение среди итерационных алгоритмов решения разрешающих уравнений МКЭ получил метод сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей [4–6]. Цель работы заключалась в выявлении наибольшей эффективности метода сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей, построенной на основе матрицы перехода для метода симметричной верхней релаксации [7–9].

Пусть  $[A]$  – симметричная положительно определенная матрица,  $\{x\}$  – вектор неизвестных и  $\{y\}$  – вектор правой части системы линейных уравнений:

$$[A]\{x\} = \{y\}. \quad (1)$$

Представим матрицу  $[A]$  в виде разложения

$$[A] = [L]^T + [D] + [L], \quad (2)$$

где  $[D]$  – блочно-диагональная симметричная положительно определенная матрица;  $[L]$  – блочная строго верхняя треугольная матрица;  $[L]^T$  – транспонированная по отношению к  $[L]$  блочная матрица, т.е. строго нижняя треугольная блочная матрица.

Поскольку  $[D]$  – блочно-диагональная симметричная положительно определенная матрица, существует такая положительно определенная блочная матрица  $[C]$ , что

$$[D] = [C]^T [C]. \quad (3)$$

Построение блочной матрицы  $[C]$  основывается на факторизации Холецкого [2] для каждого блока матрицы  $[D]$ .

Тогда систему уравнений (1) можно представить в следующем виде:

$$[\bar{A}]\{\bar{x}\} = \{\bar{y}\}, \quad (4)$$

где  $[\bar{A}]$  – симметричная положительно определенная блочная матрица, задаваемая соотношением

$$[\bar{A}] = [C]^{-T} [A] [C]^{-1}; \quad (5)$$

$\{\bar{x}\}, \{\bar{y}\}$  – векторы,

$$\{\bar{x}\} = [C]\{x\}; \quad \{\bar{y}\} = [C]^{-T}\{y\}. \quad (6)$$

На основании (2), (5) имеем

$$[\bar{A}] = [\bar{L}]^T + [E] + [\bar{L}], \quad (7)$$

где  $[E]$  – единичная матрица;  $[\bar{L}]$  – строго верхняя треугольная блочная матрица;  $[\bar{L}]^T$  – транспонированная по отношению к  $[\bar{L}]$  блочная матрица. Матрицы  $[\bar{L}]$  и  $[\bar{L}]^T$  определяются по выражениям

$$[\bar{L}] = [C]^{-T} [L] [C]^{-1}; \quad [\bar{L}]^T = [C]^{-T} [L]^T [C]^{-1}. \quad (8)$$

Для переобусловливания матрицы системы уравнений (4) введем в рассмотрение симметричную блочную матрицу

$$[\Lambda(\omega)] = ([E] + \omega[\bar{L}])([E] + \omega[\bar{L}]^T), \quad (9)$$

где  $\omega$  – параметр релаксации, удовлетворяющий условию  $\omega \in (0, 2)$ , при котором матрица  $[\Lambda(\omega)]$  положительно определена и, следовательно, невырождена.

Рассмотрим обобщенный метод сопряженных градиентов с переобусловливающей матрицей (9). Пусть  $\{\bar{x}^0\}$  – произвольное начальное приближение к решению  $\{\bar{x}\}$ ,  $\{\bar{r}^0\}$  – вектор начальной невязки, который вычисляется по формуле

$$\{\bar{r}^0\} = [\bar{A}]\{\bar{x}^0\} - \{\bar{y}\}. \quad (10)$$

Вектор начального направления  $\{\bar{\mathbf{g}}^0\}$  и начальное значение итерационного параметра  $\gamma_0$  определяются соотношениями

$$[\Lambda(\omega)]\{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\bar{\mathbf{r}}^0\}; \quad \{\bar{\mathbf{g}}^0\} = \{\bar{\mathbf{p}}\}; \quad \gamma_0 = \{\bar{\mathbf{p}}\}^T \{\bar{\mathbf{r}}^0\}. \quad (11)$$

