

Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщение 3. Верхняя и нижняя оценки времени начала разрушения неравномерно нагретых элементов конструкций

А. Ф. Никитенко, И. В. Любашевская

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Для произвольного тела (элемента конструкции), нагруженного стационарными внешними температурно-силовыми воздействиями, с помощью кинетической теории ползучести Работнова получены нижняя и верхняя оценки времени начала разрушения, которые сопоставлены с используемыми в расчетной практике. В качестве примера рассмотрены соответствующие результаты применительно к толстостенной неравномерно нагретой трубе, нагруженной внутренним давлением.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, начало разрушения, нижняя и верхняя оценки времени начала разрушения.

При проектировании элементов конструкций, работающих в области высоких температур, должны выполняться следующие требования [1, 2]. Во-первых, за время эксплуатации данный элемент не должен разрушиться и, во-вторых, за это время перемещения соответствующих частей поверхности или отдельных точек проектируемого элемента не должны превышать некоторую наперед заданную величину. Очевидно, что первое требование эквивалентно расчету на прочность, второе – расчету на жесткость (требования, связанные с расчетами на релаксацию и устойчивость, пока не рассматриваются).

Оценка времени начала разрушения элемента конструкции, или полного времени разрушения, если учитывать процесс распространения фронта разрушения, является в общем случае достаточно трудоемкой. В связи с этим разработка методов получения нижней и верхней оценок времени начала разрушения элементов конструкций представляется актуальной задачей. Первые попытки ее решения на основе кинетической теории ползучести предпринимались в [3, 4].

В данной работе такие оценки получены для произвольного неравномерно нагретого тела и сопоставлены с аналогичными оценками, которые используются в настоящее время на практике. Применительно к толстостенной неравномерно нагретой трубе, нагруженной внутренним давлением, эти оценки сравниваются с расчетным временем начала разрушения.

Ранее [5] на примере расчета напряженно-деформированного состояния толстостенной неравномерно нагретой трубы показано, что эту задачу можно свести к аналогичной только в предположении установившейся ползучести материала. Методы решения таких задач хорошо развиты [1, 6, 7], поэтому в дальнейшем решение считается известным. Для получения более точного решения необходимо известное решение задачи установившейся ползучести умножить на соответствующие функции от $\mu(\rho, t)$ и $X(t)$. Для вычисления последних в [5] получена система уравнений (22), (23). Представим ее в виде

$$\int_1^{\mu} \psi(z) dz = -[(m+1)t^0]^{-1} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau; \quad (1)$$

$$\int_1^{\beta_1} [\varphi_1(\mu)]^{1/n} \rho^{-1-2/n_*} d\rho = J_1 X(t) \quad (2)$$

при

$$\psi(z) = z^{[mn-m_1(g+1)]/n}. \quad (3)$$

Соответствующие обозначения подробно описаны в [5].

Напомним, что уравнение (1) следует из кинетического уравнения для параметра повреждаемости $\mu(\rho, t)$, а уравнение (2) – есть уравнение равновесия. Придадим этому уравнению некоторую общность. С этой целью рассчитаем удельную мощность W^0 диссипируемой энергии трубы в предположении установившейся ползучести ее материала. Поскольку $W^0 = B_1(\sigma_i^0)^{n+1}$ [6, 7], то, как следует из [5], очевидно, что

$$W^0 = B_* \left(\frac{\sqrt{3} p}{2 J_1} \right)^{n+1} \rho^{-2-2/n_*} = N \rho^{-2-2/n_*}, \quad 1 \leq \rho = r/a \leq \beta_1.$$

Мощность диссипируемой энергии всей трубы будет

$$\int_V W^0 dV = 2\pi l a^2 N \int_1^{\beta_1} \rho^{-1-2/n_*} d\rho = 2\pi l a^2 N J_1.$$

Умножая левую и правую части уравнения (2) на $2\pi a^2 l N$, где l – длина трубы, получаем окончательный результат:

$$\int_V [\varphi_1(\mu)]^{1/n} W^0 dV = X(t) \int_V W^0 dV. \quad (4)$$

Анализ уравнений (1), (4) позволяет заключить, что они справедливы не для какого-то конкретного элемента конструкции, а для произвольного тела объема V , ограниченного поверхностью S . При этом очевидно, что $\mu = \mu(x_k, t)$, $t^0 = t^0(x_k)$, $W^0 = W^0(x_k)$, где x_k – координаты точек тела.

