

УДК 532.5

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СЕЙСМИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ В ВЕРТИКАЛЬНОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗЕРВУАРЕ

Г. Ф. ЗОЛОТЕНКО

Институт математики НАН Украины, Киев

Получено 23.09.2004

Сделан обзор известных детерминированных и вероятностных моделей сейсмических колебаний жидкости в цилиндрических резервуарах. В развитие существующих моделей предложена модель нелинейных сейсмических колебаний жидкости. Предлагаемая модель основана на точных интегро-дифференциальных уравнениях типа Гамильтона динамики идеальной несжимаемой жидкости, совершающей безвихревое абсолютное движение в подвижном резервуаре. Движение резервуара является поступательным и 3-мерным. Из построенной нелинейной модели как частный случай получены общие линейные уравнения сейсмических колебаний жидкости при (двумерных) горизонтальных и вертикальных сейсмических ускорениях грунта. Исследована взаимосвязь этих общих линейных уравнений с известной моделью Охотимского. Воспроизведены и передоказаны результаты корреляционной теории Николаенко сейсмических колебаний свободной поверхности жидкости. В качестве примера рассмотрен случай колебаний жидкости в резервуаре во время сильного землетрясения в г. Ниигата (Япония) 16 июня 1964 года.

Зроблено огляд відомих детермінованих та ймовірнісних моделей сейсмічних коливань рідини у циліндричних резервуарах. У розвиток існуючих моделей запропоновано модель нелінійних сейсмічних коливань рідини. Ця модель базується на точних інтегро-диференціальних рівняннях типу Гамільтона динаміки ідеальної нестисливої рідини, що здійснює потенціальний абсолютний рух у рухомому резервуарі. Рух резервуара вважається поступальним та 3-вимірним. З побудованої нелінійної моделі як частинний випадок одержано загальні лінійні рівняння коливань рідини при (двовимірних) горизонтальних та вертикальних сейсмічних прискореннях ґрунту. Досліджено взаємозв'язок цих загальних лінійних рівнянь з відомою моделлю Охотимського. Відтворено та знову доведено результати кореляційної теорії сейсмічних коливань вільної поверхні рідини. Як приклад розглянуто випадок коливань рідини у резервуарі під час сильного землетрусу у м. Ніігата (Японія) 16 червня 1964 року.

The review of the known determinate and probabilistic models of seismic fluid oscillations in cylindrical tanks is made. As a development of existing models the model of nonlinear seismic fluid oscillations is offered. The offered model is based on the exact integro-differential equations of Hamilton's type which describe oscillations of incompressible inviscid fluid performing a potential absolute motion in moving tank. The tank's motion is translational and three-dimensional. From this model the general linear equations of seismic fluid motion under horizontal (two-dimensional) and vertical seismic acceleration of ground is obtained. It is observed the interconnection of these general equations with the known equations by Okhotsimsky. The results of the Nikolaenko's correlation theory of the free surface seismic oscillations are restored and proved again. As an example it is considered the fluid oscillations in the tank during strong earthquake on June, 16, 1964 in Niigata (Japan).

ВВЕДЕНИЕ И ОБЗОР МОДЕЛЕЙ

Задачи динамики жидкости при землетрясениях имеют по крайней мере два прикладных аспекта. Один из них связан с вопросами сейсмостойкости сооружений (резервуаров-хранилищ, искусственных водоемов, водонапорных башен, объектов химической промышленности, высотных зданий с жидкостными демпферами колебаний и т. д.). Второй аспект связан с тем, что создатель известной шкалы землетрясений Ч.Ф.Рихтер [1] называл "водными проявлениями" землетрясений (колебания зеркала воды в колодцах, сейши, цунами, моретрясения, фонтаны и т. д.). Иначе говоря, по видимому поведению жидкости во время землетрясения можно судить о силе землетрясения, что использовалось, например, для проведения изосейт землетрясений. В связи с этим возникает идея увязывать характеристики землетрясения (в частности, его интенсивность) с поведе-

нием свободной поверхности жидкости внутри сосудов, подвергающихся землетрясениям.