Тогда формулы метода сопряженных градиентов могут быть записаны в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\bar{\mathbf{q}}\} = [\bar{\mathbf{A}}]\{\bar{\mathbf{g}}^k\}; \\ \lambda_k = \frac{\gamma_k}{\{\bar{\mathbf{p}}\}^T \{\bar{\mathbf{q}}\}}; \\ \{\bar{\mathbf{x}}^{k+1}\} = \{\bar{\mathbf{x}}^k\} - \lambda_k \{\bar{\mathbf{g}}^k\}; \\ \{\bar{\mathbf{r}}^{k+1}\} = \{\bar{\mathbf{r}}^k\} - \lambda_k \{\bar{\mathbf{q}}\}; \\ [\Lambda(\omega)]\{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\bar{\mathbf{r}}^{k+1}\}; \\ \gamma_{k+1} = \{\bar{\mathbf{p}}\}^T \{\bar{\mathbf{r}}^{k+1}\}; \\ \beta = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}; \\ \{\bar{\mathbf{g}}^{k+1}\} = \{\bar{\mathbf{p}}\} + \beta \{\bar{\mathbf{g}}^k\}. \end{array} \right. \quad (12)$$

Отметим, что матрица  $[\Lambda(\omega)]$  не строится в явном виде, поскольку для нахождения вектора  $\{\bar{\mathbf{p}}\}$  достаточно применить метод дробных шагов решения систем с треугольными матрицами  $[\bar{\mathbf{L}}]$  и  $[\bar{\mathbf{L}}]^T$ . Процедуру вычисления вектора  $\{\bar{\mathbf{p}}\}$  разобьем на два этапа:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\bar{\mathbf{p}}\}^{1/2} = \{\bar{\mathbf{r}}^k\} - \omega[\bar{\mathbf{L}}]\{\bar{\mathbf{p}}\}^{1/2}; \\ \{\bar{\mathbf{p}}\} = \{\bar{\mathbf{p}}\}^{1/2} - \omega[\bar{\mathbf{L}}]^T \{\bar{\mathbf{p}}\}^{1/2}. \end{array} \right. \quad (13)$$

Численная реализация приведенного выше алгоритма не требует вспомогательного вектора  $\{\bar{\mathbf{p}}\}^{1/2}$  для хранения промежуточной информации. Все вычисления проводятся с одним вектором  $\{\bar{\mathbf{p}}\}$ . Таким образом, получаем итерационный процесс, который обладает высокой скоростью сходимости при минимальных запросах к ресурсам памяти компьютера, поскольку нет дополнительных затрат, связанных с хранением переобуславливающей матрицы  $[\Lambda(\omega)]$ .

Установлено, что при решении систем линейных уравнений, порождаемых МКЭ в задачах теории упругости, сходимость итерационного процесса (12), (13) во многих случаях приближается к оптимальной, если  $0,8 \leq \omega \leq 1,3$ , и применение переобуславливающей матрицы  $[\Lambda(\omega)]$  по сравнению с классическими формулами метода сопряженных градиентов приводит к уменьшению количества требуемых итераций.

Быстродействие итерационного алгоритма (12), (13) можно увеличить в два раза, если совместить процедуры вычисления векторов  $\{\bar{\mathbf{p}}\}$  и  $\{\bar{\mathbf{q}}\}$ . С этой целью представим систему уравнений (4) в эквивалентном виде

$$[\mathbf{A}]\{\underline{\mathbf{x}}\} = \{\underline{\mathbf{y}}\}. \quad (14)$$

Здесь  $[\mathbf{A}]$  – симметричная блочная матрица, определяемая соотношением

$$[\mathbf{A}] = \omega([\mathbf{E}] + [\overline{\mathbf{L}}_\omega]^T)^{-1} [\overline{\mathbf{A}}] ([\mathbf{E}] + [\overline{\mathbf{L}}_\omega])^{-1}; \quad (15)$$

$\{\underline{\mathbf{x}}\}, \{\underline{\mathbf{y}}\}$  – векторы,

$$\{\underline{\mathbf{x}}\} = ([\mathbf{E}] + [\overline{\mathbf{L}}_\omega])\{\overline{\mathbf{x}}\}; \quad \{\underline{\mathbf{y}}\} = \omega([\mathbf{E}] + [\overline{\mathbf{L}}_\omega]^T)^{-1}\{\overline{\mathbf{y}}\}, \quad (16)$$

где

$$[\overline{\mathbf{L}}_\omega] = \omega[\overline{\mathbf{L}}]; \quad [\overline{\mathbf{L}}_\omega]^T = \omega[\overline{\mathbf{L}}]^T. \quad (17)$$

