УДК 539.3

Анализ краевых задач, описывающих неизотермические процессы упругопластического деформирования с учетом истории нагружения

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассматриваются теория и приближенные методы решения краевых задач термопластичности в квазистатической постановке, когда процесс неизотермического упругопластического деформирования тела представляет собой последовательность равновесных состояний. В этом случае напряженно-деформированное состояние зависит от истории нагружения, и процесс неупругого деформирования должен прослеживаться на всем исследуемом интервале времени. Краевая задача сформулирована в виде нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Определены условия, обеспечивающие существование, единственность и непрерывную зависимость обобщенного решения от приложенных нагрузок и начальных деформаций. Исследована сходимость методов упругих решений и переменных параметров упругости для решения краевых задач, описывающих неизотермические процессы активного нагружения с учетом начальных деформаций, зависящих от истории деформирования и нагрева.

Ключевые слова: теория пластичности, девиаторы напряжений и деформаций, неизотермические процессы, упругопластическое деформирование, простое нагружение, термомеханическая поверхность, краевая задача, итерационные методы, сходимость, точность.

Введение. При исследовании неизотермических процессов упругопластического деформирования компоненты напряжений, деформаций и перемещений на каждом этапе нагружения определяются путем решения системы нелинейных уравнений относительно приращений искомых величин за этап нагружения. Для решения нелинейной краевой задачи, сформулированной в приращениях, применяются приближенные методы, с помощью которых задача термопластичности на каждом этапе нагружения сводится к последовательному решению вспомогательных линейных задач. При этом на каждом этапе нагружения необходимо контролировать точность удовлетворения разрешающих уравнений для полных значений напряжений, деформаций и перемещений, поскольку краевая задача решается приближенно для приращений этих величин и, значит, при их сложении может накапливаться погрешность [1]. Кроме того, использование определяющих соотношений в приращениях предполагает большую степень гладкости аппроксимирующих функций для диаграмм деформирования, так как для устойчивости вычислительного процесса требуется обеспечить непрерывность касательных модулей. Следует также учитывать, что при формулировке краевой задачи в приращениях длительность этапа нагружения должна быть достаточно малой. Следовательно, применение численных методов для решения задачи в пространственной постановке может привести к неприемлемым вычислительным затратам.

Альтернативный подход состоит в том, чтобы проинтегрировать уравнения состояния за этап нагружения с целью получения системы разрешающих уравнений не в приращениях, а для полных компонентов напряжений, деформаций и перемещений [1, 2]. Это позволяет избежать трудностей, связанных с вычислением касательных модулей по диаграммам деформирования и накоплением ошибок при численном решении задачи в приращениях, что способствует устойчивости вычислительного процесса [1]. При этом длительность этапа нагружения может быть достаточно большой, если в пределах этапа деформирование всех точек тела происходит по траекториям, близким к прямолинейным. В тех случаях, когда траектория нагружения представляет собой составленную из прямолинейных отрезков ломаную линию, решение краевой задачи можно получить на укрупненных временных этапах, что существенно сокращает вычислительные затраты при численном моделировании.

Очевидно, что при разработке эффективных приближенных методов решения задач термопластичности необходимо располагать четкой информацией об условиях существования и свойствах точных решений рассматриваемой проблемы. Можно считать, что краевая задача поставлена корректно, если доказаны существование и единственность ее решения в определенном классе функций, установлена устойчивость решения по отношению к малым возмущениям начальных данных и его непрерывная зависимость от внешних воздействий в процессе нагружения.

В настоящей работе представлены результаты анализа краевой задачи термопластичности, описывающей процессы деформирования по траекториям, состоящим из прямолинейных или близких к ним отрезков ломаной линии. Основное внимание уделяется обобщенной постановке и исследованию сходимости приближенных методов решения краевой задачи.

Основные положения феноменологической модели. Пусть $\sigma(t) = (\sigma_{ij}(t))$ $(1 \le i, j \le 3)$ – тензор напряжений, представленный в виде двух составляющих: $\sigma(t) = \sigma_S(t) + \sigma_D(t), \sigma_S(t)$ – шаровой тензор; $\sigma_D(t)$ – девиатор напряжений. Тензор малых деформаций $\varepsilon(t) = (\varepsilon_{ij}(t))$ $(1 \le i, j \le 3)$ по аналогии с тензором напряжений допускает разложение вида: $\varepsilon(t) = \varepsilon_S(t) + \varepsilon_D(t)$, $\varepsilon_S(t)$ – шаровой тензор; $\varepsilon_D(t)$ – девиатор деформаций. Решение неизотермической упругопластической задачи базируется на следующих основных положениях.

Принимается, что изменение объема тела во всем интервале изменения напряжений и деформаций носит упругий характер, т.е. между $\sigma_S(t)$ и $\varepsilon_S(t)$ существует линейная зависимость:

$$\varepsilon_S(t) = \frac{1}{k_0(T(t))}\sigma_S(t) + \varepsilon_S^T(t), \tag{1}$$

где $k_0(T(t))$ – модуль всестороннего объемного расширения, зависящий от температуры $T(t)$; $\varepsilon_S^T(t)$ – тензор нестесненных термических деформаций.

Девиатор полных деформаций $\varepsilon_D(t)$ представим условно в виде суммы упругой $\varepsilon_D^e(t)$ и пластической $\varepsilon_D^p(t)$ составляющих:

$$\varepsilon_D(t) = \varepsilon_D^e(t) + \varepsilon_D^p(t). \tag{2}$$

Упругая составляющая девиатора деформаций определяется обобщенным законом Гука, который для изотропного тела можно представить в виде

$$\varepsilon_D^e(t) = \frac{1}{2G_0(T(t))}\sigma_D(t), \tag{3}$$

где $G_0(T(t))$ – начальный модуль сдвига, зависящий в общем случае от температуры.

С использованием соотношений (3) получаем

$$\overline{\sigma}(t) = 3G_0(T(t))\overline{\varepsilon}^e(t), \tag{4}$$

где $\overline{\sigma}(t)$, $\overline{\varepsilon}^e(t)$ – интенсивности девиаторов напряжений $\sigma_D(t)$ и деформаций $\varepsilon_D^e(t)$, определяемые соотношениями

$$\overline{\sigma}(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\,||\sigma_D(t)||; \qquad \overline{\varepsilon}^e(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,||\varepsilon_D^e(t)||. \tag{5}$$

Здесь и ниже используется скалярное произведение $(\cdot,\cdot)$, индуцированное сверткой соответствующих тензоров; $||\cdot||$ – норма, ассоциированная с этим скалярным произведением.

Пластическая составляющая девиатора деформаций определяется на основе закона пластического течения [3, 4], ассоциированного с поверхностью текучести Мизеса [3]:

$$d\varepsilon_D^p(t) = \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon}^p(t)}{\overline{\sigma}(t)}\sigma_D(t), \tag{6}$$

где $\overline{d\varepsilon}^p(t)$ – интенсивность приращений пластических деформаций,

$$\overline{d\varepsilon}^p(t) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,||d\varepsilon_D^p(t)||. \tag{7}$$

Отметим, что при рассмотрении процессов деформирования по траекториям малой кривизны уравнения (6) можно получить на основе постулата изотропии и принципа запаздывания, сформулированных А. А. Ильюшиным в работе [5] и экспериментально обоснованных для широких классов материалов при комнатной и повышенных температурах.

Таким образом, определяющие уравнения, описывающие неизотермические процессы упругопластического деформирования, состоят из условия упругого изменения объема (1) и соотношений (2), (3), (6), которые равносильны уравнениям состояния Прандля–Рейсса [6, 7], и имеют вид

$$d\varepsilon_D(t) = d\left(\frac{1}{2G_0(T(t))}\sigma_D(t)\right) + \frac{3}{2}\frac{\overline{d\varepsilon}^p(t)}{\overline{\sigma}(t)}\sigma_D(t). \qquad (8)$$

При использовании уравнений (8) весь процесс нагружения разбивается на временные этапы таким образом, чтобы моменты времени, разграничивающие этапы нагружения и разгрузки, по возможности совпадали с моментами времени изменения направления процесса деформирования от нагружения к разгрузке, и наоборот.

Проинтегрируем выражение (8) за этап нагружения. В результате в конце m-го этапа нагружения получим

$$\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D(t_{m-1}) = \frac{1}{2G_0(T(t_m))}\sigma_D(t_m) -$$

$$- \frac{1}{2G_0(T(t_{m-1}))}\sigma_D(t_{m-1}) + \frac{3}{2}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}\sigma_D(t)\frac{\overline{d\varepsilon}^p(t)}{\overline{\sigma}(t)}. \qquad (9)$$

С использованием соотношений (3) находим

$$\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^p(t_{m-1}) = \frac{1}{2G_0(T(t_m))}\sigma_D(t_m) + \frac{3}{2}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}\sigma_D(t)\frac{\overline{d\varepsilon}^p(t)}{\overline{\sigma}(t)}. \qquad (10)$$

Девиатор пластических деформаций $\varepsilon_D^p(t_m)$ в конце m-го этапа нагружения определяется с помощью соотношения

$$\varepsilon_D^p(t_m) = \frac{3}{2}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}\sigma_D(t)\frac{\overline{d\varepsilon}^p(t)}{\overline{\sigma}(t)} + \varepsilon_D^p(t_{m-1}). \qquad (11)$$

Обозначим через $\Delta_m\varepsilon_D^p$ – приращение пластических деформаций в конце m-го этапа нагружения:

$$\Delta_m\varepsilon_D^p = \varepsilon_D^p(t_m) - \varepsilon_D^p(t_{m-1}). \qquad (12)$$

Тогда согласно формулам (11) и (12) имеем

$$\Delta_m\varepsilon_D^p = \frac{3}{2}\int\limits_{t_{m-1}}^{t_m}\sigma_D(t)\frac{\overline{d\varepsilon}^p(t)}{\overline{\sigma}(t)}. \qquad (13)$$

Пусть $s = s(t)$ – длина дуги траектории пластических деформаций, определяемая выражением

$$s(t) = \int_0^t ||d\varepsilon_D^p(t')|| = \int_0^t ||\frac{d\varepsilon_D^p(t')}{dt'}|| dt'. \tag{14}$$

Предположим, что на этапе нагружения длина дуги траектории пластических деформаций монотонно увеличивается в процессе деформирования. Поскольку за время dt длина дуги $s = s(t)$ получает приращение

$$ds(t) = \frac{ds(t)}{dt} dt = ||d\varepsilon_D^p(t)|| > 0, \tag{15}$$

с учетом обозначений $s_{m-1} = s(t_{m-1})$ и $s_m = s(t_m)$ выражение (13) можно представить в следующем виде:

$$\Delta_m \varepsilon_D^p = \int_{s_{m-1}}^{s_m} \frac{\sigma_D(s)}{||\sigma_D(s)||} ds. \tag{16}$$

Проинтегрируем (16) с использованием формулы прямоугольников. В результате получим

$$\Delta_m \varepsilon_D^p \approx \frac{\sigma_D(s_m)}{||\sigma_D(s_m)||} \int_{s_{m-1}}^{s_m} ds. \tag{17}$$

Погрешность этой формулы удовлетворяет оценке

$$\left| \int_{s_{m-1}}^{s_m} \frac{\sigma_D(s)}{||\sigma_D(s)||} ds - \frac{\sigma_D(s_m)}{||\sigma_D(s_m)||} \int_{s_{m-1}}^{s_m} ds \right| \le \frac{1}{2} |s_m - s_{m-1}|^2 \max_{s_{m-1} \le s \le s_m} \left| \frac{d}{ds} \frac{\sigma_D(s)}{||\sigma_D(s)||} \right|. \tag{18}$$

Поскольку рассматриваются малые деформации справедлива оценка $|s_m - s_{m-1}|^2 << 1$. Кроме того, если в пределах этапа нагружения направляющий девиатор напряжений $\sigma_D(s)/||\sigma_D(s)||$ изменяется достаточно плавно относительно аргумента s, то применение формулы (17), по-видимому, не вносит большую погрешность.