В современной сейсмологии основным инструментом измерения параметров землетрясений являются маятниковые сейсмографы, поскольку наиболее полно изучены сейсмические движения именно маятников [2]. В то же время, известные маятниковые аналогии в гидродинамике порождают вопросы о колебательных движениях в условиях землетрясений также и жидкости. Исследования настоящей работы, посвященной анализу и разработке математических моделей сейсмических колебаний жидкости внутри цилиндрических сосудов, напрямую связаны с обеими прикладными задачами. Вместе с тем основное внимание уделено свободной поверхности жидкости, а важные для сейсмостойкого строительства вопросы о силовом взаимодействии жидкости и резервуара здесь не затрагиваются.

Известен ряд математических моделей сейсми-

ческих колебаний идеальной несжимаемой жидкости в цилиндрических вертикальных сосудах. Основные результаты в этой области получены в [3–5]. Все модели включают уравнение Лапласа (неразрывности), интеграл Лагранжа – Коши (в качестве решения гидродинамических уравнений Эйлера при условии потенциальности абсолютного движения жидкости), условия непротекания на (абсолютно) твердых стенках, краевые (кинематическое и динамическое) условия на свободной поверхности жидкости, начальные условия. Основные различия рассматриваемых моделей заключаются в форме интеграла Лагранжа – Коши и краевых условий на свободной поверхности, а также в способе учета сейсмических воздействий на жидкость со стороны резервуара. Ниже даны краткие характеристики основных моделей (названия моделей условны и отражают способ учета сейсмического воздействия).

Импульсная модель (L.S.Jacobsen [3]). Предназначена для расчета гидродинамических сил и моментов, действующих на стенки резервуара на кратковременной начальной стадии землетрясения.

В [3] решалась задача о движении идеальной несжимаемой жидкости при поступательных перемещениях в горизонтальном направлении частично погруженного в воду и частично заполненного жидкостью резервуара. Резервуар считался недеформируемым, а абсолютное движение жидкости – безвихревым. Сейсмические перемещения грунта полагались импульсными (форма и длительность импульса не оговаривались). Задача решалась в линейной постановке, причем ввиду импульсного характера внешнего воздействия конечные сила тяжести и давление на свободной поверхности жидкости игнорировались, а интеграл Лагранжа – Коши брался в простейшем виде, а именно:

$$p = -\rho \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad (1)$$

где p – давление; ρ – плотность жидкости; ϕ – потенциал абсолютной скорости жидкости в неподвижной системе координат; t – время. Кроме того, свободная поверхность считалась неизменяемой и совпадающей с плоскостью невозмущенной поверхности. В результате, кинематическое и динамическое условия на свободной поверхности свелись соответственно к равенствам:

$$\phi \Big|_{z=H} = 0, \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{z=H} = 0, \quad (2)$$

где H – уровень жидкости в баке; z – вертикальная координата. Как следствие, решение для по-

тенциала, полученное методом разделения переменных, оказалось зависящим от глубины по закону тригонометрического, а не традиционного в теории волн гиперболического косинуса. Это решение применено для оценки сейсмических нагрузок на стенки резервуаров со стороны жидкости и для вычисления начальных скоростей жидкости на этапе ее движения, следующем за импульсным интервалом. Импульсное ускорение, влияющее на гидродинамические силы и моменты, в примерах этой работы бралось в пределах $0.12 - 0.2 g$.

Расчеты по математической модели Джекобсена сопоставлялись в [6] с экспериментом. Экспериментальная установка представляла собой массивную платформу на колесах, к которой одновременно крепились четыре цилиндрические оболочки диаметрами $0.1524, 0.3048, 0.5842, 1.1938$ м. (Внутри оболочек для крепления устройств фоторегистрации формы гравитационных волн устанавливались по центру вертикальные непроницаемые перегородки, параллельные направлению движения платформы. Поэтому, по существу, эксперименты проводились с полукруглыми баками.) Движение платформы имитировало сейсмическое движение грунта, приблизительно состоящее из импульсного движения (из состояния покоя) на интервале времени $0 < t < t_1$, дальнейшего ускоренного движения на интервале $t_1 < t < t_2$ и последующего затухающего колебательного движения до полной остановки. Для реализации такого движения один конец платформы крепился посредством пружины регулируемой жесткости к неподвижной стойке, а на другом конце находился бампер. Платформа приводилась в движение с помощью удара по бамперу тяжелым маятником, который оставался в контакте с бампером в течение интервала времени $0 < t < t_1$. Движение платформы могло быть остановлено с помощью гравитационной защелки в момент t_2 , соответствующий максимальному значению перемещения грунта и нулевой скорости этого перемещения. Импульсный интервал $(0, t_1)$ был настолько мал, что высота гравитационных волн оставалась малой и, как следствие, гидродинамические давление и скорость могли быть определены по методу работы [3]. Длительность импульса (время контакта ударного маятника с бампером) t_1 составляла $0.075 - 0.08$ с, а частота f_g колебаний грунта (платформы) – $0.7 - 7.0$ Гц. Заметим, что если в [3] сейсмическое движение грунта моделировалось лишь простым импульсом, то в [6] уже использовалась затухающая синусоида, характеризующаяся максимальной амплитудой A_g и длительностью D . В экспериментах использовался критерий (свя-