Применение метода сопряженных градиентов для решения переобусловленной системы линейных уравнений (14) приводит к следующему итерационному алгоритму. Пусть  $\{\overline{\mathbf{x}}^0\}$  – произвольное начальное приближение к решению  $\{\overline{\mathbf{x}}\}$ ,  $\{\underline{\mathbf{r}}^0\}$  – вектор начальной невязки, который вычисляется в соответствии с формулой

$$\{\underline{\mathbf{r}}^0\} = \omega(\{\overline{\mathbf{x}}^0\} - \{\overline{\mathbf{y}}\}) + [\overline{\mathbf{L}}_\omega]\{\overline{\mathbf{x}}^0\} + [\overline{\mathbf{L}}_\omega]^T(\{\overline{\mathbf{x}}^0\} - \{\underline{\mathbf{r}}^0\}). \quad (18)$$

Вектор направления  $\{\underline{\mathbf{g}}^0\}$  и значение параметра  $\gamma_0$  определяются соотношениями

$$\{\underline{\mathbf{g}}^0\} = \{\underline{\mathbf{r}}^0\}; \quad \gamma_0 = \{\underline{\mathbf{r}}^0\}^T \{\underline{\mathbf{r}}^0\}. \quad (19)$$

Тогда формулы метода сопряженных градиентов могут быть записаны в следующем виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \{\underline{\mathbf{p}}\} = \{\underline{\mathbf{g}}^k\} - [\overline{\mathbf{L}}_\omega]\{\underline{\mathbf{p}}\}; \\ \{\underline{\mathbf{q}}\} = \{\underline{\mathbf{g}}^k\} + (\omega - 1)\{\underline{\mathbf{p}}\} + [\overline{\mathbf{L}}_\omega]^T(\{\underline{\mathbf{p}}\} - \{\underline{\mathbf{q}}\}); \\ \lambda_k = \frac{\gamma_k}{\{\underline{\mathbf{q}}\}^T \{\underline{\mathbf{g}}^k\}}; \\ \{\overline{\mathbf{x}}^{k+1}\} = \{\overline{\mathbf{x}}^k\} - \lambda_k \{\underline{\mathbf{p}}\}; \\ \{\underline{\mathbf{r}}^{k+1}\} = \{\underline{\mathbf{r}}^k\} - \lambda_k \{\underline{\mathbf{q}}\}; \\ \gamma_{k+1} = \{\underline{\mathbf{r}}^{k+1}\}^T \{\underline{\mathbf{r}}^{k+1}\}; \\ \beta = \frac{\gamma_{k+1}}{\gamma_k}; \\ \{\underline{\mathbf{g}}^{k+1}\} = \{\underline{\mathbf{r}}^{k+1}\} + \beta \{\underline{\mathbf{g}}^k\}. \end{array} \right. \quad (20)$$

В алгоритме (20) вычислительные затраты на одну итерацию в два раза меньше, чем в (12), (13). Действительно, для реализации итерационного процесса на основании формул (12), (13) необходимо на каждой итерации треугольную матрицу умножить на вектор четыре раза, в то время как в формулах (20) только два раза. Таким образом, численная реализация модифицированного алгоритма (20) не приводит к дополнительным вычислительным затратам. Кроме того, скорость сходимости оказывается выше по сравнению с классической процедурой метода сопряженных градиентов без переобуславливания матрицы системы уравнений.

В методе сопряженных градиентов для окончания итерационного процесса целесообразно использовать критерий

$$(\{\bar{\mathbf{x}}^{k+1}\} - \{\bar{\mathbf{x}}^k\})^T [\bar{\mathbf{A}}] (\{\bar{\mathbf{x}}^{k+1}\} - \{\bar{\mathbf{x}}^k\}) \leq \varepsilon \{\bar{\mathbf{x}}^k\}^T [\bar{\mathbf{A}}] \{\bar{\mathbf{x}}^k\}, \quad (21)$$

где  $\varepsilon$  – малое наперед заданное положительное число ( $\varepsilon = 10^{-14} \dots 10^{-15}$ ).

На основании формул (20) и (21) получаем

$$\lambda_k \gamma_k \leq \varepsilon \sum_{m=1}^{k-1} \lambda_m \gamma_m. \quad (22)$$

Рассмотрим еще три замечания относительно решения систем линейных уравнений, порождаемых МКЭ.