Предположим, что на каждом этапе реализуется простое нагружение [5]. Учитывая, что при простом нагружении $\sigma_D(s)/||\sigma_D(s)|| = \text{const}$, выражение (13) принимает вид

$$\Delta_m \varepsilon_D^p = \frac{3}{2} \frac{\sigma_D(t_m)}{\overline{\sigma}(t_m)} \int_{t_{m-1}}^{t_m} d\overline{\varepsilon}^p(t). \tag{19}$$

В соответствии с (10), (19) получим

$$\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^p(t_{m-1}) = \frac{1}{2G(t_m)}\sigma_D(t_m); \tag{20}$$

$$\Delta_m \varepsilon_D^p = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{G(t_m)} - \frac{1}{G_0(T(t_m))}\right)\sigma_D(t_m), \tag{21}$$

где $G(t_m)$ – скалярная функция, определяемая выражением

$$\frac{1}{G(t_m)} = \frac{1}{G_0(T(t_m))} + \frac{3}{\overline{\sigma}(t_m)}\int_{t_{m-1}}^{t_m} \overline{d\varepsilon}^p(t). \tag{22}$$

На основании (12), (20), (21) запишем

$$\sigma_D(t_m) = 2G(t_m)(\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^p(t_{m-1})); \tag{23}$$

$$\varepsilon_D^p(t_m) = \varepsilon_D(t_m) - \frac{1}{2G_0(T(t_m))}\sigma_D(t_m). \tag{24}$$

Кроме того, с использованием соотношений (21) и (22) находим

$$\int_{t_{m-1}}^{t_m} \overline{d\varepsilon}^p(t) = \overline{\Delta_m \varepsilon}^p = \left(\frac{1}{G(t_m)} - \frac{1}{G_0(T(t_m))}\right)\frac{\overline{\sigma}(t_m)}{3}, \tag{25}$$

где $\overline{\Delta_m \varepsilon}^p$ – интенсивность девиатора приращений пластических деформаций в конце m-го этапа нагружения,

$$\overline{\Delta_m \varepsilon}^p = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\|\Delta_m \varepsilon_D^p\|. \tag{26}$$

Таким образом, определяющие соотношения, описывающие неизотермические простые процессы упругопластического деформирования, можно представить в следующем виде:

$$\sigma(t_m) = k_0(T(t_m))(\varepsilon_S(t_m) - \xi_S(t_m)) + 2G(t_m)(\varepsilon_D(t_m) - \xi_D(t_m)), \tag{27}$$

где $\xi(t_m) = (\xi_{ij}(t_m)), 1 \le i, j \le 3$ – тензор начальных деформаций, соответствующий шаровому тензору нестесненных термических деформаций $\varepsilon_S^T(t_m)$ и девиатору пластических деформаций $\varepsilon_D^p(t_{m-1})$,

$$\xi(t_m) = \varepsilon_S^T(t_m) + \varepsilon_D^p(t_{m-1}). \tag{28}$$

Пластические деформации в конце m-го этапа нагружения определяются на основании соотношений (24), которые с учетом уравнений (23) можно записать так:

$$\varepsilon_D^p(t_m) = \left(1 - \frac{G(t_m)}{G_0(T(t_m))}\right)(\varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^p(t_{m-1})) + \varepsilon_D^p(t_{m-1}). \tag{29}$$

Обозначим через $\varepsilon_D^a(t_m)$ девиатор активных деформаций, возникающих в элементе тела дополнительно к пластическим деформациям $\varepsilon_D^p(t_{m-1})$:

$$\varepsilon_D^a(t_m) = \varepsilon_D(t_m) - \varepsilon_D^p(t_{m-1}). \tag{30}$$

Тогда соотношения (23) и (29) можно представить в виде

$$\sigma_D(t_m) = 2G(t_m)\varepsilon_D^a(t_m); \tag{31}$$

$$\Delta_m \varepsilon_D^p = \left(1 - \frac{G(t_m)}{G_0(T(t_m))}\right)\varepsilon_D^a(t_m). \tag{32}$$

Подставляя компоненты девиатора напряжений (31) в выражение интенсивности напряжений (5), получаем

$$G(t_m) = \frac{\overline{\sigma}(t_m)}{3\overline{\varepsilon}^a(t_m)}, \tag{33}$$

где $\overline{\varepsilon}^a(t_m)$ – интенсивность девиатора активных деформаций $\varepsilon_D^a(t_m)$,

$$\overline{\varepsilon}^a(t_m) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,||\varepsilon_D^a(t_m)||. \tag{34}$$

С использованием соотношений (4), (25), (33) находим

$$\overline{\varepsilon}^e(t_m) = \frac{G(t_m)}{G_0(T(t_m))}\overline{\varepsilon}^a(t_m); \qquad \overline{\Delta_m \varepsilon^p} = \left(1 - \frac{G(t_m)}{G_0(T(t_m))}\right)\overline{\varepsilon}^a(t_m), \tag{35}$$

откуда следует

$$\overline{\varepsilon}^a(t_m) = \overline{\varepsilon}^e(t_m) + \overline{\Delta_m \varepsilon}^p. \tag{36}$$

Параметр Одквиста $q(t_m)$, характеризующий накопленную пластическую деформацию в конце m-го этапа нагружения, вычисляется по соотношениям

$$q(t_m)=\int_0^{t_m}\overline{d\varepsilon}^p=\int_0^{t_{m-1}}\overline{d\varepsilon}^p+\int_{t_{m-1}}^{t_m}\overline{d\varepsilon}^p=q(t_{m-1})+\overline{\Delta_m\varepsilon}^p=\sum_{k=1}^{m}\overline{\Delta_k\varepsilon}^p. \quad (37)$$

Уравнения (31), (33) характеризуются функциональной зависимостью

$$\overline{\sigma}=\Psi(\overline{\varepsilon}^a, T), \quad (38)$$

которая конкретизируется на основе уравнения мгновенной термомеханической поверхности:

$$\overline{\sigma}=f(\overline{\varepsilon}, T), \quad (39)$$

где под деформацией $\overline{\varepsilon}$ понимается только чисто силовая составляющая, т.е. полная деформация минус чисто тепловая. Предполагается, что функциональная зависимость (39) не зависит от гидростатического давления, вида девиатора напряжений и находится по данным испытаний на простое растяжение цилиндрических образцов.

Отметим, что функциональная зависимость (38) описывает упругопластическое деформирование материала с учетом упрочнения к началу этапа нагружения. Действительно, аргументом в данном уравнении является активная деформация, а именно: полная деформация минус начальная пластическая деформация. Следовательно, за меру упрочнения принимается величина накопленной пластической деформации к началу этапа нагружения. Другими словами, при повторном и последующих нагружениях уравнение (38) учитывает зависимость обобщенных кривых деформирования от величины накопленной пластической деформации. Исходя из этого представим функциональную зависимость (38) в более общем виде

$$\overline{\sigma}=\Psi(\overline{\varepsilon}^a, q, T), \quad (40)$$

где в качестве дополнительного аргумента q принимается параметр, характеризующий упрочнение материала к началу текущего этапа нагружения. При этом зависимость параметра упрочнения q от процесса деформирования отражает историю нагружения. Простейшее предположение о характере упрочнения состоит в том, что за меру упрочнения принимается величина накопленной пластической деформации, т.е. параметр Одквиста. При изотермических процессах уравнение (40) можно интерпретировать как поверхность деформирования с начальным упрочнением. При неизотермических процессах оно описывает множество термомеханических поверхностей в зависимости от величины упрочнения. Для фиксированных значений параметра упрочнения q уравнение (40) можно интерпретировать как мгновенную термомеханическую поверхность с начальным упрочнением.

Для конкретизации функциональной зависимости (40) используем уравнение термомеханической поверхности (39). При одноосном растяжении образца полная деформация $\bar{\varepsilon}$ связана с активной деформацией $\bar{\varepsilon}^a$ соотношением $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}^a + q$, где q – начальная пластическая деформация. Тогда с учетом линейной зависимости на упругом участке деформирования получим

$$\Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T) = \begin{cases} 3G_0(T)\bar{\varepsilon}^a, & \bar{\varepsilon}^a \le \bar{\varepsilon}_p(q, T); \\ f(\bar{\varepsilon}^a + q, T), & \bar{\varepsilon}^a > \bar{\varepsilon}_p(q, T), \end{cases} \tag{41}$$

где $\bar{\varepsilon}_p(q, T)$ – деформация, соответствующая мгновенному пределу пропорциональности $\bar{\sigma}_p(q, T)$, зависящему от накопленной пластической деформации q и температуры T.