занный с энергией сейсмических движений земли)

$$V_g = 2\pi A_g f_g = \text{const}, \quad (3)$$

где V_g – максимальная скорость движения грунта. Скорость V_g принимала значения из интервала $0.051 - 0.203 \text{ мс}^{-1}$, что при выбранном диапазоне частот грунта f_g соответствует значениям максимальных ускорений грунта из интервала $0.22 - 8.94 \text{ мс}^{-2}$. Длительность D затухающих сейсмических колебаний грунта (платформы) была равна $2.1 \pm 5\% \text{ с}$. (Заметим, что указанный диапазон ускорений грунта учитывает принятое в теории сейсмостойкости сооружений "правило $0.1g$ " [1], но длительность сейсмических колебаний D реально не может быть одной и той же для всего диапазона ускорений.)

Эксперименты показали хорошее количественное совпадение расчетных и экспериментальных значений эффективной гидродинамической массы в зависимости от уровня заполнения резервуара. Что касается аппроксимации формы свободной поверхности суммой вида [6]

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i J_1(k_i r) \cos(\theta) \cos\left(\frac{2\pi t}{T_i} + \phi_i\right). \quad (4)$$

(здесь $\zeta(r, \theta, t)$ – возвышение волновой поверхности над плоскостью невозмущенной свободной поверхности; r, θ – полярные координаты; T_i, k_i – известные периоды и волновые числа свободных гармонических колебаний жидкости в неподвижном цилиндрическом баке; A_i, ϕ_i – произвольные числа), то она дает лишь качественное совпадение и только на коротком начальном этапе ускоренного движения бака $0 \leq t \leq t_2$.

Импульсно – колебательная модель (Д. Е. Охочимский [4]). Более полная линейная детерминированная модель. Позволяет рассчитывать гидродинамические силы и моменты на начальной и последующих стадиях землетрясения в нерезонансных случаях. Можно также оценивать форму свободной поверхности жидкости [7].

В модели Охочимского, в отличие от модели Джекобсена, учитывается более сложное движение резервуара, состоящее из горизонтальных поступательных его перемещений со скоростью $v_0(t)$ и одновременных вращений с угловой скоростью $\omega_x(t)$ вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной линии поступательных перемещений. Моделируется ситуация, когда резервуар совершает малые движения вблизи исходного положения. В дополнение к этому, жидкость считается тяжелой и учитываются гравитационные волны. Решается

линейная задача, в которой интеграл Лагранжа – Коши, в отличие от (1), берется в виде

$$\frac{p - p_0}{\rho} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} - gz, \quad (5)$$

где p_0 – постоянное давление на свободной поверхности жидкости; g – ускорение силы тяжести; Φ – потенциал абсолютных скоростей в жестко связанном с резервуаром подвижных осях¹. Краевые условия на свободной поверхности также сносились на невозмущенную поверхность, но взамен (2) получалось (в [4] начало системы координат выбиралось в центре невозмущенной поверхности, а уравнение свободной поверхности задавалось в виде $z = \zeta(x, y, t)$)

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}, \quad \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} + g\zeta = 0. \quad (6)$$

После представления искомого потенциала абсолютных скоростей в виде

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \varphi_1(r, \theta, z, t) + \varphi_2(r, \theta, z, t),$$