*Замечание 1.* Эмпирический подход к определению параметра релаксации  $\omega$  основывается на том, что отношение

$$\frac{\{\mathbf{x}\}^T [\mathbf{A}] \{\mathbf{x}\}}{\{\mathbf{x}\}^T \{\mathbf{x}\}}, \quad (23)$$

характеризующее обусловленность матрицы  $[\mathbf{A}]$ , достигает максимального значения на “гладких” векторах  $\{\mathbf{x}\}$ . Тогда параметр релаксации  $\omega$  можно определять по следующим приближенным формулам:

$$\omega = \frac{2}{1 + 2\sqrt{\theta}}; \quad \theta = \frac{1}{N} \{\mathbf{z}\}^T \{\mathbf{z}\}. \quad (24)$$

Здесь  $N$  – порядок системы;  $\{\mathbf{z}\}$  – вектор,

$$\{\mathbf{z}\} = \frac{1}{2} \{\delta\} + [\bar{\mathbf{L}}] \{\delta\}, \quad (25)$$

где  $\{\delta\}$  – вектор с компонентами, равными единице.

*Замечание 2.* Естественным представлением матрицы  $[A]$  в блочном виде является разбиение ее на блоки, которые соответствуют группам неизвестных для узлов сетки. В этом случае вычисление блоков матрицы  $[C]$  и масштабирование блочной треугольной матрицы  $[L]$  на основании формул (8) приводят к минимальным вычислительным затратам. Если в каждом узле сетки заданы три компоненты вектора перемещений, то в соответствии с формулами (24) и (25) параметр релаксации  $\omega$  целесообразно вычислять по следующим соотношениям:

$$\omega = \frac{2}{1 + 2\sqrt{\theta}}, \quad \theta = \max(\theta_1, \theta_2, \theta_3). \quad (26)$$

Здесь

$$\theta_m = \frac{1}{N_p} \{z_m\}^T \{z_m\}, \quad 1 \leq m \leq 3, \quad (27)$$

где  $N_p$  – число узлов сетки;  $\{z_m\}$  – векторы,

$$\{z_m\} = \frac{1}{2} \{\delta_m\} + [\bar{L}] \{\delta_m\}, \quad 1 \leq m \leq 3 \quad (28)$$

( $\{\delta_m\}$  – блочный вектор,  $m$ -я компонента которого в каждом узле сетки равна единице. Все остальные компоненты вектора  $\{\delta_m\}$  равны нулю.)

*Замечание 3.* Поскольку  $[L]$  и  $[L]^T$  – треугольные матрицы, сходимость итерационного процесса (20) зависит от порядка нумерации узловых неизвестных  $\{x\}$ , т.е. от нумерации узлов сетки. Установлено, что применение алгоритма Катхилла–Макки [10] с целью минимизации ширины ленты матрицы жесткости  $[A]$  во многих случаях позволяет уменьшить количество требуемых итераций приблизительно на 5...10%.