Поскольку зависимость между $\bar{\sigma}_p(q, T)$ и $\bar{\varepsilon}_p(q, T)$ принимается линейной, получим уравнение для определения $\bar{\varepsilon}_p(q, T)$:

$$f(\bar{\varepsilon}_p(q, T) + q, T) = 3G_0(T)\bar{\varepsilon}_p(q, T). \tag{42}$$

При активном процессе нагружения из естественного недеформированного состояния в формулах (41) следует положить $\bar{\varepsilon}^a = \bar{\varepsilon}$ и $q = 0$. Кроме того, $\bar{\sigma}_p(0, T)$ и $\bar{\varepsilon}_p(0, T)$ – пределы пропорциональности, определяемые по уравнению термомеханической поверхности (39). Тогда с использованием соотношений (33) и (41) имеем

$$G(t_1) = \begin{cases} G_0(T(t_1)), & \bar{\varepsilon}(t_1) \le \bar{\varepsilon}_p(0, T(t_1)); \\ \dfrac{f(\bar{\varepsilon}(t_1), T(t_1))}{3\bar{\varepsilon}(t_1)}, & \bar{\varepsilon}(t_1) > \bar{\varepsilon}_p(0, T(t_1)), \end{cases} \tag{43}$$

причем значение $\bar{\varepsilon}_p(0, T(t_1))$ определяется выражением

$$\bar{\varepsilon}_p(0, T(t_1)) = \frac{\bar{\sigma}_p(0, T(t_1))}{3G_0(T(t_1))}. \tag{44}$$

При разгрузке и повторном нагружении имеем

$$G(t_m) = \begin{cases} G_0(T(t_m)), & \bar{\varepsilon}^a(t_m) \le \bar{\varepsilon}_p(t_m); \\ \dfrac{f(\bar{\varepsilon}^a(t_m) + q(t_{m-1}), T(t_m))}{3\bar{\varepsilon}^a(t_m)}, & \bar{\varepsilon}^a(t_m) > \bar{\varepsilon}_p(t_m), \end{cases} \tag{45}$$

где значение $\bar{\varepsilon}_p(t_m)$ является корнем уравнения

$$f(\bar{\varepsilon}_p(t_m) + q(t_{m-1}), T(t_m)) = 3G_0(T(t_m))\bar{\varepsilon}_p(t_m). \tag{46}$$

Допустим, что при фиксированной температуре $T(t_m)$ используется кусочно-линейная аппроксимация $f(\bar{\varepsilon}(t_m), T(t_m))$ в зависимости от деформаций $\bar{\varepsilon}(t_m)$. Для этого весь интервал изменения $\bar{\varepsilon}(t_m)$ разбивается на отрезки $[\bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m), \bar{\varepsilon}_n(t_m)]$ и в пределах каждого из них задается линейная интерполяция следующего вида:

$$f(\bar{\varepsilon}(t_m), T(t_m)) = f(\bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m), T(t_m)) + 3g_n(T(t_m))(\bar{\varepsilon}(t_m) - \bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m)), \qquad (47)$$

где $g_n(T(t_m))$ – линейный модуль упрочнения на отрезке $[\bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m), \bar{\varepsilon}_n(t_m)]$,

$$g_n(T(t_m)) = \frac{f(\bar{\varepsilon}_n(t_m), T(t_m)) - f(\bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m), T(t_m))}{3(\bar{\varepsilon}_n(t_m) - \bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m))}. \qquad (48)$$

На основании формул (46)–(48) получаем соотношения, с помощью которых определяется значение $\bar{\varepsilon}_p(t_m)$:

$$\bar{\varepsilon}_p(t_m) = \bar{\varepsilon}_*(t_m) - q(t_{m-1}); \qquad \bar{\varepsilon}_*(t_m) = \frac{\bar{\sigma}_*(t_m)}{3G_*(t_m)};$$
$$\bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m) \le \bar{\varepsilon}_*(t_m) \le \bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m), \qquad (49)$$

причем

$$\bar{\sigma}_*(t_m) = f(\bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m), T(t_m)) +$$
$$+ 3[G_0(T(t_m))q(t_{m-1}) - g_n(T(t_m))\bar{\varepsilon}_{n-1}(t_m)]; \qquad (50)$$
$$G_*(t_m) = G_0(T(t_m)) - g_n(T(t_m)).$$

При установившейся ползучести функциональную зависимость (40) приближенно можно определить с помощью диаграмм ползучести, полученных при фиксированных значениях напряжений и температуры, путем построения изохронных кривых ползучести [1, 8]:

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}, T(t), t). \qquad (51)$$

С использованием изохронных кривых ползучести (51) функциональную зависимость (40) представим в следующем виде:

$$\bar{\sigma} = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T(t), t), \qquad (52)$$

где под пластической (неупругой) деформацией следует понимать необратимую деформацию, включающую как деформацию ползучести, так и мгновенную пластическую деформацию. При этом в качестве параметра упрочнения q принимается величина накопленной необратимой деформации к началу этапа нагружения. Таким образом, решение вязкопластической задачи сводится к решению упругопластической задачи, когда обобщенные кривые деформирования материала зависят от величины накопленной необратимой деформации, времени и температуры [1, 8].

Обобщенная постановка краевой задачи. Пусть рассматриваемое тело занимает область $\Omega \subset R^3$ и имеет регулярную границу. Вектор-функции, описывающие перемещения точек тела $u(t)$, будем рассматривать как элементы функционального множества U. Множество допустимых тензор-функций для напряжений $\sigma(t)$, полных $\varepsilon(t)$ и начальных $\xi(t)$ деформаций обозначим через X. Полагаем, что U и X – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot;\cdot)_U$ и $(\cdot;\cdot)_X$ соответственно. Обозначим через U^* – пространство, сопряженное к U, и определим $\langle \rho(t), v \rangle$ как значение непрерывного линейного функционала $\rho(t) \in U^*$ на элементе $v \in U$. Тогда при исследовании неизотермических процессов упругопластического деформирования в квазистатической постановке обобщенная краевая задача может быть представлена следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} &(\varepsilon(t), \eta)_X = (Bu(t), \eta)_X, \qquad \forall \eta \in X; \\ &(\sigma(t), \chi)_X = (D(\varepsilon(t), \xi(t), t)(\varepsilon(t) - \xi(t)), \chi)_X, \qquad \forall \chi \in X; \\ &(\sigma(t), Bv)_X = \langle \rho(t), v \rangle, \qquad \forall v \in U, \end{aligned} \tag{53}$$

где B – непрерывный линейный дифференциальный оператор, действующий из пространства U в X, т.е. оператор вычисления малых деформаций по заданным перемещениям; D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями; $\rho(t) \in U^*$ – линейный функционал, ассоциируемый с работой приложенных к телу нагрузок на возможных перемещениях $v \in U$.

Оператор $D: X \to X$ определяется с помощью отображения

$$\eta(t), \zeta(t), \mu(t) \in X \to D((\eta(t), \zeta(t)), t)(\mu(t) - \zeta(t)) =$$

$$= k_0(T(t))(\mu_S(t) - \zeta_S(t)) + 2G(\bar{\varepsilon}^a(\eta(t), \zeta(t)), T(t), t)(\mu_D(t) - \zeta_D(t)), \tag{54}$$

где $G(\bar{\varepsilon}^a, T(t), t) = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, T(t), t)/3\bar{\varepsilon}^a$ – секущий модуль сдвига; $\bar{\varepsilon}^a$ – интенсивность девиатора активных деформаций;

$$\eta(t), \zeta(t) \to \bar{\varepsilon}^a(\eta(t), \zeta(t)) = \sqrt{\frac{2}{3}} \, ||\eta_D(t) - \zeta_D(t)||. \tag{55}$$

Для исследования условий существования и единственности решения краевой задачи представим систему уравнений (53) в форме одного нелинейного операторного уравнения относительно перемещений:

$$A(u(t), \xi(t), t) = \rho(t) \quad \text{в} \quad U^*, \qquad u(t) \in U, \tag{56}$$

где $A: U \to U^*$ – нелинейный оператор теории пластичности, определяемый с помощью отображения:

$$A(u(t), \xi(t), t): v \in U \to (\sigma(u(t), \xi(t), t), \varepsilon(v))_X =$$

$$= (D(Bu(t), \xi(t), t)(Bu(t) - \xi(t)), Bv)_X = \langle A(u(t), \xi(t), t), v \rangle. \quad (57)$$

Если оператор $A: U \to U^*$ обладает свойствами сильной монотонности и липшиц-непрерывности, т.е. существуют такие вещественные положительные числа m, M и M_1, что

$$\begin{cases} \langle A(v, \zeta) - A(w, \zeta), v - w \rangle \geq m \| v - w \|_U^2, & \forall v, w \in U; \\ \| A(v, \zeta) - A(w, \zeta) \|_{U^*} \leq M \| v - w \|_U, & \forall v, w \in U; \\ \| A(v, \zeta) - A(v, \chi) \|_{U^*} \leq M_1 \| \zeta - \chi \|_X, & \forall \zeta, \chi \in X, \end{cases} \quad (58)$$

то решение операторного уравнения (56) существует и единственно, а также непрерывно зависит от приложенных нагрузок $\rho(t) \in U^*$ и начальных деформаций $\xi(t) \in X$ [9].

Определим нелинейный оператор $\Phi: X \to X$ с помощью отображения

$$\Phi: \eta, \zeta \in X \to \Phi(\eta, \zeta) = D(\eta, \zeta)(\eta - \zeta), \quad (59)$$

которое произвольным элементам $\eta, \zeta \in X$ и оператору $\eta, \zeta \to D(\eta, \zeta)$ ставит в соответствие результат действия $D(\eta, \zeta)$ на $(\eta - \zeta)$, т.е. элемент $D(\eta, \zeta)(\eta - \zeta) \in X$.

Пусть отображение $\Phi: X \to X$ дифференцируемо по Фреше в каждой точке (η, ζ), т.е. существуют такие линейные операторы Φ'_ε и Φ'_ξ, что

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{\| \Phi(\eta + \mu, \zeta) - \Phi(\eta, \zeta) - \Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu \|_X}{\| \mu \|_X} = 0;$$
$$\lim_{\chi \to 0} \frac{\| \Phi(\eta, \zeta + \chi) - \Phi(\eta, \zeta) - \Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi \|_X}{\| \chi \|_X} = 0, \quad (60)$$

где $\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu = d\Phi((\eta, \zeta); (\mu, 0))$ – дифференциал Фреше отображения $\eta \to \Phi(\eta, \zeta)$ на приращении $(\mu, 0)$; $\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)$ – производная Фреше оператора Φ в точке (η, ζ); $\Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi = d\Phi((\eta, \zeta); (0, \chi))$ – дифференциал Фреше отображения $\zeta \to \Phi(\eta, \zeta)$ на приращении $(0, \chi)$; $\Phi'_\xi(\eta, \zeta)$ – производная Фреше оператора Φ в точке (η, ζ).

Лемма. Если $\Phi: X \to X$ – непрерывно дифференцируемое отображение и операторы $\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)$, $\Phi'_\xi(\eta, \zeta)$ удовлетворяют условиям

$$\exists\, m > 0: (\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X \geq m \| \mu \|_X^2, \quad \forall \eta, \zeta, \mu \in X; \quad (61)$$

$$\exists\, M > 0: \| \Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu \|_X \leq M \| \mu \|_X, \quad \forall \eta, \zeta, \mu \in X; \quad (62)$$

$$\exists\, M_1 > 0\colon \|\Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi\|_X \le M_1 \|\chi\|_X\,, \qquad \forall\, \eta, \zeta, \chi \in X, \tag{63}$$

то определяемый из соотношения (57) оператор $A: U \to U^*$ является сильно-монотонным и липшиц-непрерывным.