$\varphi_1 = \omega_x(t) [F(r, \theta, z) - yz] + v_0(t)y$ ($y = r \sin(\theta)$), где новыми неизвестными являются потенциал Жуковского F и волновой потенциал φ_2 , задача решалась методом разделения переменных. Результат – формула для потенциала абсолютных скоростей жидкости вида

$$\Phi = \Phi[r, \theta, z, v_0(t), \omega_x(t), R, H, \dot{\chi}_n(t)],$$

где R – радиус цилиндрической полости, а $\chi_n(t)$ – обобщенные координаты жидкости, удовлетворяющие в случае (который в дальнейшем только и будет рассматриваться) отсутствия угловых движений резервуара дифференциальным уравнениям

$$\ddot{\chi}_n + \omega_n^2 \chi_n = -\frac{\dot{v}_0}{R} \quad (7)$$

с начальными условиями

$$\chi_n = \dot{\chi}_n = 0 \quad \text{при} \quad t = 0.$$

¹В [4] потенциал абсолютных скоростей жидкости $\varphi(x, y, z, t)$ рассматривался в *неподвижной* системе координат $Oxyz$, в то время как краевая задача для составляющей $F(x, y, z)$ этого потенциала вслед за Н.Е.Жуковским решалась в *подвижной* системе координат [8] (стр.214 и 208). Противоречие устраняется, если систему координат $Oxyz$ считать подвижной, а $\varphi(x, y, z, t)$ заменить на $\Phi(x, y, z, t)$. Можно показать, что в линейном случае исходные соотношения (1.1) – (1.6) из [4] сохраняют вид и в терминах потенциала $\Phi(x, y, z, t)$ (отбрасываются не только квадраты абсолютных скоростей $\frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2$ жидкости, но и линейные по абсолютным скоростям жидкости члены $\nabla \Phi \cdot \mathbf{v}_e$, где \mathbf{v}_e – переносная скорость жидкости).

(Здесь ω_n – собственные частоты колебаний жидкости.) Получены формулы для результирующих сил и моментов сил давления жидкости на стенки резервуара в терминах эффективных масс и эффективных моментов инерции. Описаны частные случаи импульсных движений и установившихся гармонических колебаний резервуара (отсюда название модели). Установлено, что эффективные массы и моменты для импульсных движений могут быть получены из соответствующих величин для гармонических колебаний путем предельного перехода при стремлении к бесконечности числа Фруда

$$\text{Fr} = \frac{R\omega^2}{g},$$

где ω – частота вынуждающих колебаний. В частности, $\text{Fr} = \infty$ для невесомой жидкости, когда, как в модели Джекобсена, $g = 0$.

Формула для свободной поверхности $\zeta(r, \theta, t)$ модели Охоцимского была выписана в явном виде в [7] с помощью известного в линейной теории волн соотношения

$$\zeta(r, \theta, t) = -\frac{1}{g} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0}.$$

В примерах работы [7] импульсное ускорение грунта составляло $0.025g$, $0.05g$, $0.1g$, что соответствует землетрясениям в 7, 8 и 9 баллов.

Вероятностная стационарная модель (Н. А. Николаенко [5]) учитывает случайный характер перемещений грунта при землетрясениях. Построена в рамках корреляционной теории стационарных эргодических гауссовских процессов. Использует решение Охоцимского линейной гидродинамической задачи, но приспособлена к случаю вязкой жидкости путем введения в уравнения (7) диссипативных членов. После соответствующей замены переменных эти уравнения берутся в виде

$$\ddot{q}_k(t) + 2\nu_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = -\dot{v}_0(t), \quad (8)$$

где $q_k(t)$ – новые обобщенные координаты жидкости; ν_k – коэффициент затухания колебаний жидкости по k -й форме.

К уравнению (8) применены идеи и методы статистической динамики систем автоматического управления, в частности, понятия "линейная система", "вход", "выход", "колебательное звено", "передаточная функция", "частотная характеристика", "координатные функции канонического представления случайной функции" [9]².

²В [5] канонические интегральные представления случайных функций явно не фигурируют, однако они являются исходными для применяемой в этой работе теории из [9].

В предположении, что ускорение грунта является стационарным случайным процессом и допускает каноническое интегральное представление вида

$$\dot{v}_0(t) = \int_{-\infty}^{\infty} V(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

(здесь $V(\omega)$ – белый шум переменной ω), получены решения этого уравнения, которые затем использованы для построения канонических интегральных представлений рядов, определяющих случайную поверхность $\zeta(t)$, случайное давление $p(t)$ и случайную равнодействующую гидродинамических сил $X(t)$.