Ниже приведен фрагмент текста Фортран-программы, реализующей модифицированный алгоритм метода сопряженных градиентов с переобуславливанием матрицы системы линейных уравнений по схеме симметричной верхней релаксации. Используются следующие обозначения: NEQ – количество уравнений; OMEGA – параметр релаксации; EPS – константа для окончания итераций; BETA, LAM, GAM, GAM1 – переменные метода сопряженных градиентов; I – индекс текущей строки; J – индекс столбца с ненулевым элементом матрицы  $[L]$  в  $i$ -й строке; X(NEQ) – вектор решения; Y(NEQ) – вектор правой части, который используется для вычисления невязки; D(NEQ) – вектор диагональных элементов матрицы  $[A]$ ; L(MTR) – строго верхняя треугольная матрица, хранящаяся в компактном виде по строкам; MTR – количество ненулевых элементов матрицы  $[L]$ ; IR(NEQ+1) – вектор, указывающий начало списка индексов столбцов ненулевых элементов в строке матрицы  $[L]$ ; MS(MTR) – вектор индексов столбцов ненулевых элементов в строке матрицы  $[L]$ ; G(NEQ), P(NEQ), Q(NEQ) – рабочие массивы.

```

DOUBLE PRECISION, AUTOMATIC :: OMEGA, OMEGA1, BETA
DOUBLE PRECISION, AUTOMATIC :: LAM, GAM, GAM1, DEL, SUM, ZI, EPS
INTEGER (4), AUTOMATIC :: I, J, N, ITER
EPS = 1.D-14
BETA = 0.D0
SUM = 0.D0
Масштабирование:
DO I = 1, NEQ
D (I) = DSQRT (D (I))
END DO
DO I = 1, NEQ
ZI = D (I)
DO N = IR (I)+1, IR (I+1)
L (N) = OMEGA * L (N) / (ZI * D (MS (N)))
END DO
X (I) = X (I) * ZI
Y (I) = Y (I) / ZI
END DO
Вычисление параметра релаксации:
DEL = 0.D0
DO I = 1, NEQ
ZI = 5.D-1
DO N = IR (I) + 1, IR (I+1)
ZI = ZI+L (N)
END DO
DEL = DEL + ZI * ZI
END DO
ZI = DSQRT (DEL / DBLE (NEQ))
OMEGA = 2.D0 / (1.D0 + 2.D0 * ZI)
OMEGA1 = OMEGA - 1.D0
DO N = 1, IR (NEQ + 1)
L (N) = OMEGA * L (N)
END DO
Вычисление вектора начальной невязки:
DO I = 1, NEQ
Y (I) = OMEGA * (X (I) - Y (I))
END DO
DO I = 1, NEQ
ZI = Y (I)
DO N = IR (I) + 1, IR (I + 1)
ZI = ZI + L (N) * X (MS (N))
END DO
Y (I) = ZI
ZI = X (I) - ZI
DO N = IR (I) + 1, IR (I + 1)
J = MS (N)
Y (J) = Y (J) + L (N) * ZI
END DO
END DO
Вычисление скалярного произведения  $\gamma_0$ :
GAM = 0.D0
DO I = 1, NEQ
ZI = Y (I)
GAM = GAM + ZI * ZI
G (I) = 0.D0
END DO

```

Цикл по итерациям:

DO ITER = 1, 2 \* NEQ

Вычисление векторов {G} и {P}:

DO I = NEQ, 1, -1

ZI = Y (I) + BETA \* G (I)

G (I) = ZI

DO N = IR (I) + 1, IR (I+1)

ZI = ZI - L (N) \* P (MS (N))

END DO

P (I) = ZI

Q (I) = G (I) + OMEGA1 \* ZI

END DO

Вычисление вектора {Q} и скалярного произведения  $DEL = \{Q\} * \{G\}$ :

DEL = 0.D0

DO I = 1, NEQ

ZI = Q (I)

DEL = DEL + ZI \* G (I)

ZI = P (I) - ZI

DO N = IR (I) + 1, IR (I+1)

J = MS (N)

Q (J) = Q (J) + L (N) \* ZI

END DO

END DO

LAM = GAM / DEL

DEL = GAM \* LAM

SUM = SUM + DEL

GAM1 = GAM

Вычисление векторов решения, невязки и  $\gamma_k$  в текущем приближении:

GAM = 0.D0

DO I = 1, NEQ

X (I) = X (I) - LAM \* P (I)

ZI = Y (I) - LAM \* Q (I)

GAM = GAM + ZI \* ZI

Y (I) = ZI

END DO

Проверка критерия сходимости:

IF (DEL < EPS \* SUM) EXIT

BETA = GAM / GAM1

END DO

Вычисление вектора решения {X}:

DO I = 1, NEQ

X (I) = X (I) / D (I)

END DO

**Численный анализ.** Все значения в приведенных ниже двухмерных модельных задачах были безразмерными. Например, модуль упругости материала  $E$  принимался равным единице. Использовалась линейная аппроксимация перемещений на треугольных элементах [11]. Для построения треугольной сетки применялось равномерное разбиение типа “крест”. При сравнении результатов использовались обозначения: КМСГ – классический метод сопряженных градиентов; ММСГ – модифицированный метод сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей симметричной верхней релаксации. Эффективность ММСГ по сравнению с КМСГ оценивалась



на основании коэффициента ускорения, который определялся как отношение вычислительных затрат при КМСГ к таковым при ММСГ.