Решение системы уравнений (1), (4) осуществляется следующим образом. Подставляя (3) в (1) и интегрируя, получаем

$$\mu^{m_1/n} = \left[1 - \frac{\bar{v}}{t^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} dt \right]^{\bar{\beta}}, \quad (5)$$

согласно [5]:

$$\bar{\beta} = \frac{m_1}{n + mn - m_1(g + 1)}; \quad \bar{\nu} = \frac{n + mn - m_1(g + 1)}{n(m + 1)}.$$

С учетом $\varphi_1(\mu) = \mu^{m_1}$ и (5) уравнение (4) примет вид

$$\int_V W^0 \left[1 - \frac{\bar{\nu}}{\bar{t}^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau \right]^{\bar{\beta}} dV = X \int_V W^0 dV. \quad (6)$$

При $\bar{\beta} = 1$ уравнение (6) имеет вид

$$1 - \frac{\bar{\nu}}{\bar{t}^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} d\tau = X(t)$$

и решение:

$$X(t) = (1 - t/\bar{t}^0)^{1/(g+2)}, \quad (7)$$

где \bar{t}^0 есть результат использования теоремы о среднем:

$$\int_V (W^0/\bar{t}^0) dV = (1/\bar{t}^0) \int_V W^0 dV. \quad (8)$$

Подставляя (7) в (5) и учитывая, что $\bar{\nu}(g + 2) = 1$ при $\bar{\beta} = 1$, получаем

$$\mu^{m_1/n} = 1 - \frac{\bar{t}^0}{t^0} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\bar{t}^0} \right)^{1/(g+2)} \right]. \quad (9)$$

Время начала разрушения вычисляем из условия достижения параметром μ в некоторой точке с координатами x_k^* своего критического значения, т.е. $\mu(x_k^*, t_*) = 0$. Из (9) следует

$$t_* = \bar{t}^0 \left[1 - (1 - t_*^0/\bar{t}^0)^{(g+2)} \right]. \quad (10)$$

На практике, как правило, $\bar{\beta} \neq 1$. В этом случае не представляет особого труда получить верхнюю и нижнюю оценки решения уравнения (6). Остановимся на этом вопросе более подробно.

Пусть для определенности $\bar{\beta} > 1$. Поскольку

$$1 - \frac{\bar{\nu}}{\bar{t}^0} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \leq 1,$$

$$\left(1 - \frac{\bar{\nu}}{\bar{t}^0} \int_0^t X^{-(g+1)} dt\right)^{\bar{\beta}} \leq \left(1 - \frac{\bar{\nu}}{\bar{t}^0} \int_0^t X^{-(g+1)} dt\right).$$

С учетом этого из (6) после несложных операций последовательно получим

$$X(t) \leq 1 - \frac{\bar{\nu}}{\bar{t}^0} \int_0^t [X(\tau)]^{-(g+1)} dt$$

и

$$X(t) \leq [1 - \bar{\nu}(g+2)t/\bar{t}^0]^{1/(g+2)}, \quad (11)$$

где \bar{t}^0 вычисляется согласно (8).