Основной для приложений является формула

$$D_y = \int_{-\infty}^{\infty} s_x(\omega) |y(t, \omega)|^2 d\omega,$$

выражающая дисперсию D_y сигнала $Y(t)$ на выходе через спектральную плотность $s_x(\omega)$ сигнала $X(t)$ на входе и координатную функцию $y(t, \omega)$ канонического представления соответствующего процесса на выходе ($\zeta(t)$, $p(t)$ или $X(t)$). По этой формуле в предположении, что процесс на входе (т. е. ускорение грунта $\dot{v}_0(t)$) является стационарным эргодическим гауссовским случайным процессом с корреляционной функцией (нормированной) вида

$$K(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau) \quad (9)$$

(здесь α , β – определяемые из опыта вещественные постоянные; τ – сдвиг по времени), получены выражения для дисперсий σ_ζ^2 свободной поверхности ζ , σ_p^2 давления p и σ_X^2 результирующей гидродинамической силы X . Модель позволяет рассматривать как установившиеся выходные процессы, когда все переходные процессы считаются законченными, так и переходные, когда выходные процессы уже не являются стационарными.

Заметим, что ввиду отсутствия данных о значениях коэффициентов ν_k для высших форм, на практике обычно ограничиваются только первой формой колебаний жидкости.

Вероятностная нестационарная модель (Н. А. Николаенко [5]) отличается от предыдущей характером сейсмического воздействия, которое аппроксимируется нестационарным случайным процессом вида

$$\dot{v}_0(t) = A_0 e^{-\varepsilon t} W(t),$$

где $W(t)$ – стационарный случайный процесс; A_0 , ε – действительные постоянные, определяемые из опыта. В предположении, что корреляционная

функция процесса $W(t)$ имеет вид (9), построены корреляционные функции $K_\zeta(t_1, t_2)$, $K_p(t_1, t_2)$, $K_X(t_1, t_2)$ соответственно свободной поверхности $\zeta(r, \theta, t)$, давления p и результирующей гидродинамических сил X . Наибольший интерес для приложений представляют величины $K_\zeta(t, t)$, $K_p(t, t)$, $K_X(t, t)$, определяющие в виде функций времени дисперсии $\sigma_\zeta^2(t)$, $\sigma_p^2(t)$, $\sigma_X^2(t)$ соответствующих нестационарных случайных процессов. Окончательные расчетные формулы получены в предположении: 1) отсутствия взаимной корреляции между формами поверхностных волн, 2) узкополосности системы, 3) постоянства спектральной плотности процесса $W(t)$ в пределах полос пропускания.

Эта модель учитывает затухание сейсмического процесса во времени. Вместе с тем она не дает возможности рассчитать поведение системы на начальной стадии землетрясения, поскольку затухающая огибающая случайного процесса $\dot{v}_0(t)$ начинается с точки, соответствующей точке максимума t_{max} процесса $\dot{v}_0(t)$ на акселерограмме, и, следовательно, не охватывает начальный интервал времени $0 < t < t_{max}$. Отметим также, что эта модель требует большой статистической информации, так как усреднение в ней, в отличие от эргодических процессов, выполняется по совокупности реализаций, а не по времени.

Синтезированные модели. Так назван большой класс моделей, в которых сейсмические воздействия задаются в виде синтезированных (искусственных) акселерограмм. Гидродинамической частью модели может быть любая из известных (линейных или нелинейных) моделей колебаний жидкости в резервуаре.

Понятие синтезированной акселерограммы широко используется в строительстве при расчетах на сейсмостойкость ответственных сооружений (типа АЭС, плотин) и высотных зданий. Известны три способа задания искусственных акселерограмм: 1) метод подбора реальных записей; 2) метод генерации акселерограмм; 3) метод задания расчетной акселерограммы с фиксированным спектром реакции. Некоторые детали применения этих методов описаны в [10].

Метод подбора заключается в выборе из мирового банка акселерограмм записей колебаний грунтов с требуемыми значениями магнитуд и расстояний (с учетом глубины и механизма очага землетрясения, а также грунтовых условий в местах получения записей). Набор записей должен быть достаточно обширным и включать "характерные" и отличные от характерных (для расчетного сейсмического региона) акселерограммы. Если расчет выполняется не для прогноза реакции сооруже-

ния при будущих землетрясениях, а для анализа последствий уже произошедших землетрясений (или для других целей, например, теоретических исследований), возможен выбор одной записи, как, например, в работе [11], где использована акселерограмма одного из недавних землетрясений в Турции.