◀ Пусть $\eta = Bv$ и $\mu = Bw$ для любых $v, w \in U$. Тогда согласно (57) и (59) для произвольных $v, w \in U$ имеем

$$\left\langle A(v, \zeta) - A(w, \zeta),\, v - w \right\rangle = (\Phi(\eta, \zeta) - \Phi(\mu, \zeta), \eta - \mu)_X\,, \tag{64}$$

откуда с использованием формулы конечных приращений [10] и неравенства (61) получаем

$$\left\langle A(v, \zeta) - A(w, \zeta),\, v - w \right\rangle =$$

$$= \int_0^1 (\,\Phi'_\varepsilon(p\eta + (1-p)\mu, \zeta)(\eta - \mu), \eta - \mu)_X\, dp \ge$$

$$\ge m\|\eta - \mu\|_X^2 = m\|v - w\|_U^2\,, \qquad \forall\, v, w \in U, \qquad \forall\, \zeta \in X. \tag{65}$$

Кроме того, по определению нормы в пространстве U^* имеем

$$\|A(v, \zeta) - A(w, \zeta)\|_{U^*} = \sup_{h \in U} \frac{|\left\langle A(v, \zeta) - A(w, \zeta), h \right\rangle|}{\|h\|_U} =$$

$$= \sup_{h \in U} \frac{|(\Phi(\eta, \zeta) - \Phi(\mu, \zeta), Bh)_X|}{\|Bh\|_X}, \qquad \forall\, v, w \in U, \tag{66}$$

и, следовательно, на основании неравенства Коши–Буняковского–Шварца, формулы конечных приращений и неравенства (62) находим

$$\|A(v, \zeta) - A(w, \zeta)\|_{U^*} \le \|\Phi(\eta, \zeta) - \Phi(\mu, \zeta)\|_X =$$

$$= \int_0^1 \|\Phi'_\varepsilon(p\eta + (1-p)\mu, \zeta)(\eta - \mu)\|_X\, dp \le$$

$$\le M\|\eta - \mu\|_X = M\|v - w\|_U\,, \qquad \forall\, v, w \in U, \qquad \forall\, \zeta \in X. \tag{67}$$

С использованием формулы конечных приращений и неравенства (63) получаем

$$\|A(v, \zeta) - A(v, \chi)\|_{U^*} \le \|\Phi(\eta, \zeta) - \Phi(\eta, \chi)\|_X =$$

$$= \int_0^1 \|\Phi'_\xi(\eta, p\zeta + (1-p)\chi)(\zeta - \chi)\|_X\, dp \le$$

$$\leq M_1 \|\zeta - \chi\|_X, \qquad \forall v \in U, \qquad \forall \zeta, \chi \in X. \tag{68}$$

На основании неравенств (65), (67), (68) заключаем, что $A: U \to U^*$ – сильномонотонный и липшиц-непрерывный оператор, обладающий сильномонотонным и липшиц-непрерывным обратным оператором $A^{-1}: U^* \to U$. ▶

Для доказательства существования и единственности решения краевой задачи, сформулированной в виде нелинейного операторного уравнения (56), сделаем некоторые допущения относительно функциональной зависимости $\overline{\sigma} = f(\overline{\varepsilon}, T)$, описывающей мгновенную термомеханическую поверхность.

Полагаем, что при всех $\overline{\varepsilon}$ кроме, быть может, конечного числа изолированных точек функция $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\overline{\varepsilon})$, описывающая кривую деформирования материала, удовлетворяет условиям:

$$0 < \overline{g}_1 \leq \overline{g}(\overline{\varepsilon}) \leq G(\overline{\varepsilon}) \leq G_0 < \infty. \tag{69}$$

Неравенства (69) записаны для изотермических условий и допускают простую геометрическую интерпретацию. Для всех значений $\overline{\varepsilon}$ касательный модуль

$$\overline{g}(\overline{\varepsilon}) = \frac{1}{3}\frac{d\overline{\sigma}(\overline{\varepsilon})}{d\overline{\varepsilon}} \tag{70}$$

строго положителен и не превышает секущий модуль $G(\overline{\varepsilon}) = \overline{\sigma}(\overline{\varepsilon})/3\overline{\varepsilon}$, который, в свою очередь, не превышает начальный модуль сдвига G_0.

Если в функциональную зависимость $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\overline{\varepsilon})$ в качестве второго аргумента ввести температуру T, то получим уравнение мгновенной термомеханической поверхности $\overline{\sigma} = f(\overline{\varepsilon}, T)$. Для неизотермических процессов неравенства (69) можно представить в более общем виде:

$$0 < \min_T \overline{g}_1(T) \leq \overline{g}(\overline{\varepsilon}, T) \leq G(\overline{\varepsilon}, T) \leq \max_T G_0(T) < \infty. \tag{71}$$

Кроме того, уравнение $\Psi = \Psi(\overline{\varepsilon}^a, q, T)$, описывающее мгновенную термомеханическую поверхность с начальным упрочнением q, определяется соотношениями (41), и, значит, на основании неравенств (71) получаем

$$0 < \min_T \overline{g}_1(T) \leq \overline{g}(\overline{\varepsilon}^a, q, T) \leq G(\overline{\varepsilon}^a, q, T) \leq \max_T G_0(T) < \infty. \tag{72}$$

Рассматриваемое тело может быть неоднородным, а его упругие и пластические свойства могут зависеть от координат $x \in \Omega$. Полагаем, что функции $x \to \Psi(x, \overline{\varepsilon}^a, q, T)$, $q \to \Psi(x, \overline{\varepsilon}^a, q, T)$ и $T \to \Psi(x, \overline{\varepsilon}^a, q, T)$ – измеримы, а $x \to G(x, \overline{\varepsilon}^a, q, T)$ – измерима и ограничена на Ω при всех $\overline{\varepsilon}^a$, q, T. Во всех точках области Ω кроме, быть может, множества меры нуль функция $\overline{\varepsilon}^a \to \Psi(x, \overline{\varepsilon}^a, q, T)$ – непрерывна и имеет ограниченную частную производную $\partial\Psi(x, \overline{\varepsilon}^a, q, T)/\partial\overline{\varepsilon}^a$, удовлетворяющую условиям (72).

Теорема. Если уравнение $\Psi = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T)$, описывающее мгновенную термомеханическую поверхность с начальным упрочнением q, удовлетворяет условиям (74), то оператор $\Phi : X \to X$, определяемый соотношением (61), удовлетворяет условиям леммы, т.е. существуют такие вещественные числа m, M и M_1, при которых выполняются неравенства (61)–(63), причем

$$m = 2\,\mathrm{vrai}\min_{x\in\Omega}\min_{T}\bar{g}_1(x, T); \qquad M_1 = M = \mathrm{vrai}\max_{x\in\Omega}\max_{T} k_0(x, T). \quad (73)$$

◀ Сделанные выше предположения о свойствах функции $\Psi = \Psi(\bar{\varepsilon}^a, q, T)$ обеспечивают дифференцируемость по Фреше оператора $D(\eta, \zeta)$. Согласно (59) и правилам дифференцирования сложных отображений имеем

$$\begin{aligned} &d\Phi((\eta, \zeta); (\mu, 0)) = \Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu = \\ &= dD((\eta, \zeta); (\mu, 0))(\eta - \zeta) + D(\eta, \zeta)\mu, \quad \forall\, \eta, \zeta, \mu \in X; \\ &d\Phi((\eta, \zeta); (0, \chi)) = \Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi = \\ &= dD((\eta, \zeta); (0, \chi))(\eta - \zeta) - D(\eta, \zeta)\chi, \quad \forall\, \eta, \zeta, \chi \in X, \end{aligned} \quad (74)$$

где $dD((\eta, \zeta); (\mu, 0))$ – дифференциал Фреше отображения $\eta \to D(\eta, \zeta)$ в точке (η, ζ) на приращении $(\mu, 0)$; $dD((\eta, \zeta); (0, \chi))$ – дифференциал Фреше отображения $\zeta \to D(\eta, \zeta)$ на приращении $(0, \chi)$.

На основании (54) для произвольных η, ζ, μ, χ, $\lambda \in X$ имеем

$$\begin{aligned} dD((\eta, \zeta); (\mu, 0))\lambda &= 2\frac{dG(\bar{\varepsilon}^a)}{d\bar{\varepsilon}^a} d\bar{\varepsilon}^a((\eta, \zeta); (\mu, 0))\lambda_D; \\ dD((\eta, \zeta); (0, \chi))\lambda &= 2\frac{dG(\bar{\varepsilon}^a)}{d\bar{\varepsilon}^a} d\bar{\varepsilon}^a((\eta, \zeta); (0, \chi))\lambda_D, \end{aligned} \quad (75)$$

где $d\bar{\varepsilon}^a((\eta, \zeta); (\mu, 0))$ – дифференциал отображения $\eta \to \bar{\varepsilon}^a(\eta, \zeta)$ на приращении $(\mu, 0)$; $d\bar{\varepsilon}^a((\eta, \zeta); (0, \chi))$ – дифференциал Фреше отображения $\zeta \to \bar{\varepsilon}^a(\eta, \zeta)$ на приращении $(0, \chi)$.