*Задача о поперечном изгибе консольного бруса.* Рассматривали брус длиной  $L = 10$  и высотой  $H = 1$  прямоугольного поперечного сечения (рис. 1). К свободному торцу прикладывалась поперечная сосредоточенная сила  $P = 1$ . Коэффициент Пуассона задавали равным нулю. Результаты расчетов представлены в табл. 1. Там же приведены разбиения по длине  $L$  и высоте  $H$  бруса. Из данных табл. 1 видно, что при сгущении сетки эффективность ММСГ по сравнению с КМСГ возрастает.

Т а б л и ц а 1

**Количество итераций при решении задачи об изгибе консольного бруса, находящегося под действием силы, приложенной на свободном торце**

Сетка	$N$	КМСГ	ММСГ	Коэффициент ускорения
$20 \times 2$	206	130	54	2,41
$40 \times 4$	730	273	85	3,21
$60 \times 6$	1574	416	111	3,75
$80 \times 8$	2738	556	134	4,15
$100 \times 10$	4222	697	155	4,50
$120 \times 12$	6026	837	175	4,78
$140 \times 14$	8150	976	194	5,03
$160 \times 16$	10594	1114	217	5,13
$180 \times 18$	13358	1253	236	5,31
$200 \times 20$	16442	1392	255	5,46
$300 \times 30$	36662	2071	342	6,06
$400 \times 40$	64882	2759	421	6,55
$500 \times 50$	101102	3445	496	6,95
$600 \times 60$	145322	4130	567	7,28

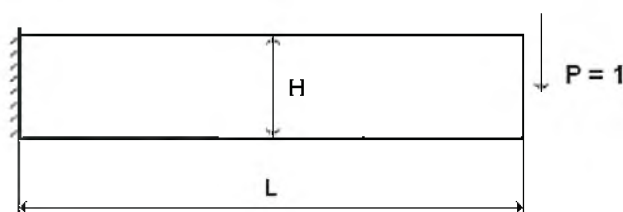


Рис. 1. Задача о поперечном изгибе консольного бруса.

*Поперечный изгиб кривого бруса.* Рассматривали брус квадратного поперечного сечения  $B \times H = 1 \times 1$  в форме четверти кругового кольца с наружным  $R_2 = 20,5$  и внутренним  $R_1 = 19,5$  радиусами под действием сосредоточенной силы, приложенной на конце  $P = 0,1$  (рис. 2). Коэффициент Пуассона принимали равным нулю. Сравнение численных результатов по методам КМСГ и ММСГ представлено в табл. 2. Там же приведены разбиения по

углу  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$  и радиусу  $R_1 \leq r \leq R_2$ . Из данных табл. 2 видно, что ММСГ обеспечивает более высокую скорость сходимости по сравнению с КМСГ при всех разбиениях.

Т а б л и ц а 2

Количество итераций при решении задачи об изгибе кривого бруса, находящегося под действием силы, приложенной на свободном торце

Сетка	$N$	КМСГ	ММСГ	Коэффициент ускорения
30×1	184	224	85	2,64
60×2	606	544	167	3,26
90×3	1268	849	239	3,55
120×4	2170	1152	288	4,00
150×5	3312	1450	346	4,19
180×6	5416	1967	442	4,45
240×8	8178	2387	495	4,82
360×12	18026	3548	688	5,16
480×16	31714	4792	846	5,66
600×20	49242	5995	1022	5,86
720×24	70610	7302	1168	6,25
840×28	95818	8320	1311	6,35
960×32	126866	9895	1445	6,85

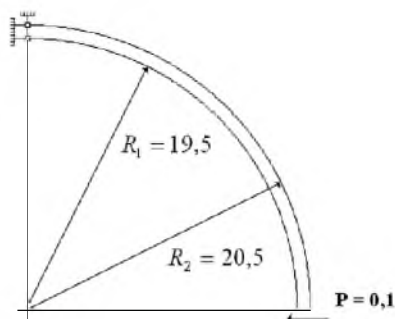


Рис. 2. Изгиб кривого бруса силой, приложенной на конце.

*Толстое кольцо, сжатое двумя сосредоточенными силами.* Отношение радиусов принимали как  $R_1/R_2 = 1/2$ . Ввиду симметрии задачи рассматривали четверть кольца с сосредоточенной силой  $P = 1$  (рис. 3). Коэффициент Пуассона задавали равным 0,3. Результаты расчетов представлены в табл. 3. Там же приведены разбиения по углу и радиусу кольца. Из данных табл. 3 видно, что по количеству требуемых итераций метод ММСГ является более эффективным по сравнению с КМСГ при всех разбиениях.