Наиболее распространенным в инженерной практике является метод генерации акселерограмм [12] – [?]. Алгоритмы генерации обычно реализованы в виде вычислительных программ. Генерируемые акселерограммы представляют собой реализации некоторого модулированного гауссовского процесса. Последний является выходным сигналом линейного фильтра, умноженным на модулирующую функцию. На вход фильтра подается ограниченно-белый шум с постоянным энергетическим спектром вплоть до частоты Найквиста, за которой этот спектр принимается равным нулю. Различным реализациям белого шума соответствуют различные искусственные акселерограммы. Модулирующая функция регулирует длительность генерированных ускорений грунта, а фильтр – уровень и частотный состав этих ускорений. Рекомендуется генерировать набор из N акселерограмм, для каждой из которых вычисляется отклик рассматриваемой системы. Работоспособность системы оценивается по среднему значению выборки из N откликов. Третий метод (метод задания расчетной акселерограммы с фиксированным спектром реакции) является менее трудоемким по сравнению с предыдущими методами и заключается в генерировании одной акселерограммы. Спектр реакции этой акселерограммы имеет форму кривой динамического коэффициента в СНиП II-7-81 [14], а сама акселерограмма представляет собой сумму гармоник с равномерно распределенными в интервале $(0, 2\pi)$ случайными фазовыми углами, умноженную на неслучайную функцию времени, называемую огибающей. Детали этого метода изложены в [15].

Очевидно, все три метода могут быть применены к случаю резервуара с жидкостью.

Другие модели. Существует также вероятностная модель, построенная на основе теории процессов Маркова [17, 5], однако пока она представляет лишь теоретический интерес, поскольку в самой сейсмологии процессы Маркова еще не нашли применения (см. 2, 18]). В иностранной литературе в связи с проблемой сейсродинамики резервуаров с жидкостью часто цитируются работы Хаузнера (G.W. Housner) и японских исследователей, однако автору эти работы недоступны (библиографию см., например, в [11]). Известно только, что в

этих работах рассматривались *линейные* колебания жидкости, следовательно, в принципе, они могут отличаться от уже цитированных работ только деталями.

Таким образом, в линейной постановке проведено много исследований задач о колебаниях жидкости в цилиндрических резервуарах при землетрясениях. Вместе с тем, возможны нелинейные колебания жидкости, причем как в реальных резервуарах-хранилищах (например, если уровень жидкости в них соответствует резонансным частотам колебаний жидкости), так и в лабораторных условиях (о сильных резонансных колебаниях свободной поверхности в процессе экспериментов упоминалось, например, в работе [6], однако с помощью своей математической модели авторы этой работы не могли, естественно, описать такие движения).

Цель настоящей работы – разработка нелинейной модели сейсмических колебаний жидкости в цилиндрическом резервуаре и исследование ее связи с детерминированной моделью Д.М.Охоцимского и вероятностными моделями Н.А.Николаенко. В основу гидродинамической части модели кладутся нелинейные уравнения типа Гамильтона из работы [18]. Одновременно воспроизводятся и передоказываются основные формулы корреляционной теории случайных сейсмических колебаний свободной поверхности жидкости из работы [5], где их вывод сводится лишь к кратким указаниям, а промежуточные результаты приведены с большим количеством опечаток.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается вертикальный цилиндрический резервуар, установленный на поверхности Земли и частично заполненный жидкостью. Относительно жидкости предполагается, что она является однородной, несжимаемой и вязкой. Плотность жидкости равна ρ , а ее уровень, отсчитываемый от дна резервуара, равен H . Резервуар считается абсолютно твердым, его внутренние размеры заданы радиусом R и высотой l . Вся система "резервуар-жидкость" находится в поле силы тяжести. В начальный момент времени $t = t_0$, когда система покоится, происходит землетрясение. Требуется рассчитать колебания свободной поверхности жидкости в процессе землетрясения.