С использованием соотношения (55) находим

$$\begin{aligned} d\bar{\varepsilon}^a((\eta, \zeta); (\mu, 0)) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{(\eta_D - \zeta_D, \mu_D)}{\|\eta_D - \zeta_D\|}; \\ d\bar{\varepsilon}^a((\eta, \zeta); (0, \chi)) &= \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{(\zeta_D - \eta_D, \chi_D)}{\|\eta_D - \zeta_D\|}, \end{aligned} \quad (76)$$

и, значит, выражения (75) можно представить в виде

$$
\begin{aligned}
&dD((\eta,\zeta);(\mu,0))\lambda = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{dG(\bar{\varepsilon}^a)}{d\bar{\varepsilon}^a}\frac{(\eta_D-\zeta_D,\mu_D)}{\|\eta_D-\zeta_D\|}\lambda_D;\\
&dD((\eta,\zeta);(0,\chi))\lambda = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{dG(\bar{\varepsilon}^a)}{d\bar{\varepsilon}^a}\frac{(\zeta_D-\eta_D,\chi_D)}{\|\eta_D-\zeta_D\|}\lambda_D.
\end{aligned}
\tag{77}
$$

Тогда с учетом равенств

$$
\frac{dG(\bar{\varepsilon}^a)}{d\bar{\varepsilon}^a} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}^a}\left(\frac{d\Psi(\bar{\varepsilon}^a)}{d\bar{\varepsilon}^a} - \frac{\Psi(\bar{\varepsilon}^a)}{\bar{\varepsilon}^a}\right) = \frac{\bar{g}(\bar{\varepsilon}^a) - G(\bar{\varepsilon}^a)}{\bar{\varepsilon}^a}
\tag{78}
$$

на основании формул (55), (74), (77) и (78) получим

$$
\begin{aligned}
&\Phi'_\varepsilon(\eta,\zeta)\mu = 2(\bar{g}-G)\frac{(\eta_D-\zeta_D,\mu_D)}{\|\eta_D-\zeta_D\|^2}(\eta_D-\zeta_D) + D(\eta,\zeta)\mu;\\
&\Phi'_\xi(\eta,\zeta)\chi = 2(G-\bar{g})\frac{(\eta_D-\zeta_D,\chi_D)}{\|\eta_D-\zeta_D\|^2}(\eta_D-\zeta_D) - D(\eta,\zeta)\chi.
\end{aligned}
\tag{79}
$$

Следовательно, для произвольных $\eta,\ \zeta,\ \mu,\ \chi,\ \lambda \in X$ имеем

$$
(\Phi'_\varepsilon(\eta,\zeta)\mu,\lambda) = 2(\bar{g}-G)\frac{(\eta_D-\zeta_D,\mu_D)(\eta_D-\zeta_D,\lambda_D)}{\|\eta_D-\zeta_D\|^2} +
$$

$$
+ k_0(\mu_S,\lambda_S) + 2G(\mu_D,\lambda_D);
\tag{80}
$$

$$
(\Phi'_\xi(\eta,\zeta)\chi,\lambda) = 2(G-\bar{g})\frac{(\eta_D-\zeta_D,\chi_D)(\eta_D-\zeta_D,\lambda_D)}{\|\eta_D-\zeta_D\|^2} -
$$

$$
- k_0(\chi_S,\lambda_S) - 2G(\chi_D,\lambda_D).
\tag{81}
$$

С использованием соотношений (80) и (81) получим

$$
\begin{aligned}
&(\Phi'_\varepsilon(\eta,\zeta)\mu,\lambda) = (\mu,\Phi'_\varepsilon(\eta,\zeta)\lambda), \quad \forall\, \eta,\zeta,\mu,\lambda \in X;\\
&(\Phi'_\xi(\eta,\zeta)\chi,\lambda) = (\chi,\Phi'_\xi(\eta,\zeta)\lambda), \quad \forall\, \eta,\zeta,\chi,\lambda \in X,
\end{aligned}
\tag{82}
$$

откуда следует, что $\Phi'_\varepsilon(\eta,\zeta)$ и $\Phi'_\xi(\eta,\zeta)$ – самосопряженные операторы при всех $\eta,\ \zeta \in X$.

На основании равенства (82) для произвольных $\eta,\ \zeta,\ \mu \in X$ находим

$$
(\Phi'_\varepsilon(\eta,\zeta)\mu,\mu) = 2(\bar{g}-G)\frac{(\eta_D-\zeta_D,\mu_D)^2}{\|\eta_D-\zeta_D\|^2} + k_0\|\mu_S\|^2 + 2G\|\mu_D\|^2.
\tag{83}
$$

В соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца, имеем

$$|(\eta_D - \zeta_D, \mu_D)| \leq ||\eta_D - \zeta_D|| \, ||\mu_D||. \tag{84}$$

Кроме того, согласно условиям (72) выполняется неравенство $\overline{g} - G \leq 0$, и, значит, с учетом (84) из равенства (83) следует

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu) \geq k_0 ||\mu_S||^2 + 2\overline{g}||\mu_D||^2 \geq 2\overline{g}||\mu||^2, \tag{85}$$

что приводит к неравенству (61) с постоянной $m = 2 \operatorname{vrai}\min\limits_{x\in\Omega} \min\limits_{T} \overline{g}_1(x, T)$.

Для доказательства неравенства (62) заметим, что оператор $\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)$ самосопряжен и положителен при всех η, $\zeta \in X$ и, следовательно, его норма определяется выражением

$$||\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)||_X = \sup_{\mu\in X} \frac{(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X}{||\mu||_X^2}. \tag{86}$$

С использованием равенства (83) для произвольных η, ζ, $\mu \in X$ получим

$$(\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu) \leq k_0 ||\mu_S||^2 + 2G||\mu_D||^2 \leq k_0 ||\mu||^2, \tag{87}$$

что приводит к неравенству (62) с постоянной $M = \operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega} \max\limits_{T} k_0(x, T)$.

Для доказательства неравенства (63) заметим, что оператор $\Phi'_\xi(\eta, \zeta)$ самосопряжен, но неположителен и, значит, его норма определяется выражением

$$||\Phi'_\xi(\eta, \zeta)||_X = \sup_{\chi\in X} \frac{|(\Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi, \chi)_X|}{||\chi||_X^2}. \tag{88}$$

На основании равенства (81) для произвольных η, ζ, $\chi \in X$ находим

$$(\Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi, \chi) = 2(G - \overline{g})\frac{(\eta_D - \zeta_D, \chi_D)^2}{||\eta_D - \zeta_D||^2} - k_0 ||\chi_S||^2 - 2G||\chi_D||^2, \tag{89}$$

откуда с использованием неравенства $G - \overline{g} \geq 0$ получим

$$|(\Phi'_\xi(\eta, \zeta)\chi, \chi)_X| \leq k_0 ||\chi_S||^2 + 2G||\chi_D||^2 \leq k_0 ||\chi||^2, \tag{90}$$

что приводит к неравенству (63) с постоянной $M_1 = M$. ▶

Следствие. Из свойств оператора Φ: $X \to X$, установленных теоремой, результатов леммы и общих данных о сильномонотонных и липшиц-непрерывных операторах $A: U \to U^*$ следует однозначная разрешимость операторного уравнения (56), а также непрерывная зависимость обобщенного решения $u(t)$ от приложенных нагрузок $\rho(t) \in U^*$ и начальных деформаций $\xi(t) \in X$.

Итерационные методы решения краевых задач термопластичности. Рассмотрим обобщенный метод упругих решений [11], в котором решение $u \in U$ на каждом этапе нагружения строится как предел последовательности $\{u^k\}_{k=1}^{\infty} \in U$ решений вспомогательных линейных задач. С этой целью введем в рассмотрение линейный самосопряженный положительно определенный ограниченный оператор Q, действующий в пространстве X. Тогда существуют два вещественных положительных числа q_1, q_2 такие, что

$$q_1 ||\mu||_X^2 \le (Q\mu, \mu)_X \le q_2 ||\mu||_X^2, \qquad \forall \mu \in X, \tag{91}$$

и, значит, оператор $Q: X \to X$ можно использовать для построения скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_Q$ и нормы $||\cdot||_Q$ в пространстве X, эквивалентной основной норме этого пространства, т.е. норме $||\cdot||_X$:

$$(\eta, \mu)_Q = (Q\eta, \mu)_X, \qquad ||\eta||_Q = (\eta, \eta)_Q^{1/2}, \qquad \forall \eta, \mu \in X. \tag{92}$$

В методе упругих решений последовательность линейных приближений $\{u^k\}_{k=1}^{\infty} \in U$ строится в виде следующей итерационной процедуры:

$$(Bu^{k+1}, Bv)_Q = (Bu^k, Bv)_Q - \alpha[(\Phi(Bu^k, \xi), Bv)_X - \rho(v)], \quad \forall v \in U, \tag{93}$$

где $\alpha > 0$ – числовой параметр, вводимый для управления сходимостью, который может изменяться от итерации к итерации.

При сопоставлении уравнений (56) и (93) получим

$$(Bu^{k+1} - Bu, Bv)_Q = (Bu^k - Bu, Bv)_Q -$$

$$- \alpha (Q^{-1}[\Phi(Bu^k, \xi) - \Phi(Bu, \xi)], Bv)_Q, \qquad \forall v \in U, \tag{94}$$

откуда при $v = u^{k+1} - u \in U$ следует

$$||Bu^{k+1} - Bu||_Q \le ||Bu^k - Bu - \alpha Q^{-1}[\Phi(Bu^k, \xi) - \Phi(Bu, \xi)]||_Q. \tag{95}$$

Иначе, последнее неравенство можно записать так:

$$||\varepsilon^{k+1} - \varepsilon||_Q \le ||\varepsilon^k - \varepsilon - \alpha Q^{-1}[\Phi(\varepsilon^k, \xi) - \Phi(\varepsilon, \xi)]||_Q. \tag{96}$$

Введем в рассмотрение нелинейный оператор $T_\alpha(\eta, \xi)$, действующий в пространстве X и определяемый с помощью отображения:

$$\eta, \xi \in X \to T_\alpha(\eta, \xi) = \eta - \alpha Q^{-1} \Phi(\eta, \xi). \tag{97}$$

Тогда с использованием формулы конечных приращений неравенство (96) преобразуется следующим образом:

$$||\varepsilon^{k+1} - \varepsilon||_Q \le \sup_{\eta \in X} ||T'_\alpha(\eta, \xi)||_Q \, ||\varepsilon^k - \varepsilon||_Q \,, \tag{98}$$

где $T'_\alpha(\eta, \xi)$ – значение производной оператора T_α в точке (η, ξ). С учетом того что Q – линейный оператор, получим

$$\mu \in X \to T'_\alpha(\eta, \xi)\mu = \mu - \alpha Q^{-1} \Phi'_\varepsilon(\eta, \xi)\mu, \tag{99}$$

и, следовательно, для произвольных μ, $\chi \in X$ выполняется соотношение

$$(T'_\alpha(\eta, \xi)\mu, \chi)_Q = (Q\mu, \chi)_X - \alpha(\Phi'_\varepsilon(\eta, \xi)\mu, \chi)_X. \tag{100}$$

Выражение в правой части (100) симметрично относительно μ, $\chi \in X$, т.е.

$$(T'_\alpha(\eta, \xi)\mu, \chi)_Q = (\mu, T'_\alpha(\eta, \xi)\chi)_Q, \tag{101}$$

и, значит, $T'_\alpha(\eta, \xi)$ – самосопряженный оператор при всех $\eta, \xi \in X$ относительно скалярного произведения $(\cdot;\cdot)_Q$. Норма оператора $T'_\alpha(\eta, \xi)$ определяется выражением

$$||T'_\alpha(\eta, \xi)||_Q = \sup_{\mu \in X} \frac{|(T'_\alpha(\eta, \xi)\mu, \mu)_Q|}{||\mu||_Q^2}. \tag{102}$$

С использованием соотношений (92), (100) и (102) получаем

$$||T'_\alpha(\eta, \xi)||_Q = \sup_{\mu \in X} \left| 1 - \alpha \frac{(\Phi'_\varepsilon(\eta, \xi)\mu, \mu)_X}{(Q\mu, \mu)_X} \right|. \tag{103}$$

Полагаем, что существуют такие вещественные положительные числа γ_{01} и γ_{02}, при которых для любых η, ζ, $\mu \in X$ выполняются неравенства

$$\gamma_{01}(Q\mu, \mu)_X \le (\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X \le \gamma_{02}(Q\mu, \mu)_X. \tag{104}$$

Если для оценки (103) использовать неравенства (104), то получим

$$\sup_{\eta \in X} ||T'_\alpha(\eta, \xi)||_Q \le q(\alpha) = \max(|1 - \alpha\gamma_{01}|, |1 - \alpha\gamma_{02}|), \tag{105}$$

и, следовательно, условие $0<\alpha<2/\gamma_{02}$ обеспечивает сходимость метода упругих решений при любом начальном приближении $u^0 \in U$.