Из (5) с использованием (11) следует

$$\mu^{m_1/n} \leq \left\{1 - \frac{\bar{t}^0}{t} \left[1 - \left(1 - \bar{\nu}(g+2)\frac{t}{\bar{t}^0}\right)^{1/(g+2)}\right]\right\}^{\bar{\beta}}. \quad (12)$$

Учитывая, что $\mu(x_k^*, t_*) = 0$, из (12) получаем верхнюю оценку времени начала разрушения тела в точке с координатами x_k^* :

$$\frac{t_*}{\bar{t}^0} \leq \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} \frac{1}{\bar{\nu}(g+2)}, \quad \lambda = \frac{t_*}{\bar{t}^0}. \quad (13)$$

Для получения аналогичных оценок снизу поступим следующим образом. Возведем левую и правую части равенства (6) в степень $1/\bar{\beta}$ и умножим

результат на $\left(\int_V W^0 dV\right)^{(\bar{\beta}-1)/\bar{\beta}}$:

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_V \left[(W^0)^{1/\bar{\beta}} \left(1 - \frac{\bar{\nu}}{\bar{t}^0} \int_0^t X^{-(g+1)} dt\right) \right]^{\bar{\beta}} dV \right\}^{1/\bar{\beta}} \left\{ \int_V (W^0)^{(\bar{\beta}-1)/\bar{\beta}} dV \right\}^{(\bar{\beta}-1)/\bar{\beta}} = \\ & = X^{1/\bar{\beta}} \left(\int_V W^0 dV \right)^{1/\bar{\beta}} \left(\int_V W^0 dV \right)^{(\bar{\beta}-1)/\bar{\beta}}. \end{aligned}$$

Далее воспользуемся известным интегральным неравенством Гельдера:

$$\int_V (\varphi_1 \varphi_2) dV \leq \left(\int_V |\varphi_1|^p dV \right)^{1/p} \left(\int_V |\varphi_2|^{p/(p-1)} dV \right)^{(p-1)/p}, \quad p > 1,$$

в результате получим

$$\int_V W^0 \left(1 - \frac{\bar{v}}{\bar{t}^0} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \right) dV \leq X^{1/\bar{\beta}} \int_V W^0 dV$$

и затем после несложных операций –

$$1 - \frac{\bar{v}}{\bar{t}^0} \int_0^t X^{-(g+1)} d\tau \leq X^{1/\bar{\beta}}, \quad (14)$$

где, как и ранее, \bar{t}^0 вычисляется согласно (8).

Решением дифференциального неравенства (14) будет

$$X(t) \geq (1 - t/\bar{t}^0)^{\bar{\gamma}}, \quad \bar{\gamma} = \frac{m_1}{n(m+1)} \quad (15)$$

(при выводе (15) воспользовались очевидными связями между характеристиками материала: $\bar{\beta}\bar{v} = \bar{\gamma}$, $\bar{v}[\bar{\beta}(g+1) + 1] = 1$, $\bar{\beta}/[\bar{\beta}(g+1) + 1] = \bar{\gamma}$).

Подстановка (15) в (5) приводит к неравенству

$$\mu^{m_1/n} \geq \left\{ 1 - \frac{\bar{t}^0}{t} \left[1 - \left(1 - \frac{t}{\bar{t}^0} \right)^{\bar{\gamma}} \right] \right\}^{\bar{\beta}}, \quad (16)$$

из которого получим нижнюю оценку времени начала разрушения тела:

$$\frac{t_*}{t_*^0} \geq \frac{1 - (1 - \lambda)^{1/\bar{\gamma}}}{\lambda}, \quad \lambda = \frac{t_*^0}{\bar{t}^0}. \quad (17)$$

Если $\bar{\beta} = 1$, то очевидно, что верхняя (13) и нижняя (17) оценки совпадают между собой, а также с точным значением времени начала разрушения тела (элемента конструкции) (10). Полученные неравенства можно без нарушений общности усилить или ослабить; методика получения их не является единственной.