*Растяжение полосы с центральной трещиной.* Рассматривали прямоугольную пластину шириной  $W = 8$  и высотой  $H = 16$  с центральной трещиной под действием одноосных растягивающих напряжений  $q = 1$  (рис. 4).

Т а б л и ц а 3

Количество итераций при решении задачи о толстом кольце  
под действием двух сосредоточенных сил

Сетка	$N$	КМСГ	ММСГ	Коэффициент ускорения
10×5	232	109	40	2,72
20×10	862	217	66	3,28
40×20	3322	437	107	4,08
60×30	7382	651	144	4,52
80×40	13042	866	176	4,92
100×50	20302	1079	207	5,21
120×60	29162	1290	236	5,47
140×70	39622	1503	264	5,69
160×80	51682	1744	291	5,99
180×90	65342	1925	317	6,07
200×100	80602	2135	342	6,24
300×150	180902	3186	462	6,89
400×200	321202	4228	572	7,39
500×250	501502	5268	675	7,80

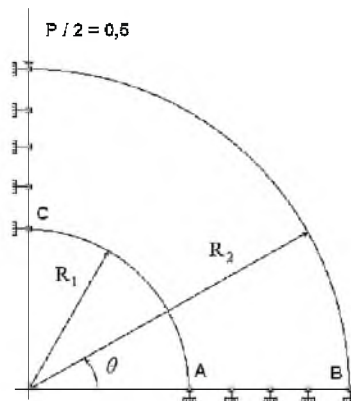


Рис. 3. Толстое кольцо, сжатое двумя сосредоточенными силами.

Отношение длины трещины  $a$  к ширине полосы  $W$  принимали равным  $\lambda = a/W = 0,25$ . Ввиду симметрии задачи расчет выполнен для четверти пластины при условии плоского напряженного состояния. Коэффициент Пуассона задавали равным 0,25. Результаты расчетов представлены в табл. 4. Там же приведены разбиения по ширине полосы  $W$  и вдоль трещины длиной  $a$ . Из данных табл. 4 видно, что при сгущении сетки эффективность ММСГ по сравнению с КМСГ возрастает.

*Чистый изгиб с краевой трещиной.* Рассматривали задачу о поперечном изгибе бруса длиной  $L = 4$  и высотой  $H = 1$  с симметрично расположенной вертикальной трещиной  $a = 0,4$ , выходящей на поверхность. Коэффициент Пуассона принимали равным 0,25. Ввиду симметрии задачи исследовали

половину бруса. К торцу прикладывали осевую нагрузку, распределенную по линейному закону  $q = 2x_2/H$ , действие которой эквивалентно изгибающему моменту  $M = H^2/6$  (рис. 5). Результаты расчетов представлены в табл. 5. Там же приведены разбиения по высоте бруса  $H$  и вдоль трещины длиной  $a$ . Из данных табл. 5 видно, что при сгущении сетки ММСГ по сравнению с КМСГ обеспечивает более высокую скорость сходимости.

Т а б л и ц а 4

Количество итераций при решении задачи о растяжении полосы с центральной трещиной

Разбиение	$N$	КМСГ	ММСГ	Коэффициент ускорения
12, 3	1226	225	61	3,69
24, 6	4754	449	99	4,54
36, 9	10586	671	132	5,08
48, 12	18722	893	162	5,51
60, 15	29162	1114	190	5,86
72, 18	41906	1335	216	6,18
84, 21	56954	1555	242	6,42
96, 24	74692	1778	265	6,71
108, 27	93962	1992	289	6,89
120, 30	115922	2210	309	7,15
132, 33	140186	2427	328	7,40
144, 36	166754	2646	351	7,54

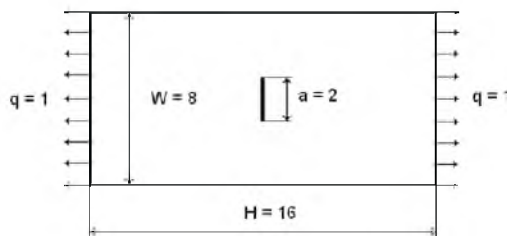


Рис. 4. Задача о растяжении полосы с центральной трещиной.