Оптимальное значение α_{opt} является решением уравнения

$$1-\alpha_{opt}\gamma_{01}=\alpha_{opt}\gamma_{02}-1 \tag{106}$$

и вычисляется по формуле

$$\alpha_{opt}=\frac{2}{\gamma_{02}+\gamma_{01}}. \tag{107}$$

Подставляя значение α_{opt} в (105), получаем

$$\sup_{\eta\in X}||T'_{\alpha_{opt}}(\eta,\xi)||_Q \le q(\alpha_{opt})=\frac{\gamma_{02}-\gamma_{01}}{\gamma_{02}+\gamma_{01}}<1. \tag{108}$$

Таким образом, приходим к неравенствам, с помощью которых можно оценить максимальную скорость сходимости итерационного процесса:

$$||\varepsilon^k-\varepsilon||_Q \le q(\alpha_{opt})||\varepsilon^{k-1}-\varepsilon||_Q \le q^k(\alpha_{opt})||\varepsilon^0-\varepsilon||_Q. \tag{109}$$

На основании неравенств (91) и (109) имеем оценку, характеризующую максимальную скорость сходимости итерационного процесса для деформаций:

$$||\varepsilon^k-\varepsilon||_X \le \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\,q^k(\alpha_{opt})\,||\varepsilon^0-\varepsilon||_X. \tag{110}$$

Аналогичную оценку можно получить для напряжений. Действительно, с учетом неравенств (61) и (62) находим

$$m||\varepsilon^k-\varepsilon||_X \le ||\sigma^k-\sigma||_X \le M||\varepsilon^k-\varepsilon||_X, \tag{111}$$

и, следовательно, на основании неравенств (110), (111) получаем оптимальную оценку скорости сходимости для напряжений:

$$||\sigma^k-\sigma||_X \le \frac{M}{m}\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\,q^k(\alpha_{opt})\,||\sigma^0-\sigma||_X. \tag{112}$$

Неравенства (110) и (112) позволяют установить сходимость метода упругих решений независимо от выбора начального приближения со скоростью геометрической прогрессии.

Впервые сходимость метода для изотермических процессов активного нагружения была доказана в [12], для неизотермических – в [13], однако без учета начальных деформаций, зависящих от процесса деформирования.

Замечание. Пусть $Q = D_0$, где D_0 – линейный оператор, соответствующий модулям упругости $k_0(x, T)$ и $G_0(x, T)$. Тогда для метода упругих решений имеют место априорные оценки:

$$\begin{cases} q_1 = 2\operatorname{vrai}\min\limits_{x\in\Omega}\min\limits_{T} G_0(x, T) > 0; \\ q_2 = \operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega}\max\limits_{T} k_0(x, T) < \infty; \\ \gamma_{01} = \operatorname{vrai}\min\limits_{x\in\Omega}\min\limits_{T} \dfrac{\bar{g}_1(x, T)}{G_0(x, T)} > 0; \\ \gamma_{02} = 1. \end{cases} \tag{113}$$

Рассмотрим другой, не менее распространенный метод решения упругопластических задач с помощью последовательных приближений, а именно: метод переменных параметров упругости [14], обладающий более высокой скоростью сходимости по сравнению с методом упругих решений. Сходимость этого метода была доказана в [15, 16] при ограничительном предположении об относительном изменении секущего модуля сдвига материала. Доказательство и оценка сходимости метода переменных параметров упругости при менее жестких ограничениях получены в [17], однако без учета начальных деформаций, зависящих от процесса деформирования.

В обобщенном методе переменных параметров упругости последовательность линейных приближений $\{u^k\}_{k=1}^{\infty} \in U$ строится на каждом этапе нагружения в виде следующей итерационной процедуры:

$$(D(Bu^k, \xi)Bu^{k+1}, Bv)_X = (D(Bu^k, \xi)Bu^k, Bv)_X -$$

$$-\alpha[(\Phi(Bu^k, \xi), Bv)_X - \rho(v)], \qquad \forall\, v \in U, \tag{114}$$

где $\alpha > 0$ – числовой параметр, вводимый для управления сходимостью, который может изменяться в процессе итераций.

Итерационный процесс (114) можно трактовать как метод поправок:

$$\begin{gathered} (D(Bu^k, \xi)B\omega^k, Bv)_X = (\Phi(Bu^k, \xi), Bv)_X - \rho(v), \qquad \forall\, v \in U, \\ u^{k+1} = u^k - \alpha\omega^k, \end{gathered} \tag{115}$$

где $\omega^k \in U$ – поправка для $(k+1)$-й инерации.

При рассмотрении сходимости метода переменных параметров упругости представим итерационный процесс (115) в форме операторного уравнения относительно перемещений. С этой целью запишем уравнение для поправки:

$$\Lambda(u^k, \xi)\omega^k = A(u^k, \xi) - \rho \qquad \text{в} \qquad U^*, \tag{116}$$

где Λ: $U \to U^*$ – нелинейный оператор, определяемый отображением

$$\Lambda(u,\xi)v: w\in U \to (D(Bu,\xi)Bv, Bw)_X, \qquad \forall\, v\in U. \tag{117}$$

С учетом свойств оператора $D: X\to X$ заключаем, что $\Lambda: U\to U^*$ – симметричный коэрцитивный ограниченный оператор, обладающий ограниченным коэрцитивным обратным оператором $\Lambda^{-1}: U^*\to U$, и, значит, выражение для поправки $\omega^k \in U$ можно представить в виде

$$\omega^k = (\Lambda(u^k,\xi))^{-1}(A(u^k,\xi)-\rho). \tag{118}$$

Таким образом, получаем уравнение относительно перемещений:

$$u^{k+1} = u^k - \alpha(\Lambda(u^k,\xi))^{-1}(A(u^k,\xi)-\rho). \tag{119}$$

Согласно (119) элемент $u\in U$ является неподвижной точкой оператора $\Gamma_\alpha: U\to U$, определяемого отображением

$$\Gamma_\alpha: v\in U \to \Gamma_\alpha(v,\xi,\rho) = v - \alpha(\Lambda(v,\xi))^{-1}(A(v,\xi)-\rho). \tag{120}$$

Пусть отображение $\Gamma_\alpha: U\to U$ имеет неподвижную точку $u\in U$ и дифференцируемо по Фреше в этой точке. Кроме того, существует норма, эквивалентная основной норме пространства U, для которой выполняется условие

$$\|\Gamma'_\alpha(u,\xi)\| \le q(\alpha) < 1. \tag{121}$$

Тогда в соответствии с теоремой Островского [18] для произвольного, но достаточно близкого к $u\in U$ начального приближения $u^0\in U$ последовательность $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}\in U$, построенная с помощью итерационного процесса (119), сходится к точке $u\in U$ со скоростью геометрической прогрессии, причем оценка скорости сходимости характеризуется неравенством

$$\|u^k - u\| \le q^k(\alpha)\|u^0 - u\|. \tag{122}$$

Отметим, что наличие неподвижной точки $u\in U$ отображения (120) обеспечено в силу существования единственного решения операторного уравнения (56), а сделанные выше предположения о свойствах оператора Φ: $X\to X$ обеспечивают дифференцируемость по Фреше оператора $\Gamma_\alpha: U\to U$.

В соответствии с (120) и правилами дифференцирования сложных отображений дифференциал Фреше оператора $\Gamma_\alpha: U\to U$ в точке $v\in U$ на приращении $w\in U$ имеет вид

$$w\to\Gamma'_\alpha(v,\xi,\rho)w = w - \alpha(\Lambda(v,\xi))^{-1}A'(v,\xi)w +$$

$$+\alpha(\Lambda(v,\xi))^{-1}(\Lambda'(v,\xi)w)(\Lambda(v,\xi))^{-1}(A(v,\xi)-\rho). \tag{123}$$

Поскольку $u \in U$ – неподвижная точка оператора $\Gamma_\alpha \colon U \to U$, находим

$$v \to \Gamma'_\alpha(u, \xi) v = v - \alpha (\Lambda(u, \xi))^{-1} A'(u, \xi) v, \qquad \forall\, v \in U, \tag{124}$$

где $A'(u, \xi) v$ – дифференциал Фреше оператора A в точке $u \in U$ на приращении $v \in U$,

$$A'(u, \xi) v \colon w \to (\Phi'_\varepsilon(Bu, \xi) Bv, Bw)_X = \left\langle A'(u, \xi) v, w \right\rangle. \tag{125}$$

Сделаем несколько замечаний относительно свойств оператора Λ. Поскольку $\Lambda\colon U \to U^*$ – симметричный коэрцитивный ограниченный оператор, существуют два вещественных положительных числа q_1, q_2 такие, что

$$q_1 ||w||_U^2 \le \left\langle \Lambda(v, \xi) w, w \right\rangle \le q_2 ||w||_U^2, \qquad \forall\, v, w \in U. \tag{126}$$

Тогда оператор $\Lambda\colon U \to U^*$ можно использовать для построения скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_\Lambda$ и нормы $||\cdot||_\Lambda$ в пространстве U, эквивалентной основной норме этого пространства, т.е. норме $||\cdot||_U$:

$$(v, w)_\Lambda = \left\langle \Lambda(u, \xi) v, w \right\rangle, \qquad ||v||_\Lambda = (v, v)_\Lambda^{1/2}, \qquad \forall\, v, w \in U. \tag{127}$$

Покажем, что оператор $\Gamma'_\alpha(u, \xi)$ удовлетворяет условию (121) относительно введенной метрики $||\cdot||_\Lambda$. Поскольку для произвольных $v, w \in U$ выполняется соотношение

$$(\Gamma'_\alpha(u, \xi) v, w)_\Lambda = \left\langle \Lambda(u, \xi) v, w \right\rangle - \alpha \left\langle A'(u, \xi) v, w \right\rangle, \tag{128}$$