Учитывая (8), определение и методику вычисления t_*^0 [1, 8], получаем $\lambda \leq 1$ и

$$\frac{1 - (1 - \lambda)^{1/\bar{\gamma}}}{\lambda} \geq 1, \quad \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} \geq 1$$

Это позволяет из (16) получить

$$\frac{t_*}{t_*^0} \geq \frac{1 - (1 - \lambda)^{1/\bar{\gamma}}}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda} \geq 1.$$

С учетом $\lambda = t_*^0 / \bar{t}^0$ запишем

$$t_* \geq [1 - (1 - \lambda)^{1/\bar{\nu}}] \bar{t}^0 \geq \bar{t}^0 \geq t_*^0.$$

Последовательность этих неравенств можно продлить при учете условия предельного состояния тела, поскольку уравнение $B_2(\sigma_i^0)^{g+1} = [(m+1)t_{**}]^{-1}$ (см. (16) в [5]) обеспечивает равнопрочность тела вплоть до исчерпания его несущей способности. Внешние температурно-силовые воздействия, обеспечивающие безопасное состояние тела, удовлетворяют неравенству $B_2(\sigma_i^0)^{g+1} \leq [(m+1)t_{**}]^{-1}$. С учетом этого и методики вычисления t_*^0 [1, 8] получим $t_*^0 \geq t_{**}$, где t_{**} – время исчерпания несущей способности тела. Теперь окончательно можно записать последовательность неравенств в виде

$$t_* \geq [1 - (1 - \lambda)^{1/\bar{\nu}}] \bar{t}^0 \geq \bar{t}^0 \geq t_*^0 \geq t_{**}. \quad (18)$$

В расчетной практике для нижней оценки времени начала разрушения тела рекомендуется использовать величину t_*^0 [1, 2, 8]. В работе [9] отмечается: “... интуитивно ясно, что данная оценка, по-видимому, будет оценкой времени до разрушения снизу, хотя формально доказать такое утверждение нельзя”. Очевидно также, что из (18) следует доказательство как справедливости отмеченного утверждения, так и отсутствия преимуществ оценки $t_* \geq t_*^0$ по сравнению с оценками (17) и $t_* \geq \bar{t}^0$.

На основе (13) можно получить ряд неравенств. Неравенства

$$\frac{1}{\bar{\nu}(g+2)} \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} \geq \frac{1}{\bar{\nu}(g+2)} \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{\bar{\nu}(g+2)}$$

с учетом (13) приводят к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} t_* &\leq \frac{1}{\bar{\nu}(g+2)} \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} t_*^0; \\ &\frac{1}{\bar{\nu}(g+2)} \frac{1 - (1 - \lambda)^{g+2}}{\lambda} t_*^0 = \\ &= \frac{1}{\bar{\nu}(g+2)} [1 - (1 - \lambda)^{g+2}] \bar{t}^0 \geq \frac{\bar{t}^0}{\bar{\nu}(g+2)} \geq \frac{t_*^0}{\bar{\nu}(g+2)} \geq \frac{t_{**}}{\bar{\nu}(g+2)}. \end{aligned} \quad (19)$$

При $\bar{\beta} < 1$ с учетом вышеизложенного легко показать, что изменяются знаки неравенств как в (13), (17) на противоположные, так и в (18), (19).

Анализ последовательности неравенств (18), (19) и им аналогичных при $\bar{\beta} < 1$ свидетельствует, что особого внимания заслуживают следующие оценки времени начала разрушения тела (элемента конструкции):

$$\bar{t}^0 \leq t_* \leq \bar{t}^0 / \bar{\nu}(g+2), \quad \bar{\beta} > 1; \quad \bar{t}^0 / \bar{\nu}(g+2) \leq t_* \leq \bar{t}^0, \quad \bar{\beta} < 1. \quad (20)$$

Если $\bar{\beta} = 1$, то время начала разрушения t_* вычисляется из (10) и для него значение \bar{t}^0 будет верхней оценкой, причем, как показывают непосредственные расчеты, различие между t_* и \bar{t}^0 меньше 1%.

В случае если $m_1 = m$, все перечисленные выше неравенства сохраняются и совпадают с аналогичными [4] при замене $\bar{\beta}$ на β и $\bar{\nu}$ на ν , где $\beta = m[n - m(n - g - 1)]$, $\nu = [n + m(n - g - 1)] / n(m + 1)$ [5]. Интересно отметить, что согласно (20) нижняя оценка при $\beta > 1$ и верхняя оценка при $\beta < 1$ не зависят от $\bar{\beta}$.