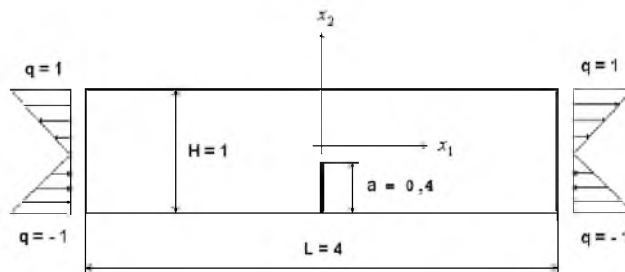


Рис. 5. Чистый изгиб бруса с краевой трещиной.

Т а б л и ц а 5

## Количество итераций при решении задачи о чистом изгибе бруса с краевой трещиной

Разбиение	$N$	КМСГ	ММСГ	Коэффициент ускорения
10, 4	862	246	75	3,28
20, 8	3322	496	123	4,03
30, 12	7382	744	166	4,48
40, 16	13042	992	205	4,84
60, 24	29162	1486	279	5,33
80, 32	51682	1978	346	5,72
100, 40	80602	2469	409	6,04
120, 48	115922	2960	467	6,34
140, 56	157642	3447	524	6,58
160, 64	205762	3935	579	6,80
180, 72	260282	4422	631	7,01
200, 80	321202	4907	684	7,17

**Заключение.** Приведенные выше тестовые примеры и опыт решения практических задач механики деформируемого тела методом конечных элементов свидетельствуют об эффективности применения модифицированного алгоритма метода сопряженных градиентов с переобуславливающей матрицей, построенной по схеме симметричной верхней релаксации, по сравнению с классическим алгоритмом метода сопряженных градиентов. Существенное ускорение итерационного процесса обычно наблюдается при решении задач об изгибе и концентрации напряжений, а также при сгущении сетки конечных элементов.

**Резюме**

Для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь методом скінченних елементів розглядається узагальнений метод спряжених градієнтів із переобумовлюваною матрицею, що побудована за допомогою матриці переходу для методу симетричної верхньої релаксації. Показано можливість двократного прискорення ітераційного алгоритму. Наведено чисельні результати аналізу швидкості збіжності ітераційного процесу при розв'язанні двовимірних модельних задач теорії пружності та лінійної механіки руйнування з використанням класичного і модифікованого алгоритму методу спряжених градієнтів із переобумовлюваною матрицею методу симетричної верхньої релаксації.

1. *Meurant G.* Computer Solution of Large Linear Systems. – Amsterdam; Lausanne; New York; Oxford; Shannon; Singapore; Tokyo, 1999. – 753 p.
2. *Джордж А., Лю Дж.* Численное решение больших разреженных систем уравнений. – М.: Мир, 1984. – 333 с.

3. Писсанецки С. Технология разреженных матриц. – М.: Мир, 1988. – 411 с.
4. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. – М.: Мир, 1986. – 446 с.
5. Hestens M. and Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear system // Nat. Bur. Std. J. Res. – 1952. – **49**. – P. 409 – 436.
6. Reid J. K. On the method of conjugate gradients for the solution of large sparse systems of linear equations // Large Sparse Sets Linear Equations. – London; New York; Academic Press, 1971. – P. 231 – 252.
7. Young D. M. On the accelerated SSOR method for solving large linear systems // Adv. Math. – 1977. – **23**. – P. 215 – 271.
8. Axelsson O. A class of iterative methods for finite element equations // Com. Meth. Appl. Mech. Eng. – 1976. – **9**. – P. 123 – 137.
9. Evans D. J. The use of preconditioning in iterative method for solving linear equations with symmetric positive definite matrices // J. Inst. Math. Appl. – 1967. – **4**. – P. 295 – 314.
10. Cuthill E. and McKee J. Reducing the bandwidth of sparse symmetric matrices // Proc. 24th Nat. Conf. Assoc. Comput. Mach. ACM Publ. – 1969. – P. 157 – 172.
11. Zienkiewicz O. C. and Taylor R. L. The Finite Element Method. – Oxford; Auckland; Boston; Johannesburg; Melbourne; New Delhi: Butterworth-Heinemann, 2000. – 1482 p.

Поступила 17. 01. 2005