приходим к равенству

$$(\Gamma'_\alpha(u, \xi) v, w)_\Lambda = (v, \Gamma'_\alpha(u, \xi) w)_\Lambda, \qquad \forall\, v, w \in U, \tag{129}$$

откуда следует, что $\Gamma'_\alpha(u, \xi)$ – самосопряженный оператор относительно скалярного произведения $(\cdot,\cdot)_\Lambda$, и, значит, его норма определяется выражением

$$||\Gamma'_\alpha(u, \xi)||_\Lambda = \sup_{v \in U} \frac{|(\Gamma'_\alpha(u, \xi) v, v)_\Lambda|}{||v||_\Lambda^2}. \tag{130}$$

С использованием соотношений (127), (128) и (130) получим

$$||\Gamma'_\alpha(u, \xi)||_\Lambda = \sup_{v \in U} \left| 1 - \alpha \frac{\left\langle A'(u, \xi) v, v \right\rangle}{\left\langle \Lambda(u, \xi) v, v \right\rangle} \right|. \tag{131}$$

Полагаем, что при всех $\eta,\ \zeta,\ \mu \in X$ существуют такие вещественные положительные числа γ_1, γ_2, при которых выполняются неравенства

$$\gamma_1 (D(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X \le (\Phi'_\varepsilon(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X \le \gamma_2 (D(\eta, \zeta)\mu, \mu)_X . \qquad (132)$$

Тогда на основании (117), (125), (132) для произвольных $v, w \in U$ имеем

$$\gamma_1 \left\langle \Lambda(v, \xi) w, w \right\rangle \le \left\langle A'(v, \xi) w, w \right\rangle \le \gamma_2 \left\langle \Lambda(v, \xi) w, w \right\rangle. \qquad (133)$$

В соответствии с (131) и (133) находим

$$||\Gamma'_\alpha(u, \xi)||_\Lambda \le q(\alpha) = \max(|1-\alpha\gamma_1|, |1-\alpha\gamma_2|). \qquad (134)$$

Таким образом, условие $q(\alpha) < 1$ будет выполняться только в случае если $\alpha \in (0{,}2/\gamma_2)$. При этом с учетом неравенств (126) справедлива оценка, характеризующая скорость сходимости итерационного процесса:

$$||u^k - u||_U \le \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\, q^k(\alpha)\, ||u^0 - u||_U . \qquad (135)$$

На основании (135) нетрудно определить, что минимальная оценка

$$||\Gamma'_{\alpha_{opt}}(u, \xi)||_\Lambda \le q(\alpha_{opt}) = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} < 1 \qquad (136)$$

достигается при

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \qquad (137)$$

Оптимальные оценки скорости сходимости для деформаций и напряжений имеют вид

$$||\varepsilon^k - \varepsilon||_X \le \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\, q^k(\alpha_{opt})\, ||\varepsilon^0 - \varepsilon||_X ; \qquad (138)$$

$$||\sigma^k - \sigma||_X \le \frac{M}{m}\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\, q^k(\alpha_{opt})\, ||\sigma^0 - \sigma||_X . \qquad (139)$$

Неравенства (136), (138) и (139) позволяют установить локальную сходимость метода переменных параметров упругости при неизотермических процессах активного нагружения с учетом начальных деформаций.

Замечание. Для метода переменных параметров упругости справедливы априорные оценки следующего вида:

$$
\begin{cases}
q_1 = 2 \operatorname{vrai}\min\limits_{x\in\Omega} \min\limits_{\bar{\varepsilon}} \min\limits_{T} G(x, \bar{\varepsilon}, T) > 0; \\
q_2 = \operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega} \max\limits_{T} k_0(x, T) < \infty; \\
\gamma_1 = \operatorname{vrai}\min\limits_{x\in\Omega} \min\limits_{\bar{\varepsilon}} \min\limits_{T} \dfrac{\bar{g}(x, \bar{\varepsilon}, T)}{G(x, \bar{\varepsilon}, T)} > 0; \\
\gamma_2 = 1.
\end{cases}
\tag{140}
$$

Согласно оценкам (113) и (140) знаменатель геометрической прогрессии в оценке скорости сходимости метода переменных параметров упругости меньше, чем в оценке сходимости метода упругих решений, т.е. скорость сходимости метода переменных параметров упругости выше, чем метода упругих решений.

Отметим, что приведенные выше доказательства сходимости методов упругих решений и переменных параметров упругости не учитывают погрешность вычисления начальных деформаций $\xi(t) \in X$, зависящих от процесса деформирования. Действительно, тензор начальных деформаций для каждого этапа нагружения определяется в результате решения упругопластической задачи для предыдущего этапа нагружения и, следовательно, включает погрешность, обусловленную приближенным решением операторного уравнения (56) для каждого этапа нагружения. Таким образом, получаем уравнение с учетом погрешности входных данных для начальных деформаций $\tilde{\xi}$:

$$
A(\tilde{u}, \tilde{\xi}) = \rho \qquad \text{в} \qquad U^*, \qquad \tilde{u} \in U. \tag{141}
$$

Оценим погрешность $\tilde{u} - u \in U$. С использованием первого неравенства (58) имеем

$$
m\|\tilde{u} - u\|_U^2 \le \left\langle A(\tilde{u}, \xi) - A(u, \xi), \tilde{u} - u \right\rangle = \left\langle A(\tilde{u}, \xi) - A(\tilde{u}, \tilde{\xi}), \tilde{u} - u \right\rangle, \tag{142}
$$

откуда с учетом третьего неравенства (58) находим

$$
\|\tilde{u} - u\|_U \le \frac{1}{m} \|A(\tilde{u}, \xi) - A(\tilde{u}, \tilde{\xi})\|_{U^*} \le \frac{M_1}{m} \|\tilde{\xi} - \xi\|_X . \tag{143}
$$

Итак, справедлива оценка

$$
\|\tilde{\varepsilon} - \varepsilon\|_X \le \frac{M_1}{m} \|\tilde{\xi} - \xi\|_X . \tag{144}
$$

Фактически для каждого этапа нагружения вместо операторного уравнения (56) решается приближенное уравнение (141), и, значит, приведенные выше оценки скорости сходимости методов упругих решений и переменных параметров упругости устанавливают сходимость последовательных приближений к решению операторного уравнения (141). Исходя из этого имеем оценку

$$\|\varepsilon^k - \widetilde{\varepsilon}\|_X \le \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\, q^k \|\varepsilon^0 - \widetilde{\varepsilon}\|_X . \tag{145}$$

Для оценки погрешности $\varepsilon^k - \varepsilon$ используем неравенство треугольника

$$\|\varepsilon^k - \varepsilon\|_X \le \|\varepsilon^k - \widetilde{\varepsilon}\|_X + \|\widetilde{\varepsilon} - \varepsilon\|_X , \tag{146}$$

откуда с учетом оценок (144) и (145) находим

$$\|\varepsilon^k - \varepsilon\|_X \le \sqrt{\frac{q_2}{q_1}} q^k \|\varepsilon^0 - \widetilde{\varepsilon}\|_X + \frac{M_1}{m}\|\widetilde{\xi} - \xi\|_X . \tag{147}$$

Кроме того, согласно неравенству треугольника и оценке (144) имеем

$$\|\varepsilon^0 - \widetilde{\varepsilon}\|_X \le \|\varepsilon^0 - \varepsilon\|_X + \frac{M_1}{m}\|\widetilde{\xi} - \xi\|_X , \tag{148}$$

и, следовательно, неравенство (147) принимает вид

$$\|\varepsilon^k - \varepsilon\|_X \le \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\, q^k \|\varepsilon^0 - \varepsilon\|_X + \frac{M_1}{m}\left(1 + \sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\, q^k\right)\|\widetilde{\xi} - \xi\|_X . \tag{149}$$

Оценим погрешность $\widetilde{\xi} - \xi$, где элемент $\widetilde{\xi}(t_m)$ определяется выражением

$$\widetilde{\xi}(t_m) = \varepsilon_S^T(t_{m-1}) + (\varepsilon_D^p)^{k_{m-1}}(t_{m-1}). \tag{150}$$

В соответствии с (24), (28) и (150) получим

$$\widetilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m) = (\varepsilon_D^p)^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D^p(t_{m-1}) =$$

$$= \varepsilon_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D(t_{m-1}) - \frac{1}{2G_0(T(t_{m-1}))}(\sigma_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \sigma_D(t_{m-1})), \tag{151}$$

причем

$$\sigma_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \sigma_D(t_{m-1}) =$$

$$= \Phi(\varepsilon_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}), \widetilde{\xi}_D(t_{m-1})) - \Phi(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})). \tag{152}$$

Введем в рассмотрение оператор вычисления пластических деформаций P, определяемый согласно (24) с помощью отображения

$$\eta_D, \zeta_D \in X \to P(\eta_D, \zeta_D) = \eta_D - \frac{1}{2G_0}\Phi(\eta_D, \zeta_D). \tag{153}$$

Тогда в соответствии с (151)–(153) имеем

$$(\varepsilon_D^p)^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D^p(t_{m-1}) =$$

$$= P(\varepsilon_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}), \widetilde{\xi}_D(t_{m-1})) - P(\varepsilon_D(t_{m-1}), \xi_D(t_{m-1})), \tag{154}$$

откуда с использованием неравенства треугольника и формулы конечных приращений получим

$$\|\widetilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m)\|_X = \|(\varepsilon_D^p)^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D^p(t_{m-1})\|_X \le$$

$$\le \sup_{\eta_D \in X} \|P'_\varepsilon(\eta_D, \widetilde{\xi}_D(t_{m-1}))\|_X \, \|\varepsilon_D^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon_D(t_{m-1})\|_X +$$

$$+ \sup_{\zeta_D \in X} \|P'_\xi(\varepsilon_D(t_{m-1}), \zeta_D)\|_X \, \|\widetilde{\xi}(t_{m-1}) - \xi(t_{m-1})\|_X, \tag{155}$$

где $P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)$ и $P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)$ – производные оператора P в произвольной точке (η_D, ζ_D), определяемые согласно (153) с помощью отображений

$$\begin{gathered} \mu_D \in X \to P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D = \mu_D - \frac{1}{2G_0}\Phi'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D; \\ \chi_D \in X \to P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D = \frac{1}{2G_0}\Phi'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D. \end{gathered} \tag{156}$$

Следовательно, для произвольных η, ζ, μ, χ, $\lambda \in X$ имеем

$$\begin{gathered} (P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D, \lambda_D) = \left(1 - \frac{G}{G_0}\right)(\mu_D, \lambda_D) + \\ + \frac{G - \overline{g}}{G_0}\frac{(\eta_D - \zeta_D, \mu_D)(\eta_D - \zeta_D, \lambda_D)}{\|\eta_D - \zeta_D\|^2}; \\ (P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D, \lambda_D) = -\frac{G}{G_0}(\chi_D, \lambda_D) + \\ + \frac{G - \overline{g}}{G_0}\frac{(\eta_D - \zeta_D, \chi_D)(\eta_D - \zeta_D, \lambda_D)}{\|\eta_D - \zeta_D\|^2}. \end{gathered} \tag{157}$$