В качестве примера на рис. 1 применительно к толстостенной неравномерно нагретой трубе приведены данные сопоставления согласно (20) расчетного времени $\tau = t/t_*^0$ с его верхней и нижней оценками для различных перепадов температуры $\Delta\theta = \theta(b) - \theta(a)$ по радиусу трубы и значений β как больших, так и меньших единицы. Характеристики материала при этом имели следующие значения: $n = 6$, $g = 4,75$ и $m_1 = m = 3$ ($\beta = 0,44$); $n = 6$, $g = 4,75$ и $m_1 = m = 11$ ($\beta = 1,25$). Численные значения остальных характеристик материала даны в [5].

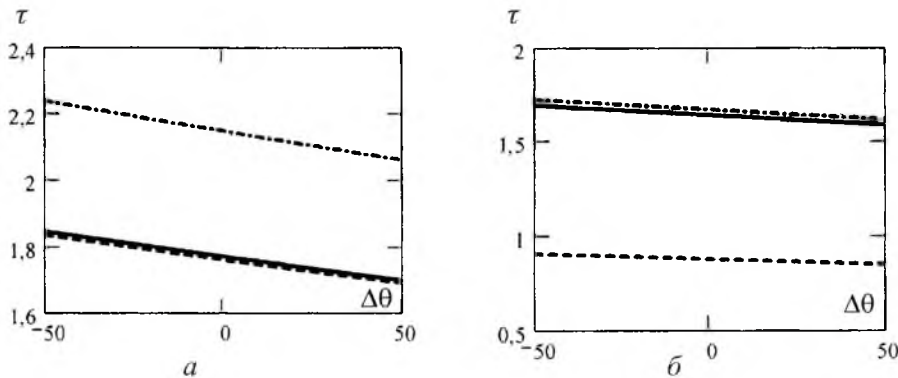


Рис. 1. Сопоставление приведенного расчетного времени (сплошные линии) с его верхней (штрихпунктирные линии) и нижней (штриховые линии) оценками для различных перепадов температуры по радиусу трубы: $p = \text{const}$ ($a - \beta = 0,44$; $b - \beta = 1,25$).

Видно, что расчетное время начала разрушения с погрешностью менее 1% совпадает с его нижней оценкой, если $\beta > 1$, или с верхней, если $\beta < 1$. Отметим, что известные аналогичные результаты, полученные Хейхерстом, Мартином, Лекки применительно к конкретным элементам конструкций (см., например, [10]), укладываются в рамки изложенного здесь исследования.

На рис. 2,а представлены зависимости приведенного расчетного времени от перепада температуры по радиусу трубы при различных значениях m_1 . При $m_1 \rightarrow 0$ приведенное время $\tau = t/t_*^0$ стремится к единице. Напомним, что t_*^0 есть время начала разрушения, получаемое из соответствующего

решения с использованием теории Качанова, согласно которой $m_1 = 0$ и, следовательно, $\tau = 1$. Из представленных графиков (рис. 1 и 2,а) следует, что приведенное время существенно отличается от единицы. Это говорит о том, что соответствующее решение Качанова приводит к неустраиваемому резерву по долговечности [5].

Данные на рис. 2,б свидетельствуют о существенной зависимости времени начала разрушения от перепада температуры по радиусу трубы. Расчетное время начала разрушения отнесено к аналогичному, соответствующему равномерно нагретой трубе, и это отношение практически не зависит от β . Характеристики материала следующие: $n = 6$, $g = 4,75$ и $m_1 = m = 3$ ($\beta = 0,44$); $n = 6$, $g = 6$ и $m_1 = m = 5$ ($\beta = 5$).

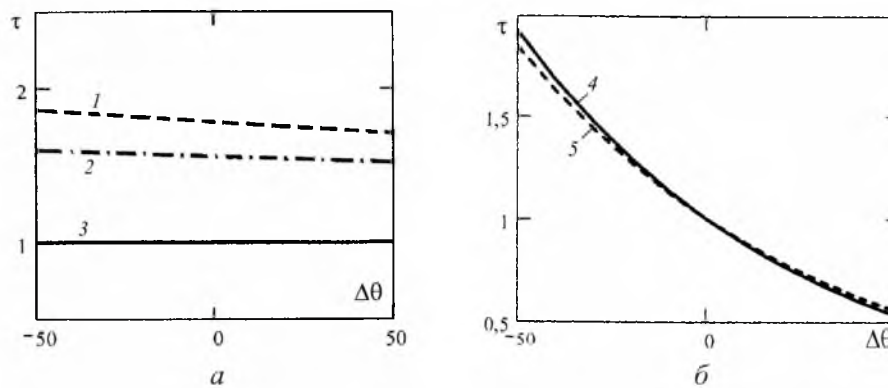


Рис. 2. Зависимость приведенного расчетного времени от перепада температуры по радиусу трубы при различных значениях m_1 (а) и β (б): 1 – $m_1 = 14$; 2 – $m_1 = 10$; 3 – $m_1 = 0$; 4 – $\beta = 5$; 5 – $\beta = 0,44$ ($p = \text{const}$).

Остановимся еще раз на оценках (20) с одновременным анализом соотношения (8), из которого следует, что напряженное состояние в точке с координатами \bar{x}_k тела является стационарным. Если провести одноосный эксперимент на длительную прочность (например, на растяжение) при напряжении, равном интенсивности напряжений в точке с координатами \bar{x}_k тела, и воспользоваться соотношениями (20), то даже на стадии проектирования будем располагать информацией о времени начала разрушения элемента конструкции, нагруженного известными внешними температурно-силовыми воздействиями. На основании вышеизложенного сформулируем однозначный вывод: нижнюю и верхнюю оценки (20) времени начала разрушения элементов конструкций необходимо использовать в расчетной практике.

Работа выполнена в рамках программы INTAS, грант № 03-51-6046.

Резюме

Для довільного тіла (елемента конструкції), що знаходиться під дією стаціонарного зовнішнього температурно-силового навантаження, за допомогою кінетичної теорії повзучості Работнова отримано нижню та верхню оцінки

часу початку руйнування, котрі зіставляються з такими, що використовуються в розрахунковій практиці. Як приклад розглянуто відповідні результати стосовно до товстостінної нерівномірно нагрітої труби, що знаходиться під дією внутрішнього тиску.

1. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.
2. *Работнов Ю. Н., Милейко С. Т.* Кратковременная ползучесть. – М.: Наука, 1970. – 222 с.
3. *Никитенко А. Ф.* О нижней в верхней оценках времени начала разрушения элементов конструкций // Изв. вузов. Стр-во. – 1999. – № 7. – С. 36 – 42.
4. *Никитенко А. Ф.* Нижняя и верхняя оценки времени начала разрушения элементов конструкций // Журн. прикл. механики и техн. физики. – 2001. – 42, № 1. – С. 164 – 169.
5. *Никитенко А. Ф.* Кинетическая теория ползучести и расчет элементов конструкций на длительную прочность. Сообщ. 1. Напряженно-деформированное состояние неравномерно нагретых толстостенных труб // Пробл. прочности. – 2005. – № 5. – С. 30 – 44.
6. *Качанов Л. М.* Теория ползучести. – М.: Физматгиз, 1960. – 456 с.
7. *Писаренко Г. С., Можаровский Н. С.* Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. Справочное пособие. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
8. *Работнов Ю. Н.* Влияние концентрации напряжений на длительную прочность // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1967. – № 3. – С. 36 – 41.
9. *Бойл Дж., Спенс Дж.* Анализ напряжений в конструкциях при ползучести / Пер. с англ. – М.: Мир, 1986. – 360 с.
10. *Хейхерст.* Определение времени до разрушения для вращающихся дисков в условиях ползучести с использованием уравнений повреждаемости при двухосном напряженном состоянии // Прикл. механика. – 1973. – № 4. – С. 88 – 95.

Поступила 06. 04. 2005