На основании (157) заключаем, что $P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)$ и $P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)$ – самосопряженные операторы при всех η_D, $\zeta_D \in X$, и, значит, их норма определяется выражениями

$$\begin{aligned} ||P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)||_X &= \sup_{\mu_D \in X} \frac{|(P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D, \mu_D)_X|}{||\mu_D||_X^2}; \\ ||P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)||_X &= \sup_{\chi_D \in X} \frac{|(P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D, \chi_D)_X|}{||\chi_D||_X^2}. \end{aligned} \tag{158}$$

С учетом соотношений (157) получаем

$$\begin{aligned} (P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D, \mu_D) &= \left(1 - \frac{G}{G_0}\right)||\mu_D||^2 + \frac{G - \bar{g}}{G_0}\frac{(\eta_D - \zeta_D, \mu_D)^2}{||\eta_D - \zeta_D||^2}; \\ (P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D, \chi_D) &= \frac{G - \bar{g}}{G_0}\frac{(\eta_D - \zeta_D, \chi_D)^2}{||\eta_D - \zeta_D||^2} - \frac{G}{G_0}||\chi_D||^2, \end{aligned} \tag{159}$$

откуда для произвольных η, ζ, μ, $\chi \in X$ следуют неравенства:

$$\begin{aligned} |(P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)\mu_D, \mu_D)| &\le \left(1 - \frac{\bar{g}}{G_0}\right)||\mu_D||^2; \\ |(P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)\chi_D, \chi_D)| &\le \frac{G}{G_0}||\chi_D||^2. \end{aligned} \tag{160}$$

В соответствии с (158) и (160) находим

$$||P'_\varepsilon(\eta_D, \zeta_D)||_X \le 1 - \gamma_{01}; \qquad ||P'_\xi(\eta_D, \zeta_D)||_X \le 1, \tag{161}$$

и, значит, на основании неравенства (155) приходим к оценке

$$\begin{aligned} ||\tilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m)||_X &\le (1 - \gamma_{01})||\varepsilon^{k_{m-1}}(t_{m-1}) - \varepsilon(t_{m-1})||_X + \\ &+ ||\tilde{\xi}(t_{m-1}) - \xi(t_{m-1})||_X. \end{aligned} \tag{162}$$

Если для оценки первого слагаемого в правой части (162) использовать неравенство (149), то получим

$$\begin{aligned} ||\tilde{\xi}(t_m) - \xi(t_m)||_X &\le C_1 q^{k_{m-1}}||\varepsilon^0(t_{m-1}) - \varepsilon(t_{m-1})||_X + \\ &+ C_2||\tilde{\xi}(t_{m-1}) - \xi(t_{m-1})||_X, \end{aligned} \tag{163}$$

где C_1, C_2 – положительные постоянные,

$$C_1=\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}(1-\gamma_{01});\qquad C_2=1+\frac{M_1}{m}(1-\gamma_{01}+C_1q^{k_{m-1}}).\tag{164}$$

Отметим, что в реальном итерационном процессе число итераций k_{m-1} берется таким, что $q^{k_{m-1}}<<1$, и, значит, можно полагать

$$C_2=1+\frac{M_1}{m}(1-\gamma_{01})\le\frac{M}{m}.\tag{165}$$

Если в формуле (163) каждое $\tilde{\xi}(t_{m-1})-\xi(t_{m-1})$ выразить через предыдущее, то получим неравенство

$$||\tilde{\xi}(t_m)-\xi(t_m)||_X\le C_1\sum_{n=1}^{m-1}C_2^{m-n}q^{k_n}||\varepsilon^0(t_n)-\varepsilon(t_n)||_X\,.\tag{166}$$

На основании (149) и (166) приходим к оценке суммарной погрешности для деформаций в конце этапа нагружения:

$$||\varepsilon^{k_m}(t_m)-\varepsilon(t_m)||_X\le\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\sum_{n=1}^{m}C(t_n)q^{k_n},\tag{167}$$

где $C(t_n)$ – положительные коэффициенты,

$$\begin{gathered}C(t_m)=||\varepsilon^0(t_m)-\varepsilon(t_m)||_X\,;\\ C(t_n)=(C_2-1)C_2^{m-n}||\varepsilon^0(t_n)-\varepsilon(t_n)||_X\,,\quad 1\le n\le m-1.\end{gathered}\tag{168}$$

Аналогичную оценку можно получить для напряжений. Действительно, с использованием неравенств (62), (63) находим

$$||\sigma^k-\sigma||_X=||\Phi(\varepsilon^k,\tilde{\xi})-\Phi(\varepsilon,\xi)||_X\le$$

$$\le||\Phi(\varepsilon^k,\tilde{\xi})-\Phi(\varepsilon,\tilde{\xi})||_X+||\Phi(\varepsilon,\tilde{\xi})-\Phi(\varepsilon,\xi)||_X\le$$

$$\le\sup_{\eta\in X}||\Phi'_\varepsilon(\eta,\tilde{\xi})||_X\,||\varepsilon^k-\varepsilon||_X+\sup_{\zeta\in X}||\Phi'_\xi(\varepsilon,\zeta)||_X\,||\tilde{\xi}-\xi||_X\le$$

$$\le M(||\varepsilon^k-\varepsilon||_X+||\tilde{\xi}-\xi||_X),\tag{169}$$

и, следовательно, с учетом оценок (163), (166) получаем оценку суммарной погрешности для напряжений в конце этапа нагружения:

$$\|\sigma^{k_m}(t_m)-\sigma(t_m)\|_X \le M\sqrt{\frac{q_2}{q_1}}\sum_{n=1}^{m} C(t_n)q^{k_n}, \tag{170}$$

где $C(t_n)$ – положительные коэффициенты, определяемые выражениями

$$\begin{aligned} &C(t_m)=\|\varepsilon^0(t_m)-\varepsilon(t_m)\|_X ;\\ &C(t_n)=(C_2-\gamma_{01})C_2^{m-n}\|\varepsilon^0(t_n)-\varepsilon(t_n)\|_X , \quad 1\le n\le m-1. \end{aligned} \tag{171}$$

Неравенства (167) и (170) позволяют установить сходимость методов упругих решений и переменных параметров упругости для решения краевых задач, описывающих неизотермические процессы активного нагружения с учетом начальных деформаций, зависящих от истории деформирования и нагрева. Согласно этим оценкам, точность решения задачи для начальных этапов нагружения должна быть достаточной, чтобы не допустить влияния роста первых коэффициентов в разложении суммарной погрешности (167), (170) на точность решения упругопластической задачи для последующих этапов нагружения.

Заключение. Приведены результаты анализа обобщенной краевой задачи термопластичности, описывающей неизотермические процессы упругопластического деформирования с учетом истории нагружения. Краевая задача сформулирована в виде нелинейного операторного уравнения в гильбертовом пространстве. Установлены условия, обеспечивающие существование, единственность и непрерывную зависимость обобщенного решения от приложенных нагрузок и начальных деформаций. Доказана сходимость методов упругих решений и переменных параметров упругости для неизотермических процессов активного нагружения с учетом начальных деформаций, зависящих от процесса деформирования.

Р е з ю м е

Розглядаються теорія і наближені методи розв’язку крайової задачі термопластичності в квазістатичній постановці, коли процес неізотермічного пружно-пластичного деформування тіла представляє собою послідовність рівноважних станів. У цьому випадку напружено-деформований стан залежить від історії навантаження, і процес непружного деформування повинен простежуватися на всьому досліджуваному інтервалі часу. Крайову задачу сформульовано у вигляді нелінійного операторного рівняння у гільбертовому просторі. Визначено умови, що забезпечують існування, єдиність та безперервну залежність узагальненого розв’язку від прикладеного навантаження і початкових деформацій. Досліджено збіжність методів пружних розв’язків і змінних параметрів пружності для розв’язку крайових задач, що описують неізотермічні процеси активного навантаження з урахуванням початкових деформацій, які залежать від історії деформування і нагрівання.

1. *Шевченко Ю. Н.*, *Савченко В. Г.* Термовязкопластичность. – Киев: Наук. думка, 1987. – 264 с.

2. *Шевченко Ю. Н.* Термопластичность при переменных нагружениях. – Киев: Наук. думка, 1970. – 288 с.

3. *Von Mises R.* Mechanik der Plastischen Formänderung der Kristallen // Z. Angew. Math. Mech. – 1928. – No. 8. – P. 161 – 185.

4. *Drucker D. C.* A More fundamental approach to plastic stress-strain solutions // Appl. Mech. – 1951. – P. 487 – 491.

5. *Ильюшин А. А.* Пластичность: Основы общей математической теории. – М.: Изд-во АН СССР, 1963. – 272 с.

6. *Prandtl L.* Spannungsverteilung in plastischen Körpern // Proc. 1st Int. Congr. Appl. Mech. Delft. – 1924. – S. 43 – 54.

7. *Биргер И. А.*, *Демьянушко И. В.* Теория пластичности при неизотермическом нагружении // Механика твердого тела. – 1968. – № 6. – С. 70 – 77.

8. *Работнов Ю. Н.* Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с.

9. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.

10. *Колмогоров А. Н.*, *Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 542 с.

11. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 480 с.

12. *Ворович И. И.*, *Красовский Ю. П.* О методе упругих решений // Докл. АН СССР. – 1959. – **126**, № 4. – С. 118 – 121.

13. *Ленский В. С.*, *Бровко Г. Л.* Метод однородных линейных приближений в несвязных задачах терморадиационной упругости и пластичности // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1971. – Вып. 11. – С. 100 – 103.

14. *Биргер И. А.* Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1951. – **15**, № 6. – С. 765 – 770.

15. *Быков Д. Л.* О некоторых методах решения задач теории пластичности // Упругость и неупругость. – 1975. – Вып. 4. – С. 119 – 149.

16. *Темис Ю. М.* Сходимость метода переменных параметров упругости при численном решении задач пластичности методом конечных элементов // Прикладные проблемы прочности и пластичности: Статика и динамика деформируемых систем. – М., 1982. – С. 21 – 34.

17. *Уманский С. Э.* О сходимости метода переменных параметров упругости // Прикл. математика и механика. – 1980. – № 3. – С. 577 – 581.

18. *Ortega J. M. and Rheinboldt W. C.* Iterative Solution if Nonlinear Equations in Several Variables. – New York; London: Academic Press, 1970.

Поступила 28. 05. 2005