В дальнейшем используются следующие правые декартовы системы координат: жестко связанная с резервуаром подвижная система координат $Oxyz$, начало O которой размещено в центре резервуара, ось Oz направлена вдоль его продольной

оси симметрии вверх, а оси Ox , Oy расположены в плоскости поперечного сечения; неподвижная географическая система координат $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$, начало O^* которой при $t = t_0$ находится в центре дна резервуара, ось $O^*\zeta^*$ направлена по вектору g_0 ускорения силы тяжести в противоположном ему направлении, ось $O^*\xi^*$ – по касательной к параллели в направлении запад-восток, $O^*\eta^*$ – по касательной к меридиану в направлении юг-север³. В начальный момент времени оси систем координат $Oxyz$ и $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$ соответственно параллельны.

Будем считать, что при землетрясении фундамент резервуара совершает поступательное (в общем случае горизонтальное и ветрикальное) движение вместе с грунтом, на котором он расположен. Тогда система координат $Oxyz$ будет совершать поступательное движение относительно системы координат $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$. В этом случае возбуждение волн в жидкости происходит под действием сил инерции поступательного движения резервуара, представимых в виде

$$\mathbf{I}_0(x, y, z, t) = -\rho \mathbf{w}_0(t) d\Omega,$$

где $\mathbf{w}_0(t)$ – вектор абсолютного ускорения точки O резервуара; $d\Omega$ – элементарный объем жидкой частицы.

Для решения гидродинамической задачи используется известный феноменологический подход, в соответствии с которым сначала решается задача о колебаниях идеальной жидкости, а затем производится учет вязкости путем введения диссипативных членов в соответствующие уравнения для обобщенных координат и квазискоростей жидкости.

В рамках модели идеальной жидкости общая нелинейная начально-краевая задача о колебаниях жидкости в поступательно перемещающемся резервуаре имеет следующий вид (в относительных цилиндрических координатах) [18]:

уравнение Лапласа –

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$(r, \theta, z) \in \Omega(t), \quad t \in (t_0, t_1], \quad (10)$$

условие на боковой поверхности бака –

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0, \quad r = R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad -\frac{l}{2} < z < \frac{l}{2},$$

³Вращением Земли пренебрегаем, а поверхность Земли считаем сферической. В этом случае ось $O^*\zeta^*$ направлена по радиусу Земли, одновременно являющемуся вертикалью места.

условие на дне бака –

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z = -\frac{l}{2}, \quad (11)$$

кинематическое условие на свободной поверхности жидкости –

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \\ 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z = \zeta(r, \theta, t), \quad (12)$$

динамическое условие на свободной поверхности жидкости –

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] - \\ - [(\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0)_x r \cos \theta + (\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0)_y r \sin \theta + \\ + (\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0)_z z] = C(t) - \frac{p_0}{\rho}, \\ 0 \leq r < R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad z = \zeta(r, \theta, t), \quad (13)$$

начальные условия –

$$\varphi(r, \theta, z, t_0) = \varphi^0(r, \theta, z), \\ (\Delta \varphi^0(r, \theta, z) = 0, \quad (r, \theta, z) \in \Omega(t_0)), \\ \zeta(r, \theta, t_0) = \zeta^0(r, \theta), \quad (14)$$

условие постоянства объема жидкости –

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(r, \theta, t)} r dr d\theta dz = V = const. \quad (15)$$

Здесь r, θ – полярные радиус и угол соответственно, определяемые из соотношений

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \quad (0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \theta < 2\pi);$$

$\varphi(r, \theta, z, t)$ – потенциал относительной скорости $\mathbf{u}(r, \theta, z, t)$ жидкости; $p_0 = const$ – постоянное давление на свободной поверхности жидкости; $\varphi^0(r, \theta, z), \zeta^0(r, \theta)$ – значения искомых функций в начальный момент $t = t_0$; $V = const$ – объем жидкости; $C(t)$ – произвольная функция времени. В динамическом условии (13) через $(\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0)_x, (\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0)_y, (\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0)_z$ обозначены проекции вектора $(\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0)$ кажущегося ускорения силы тяжести на оси x, y, z соответственно. Возмущающее воздействие от землетрясения входит в динамическое условие (13) через ускорение грунта $\mathbf{w}_0(t)$.

Искомыми являются потенциал $\varphi(r, \theta, z, t)$ и свободная поверхность $\zeta(r, \theta, t)$. Остальные параметры $p_0, C(t), \rho, \mathbf{g}_0, \mathbf{w}_0(t), V, t_0, t_1, H$, а также размеры l, R поверхности полости считаются заданными.

Замечание 1. В работе [4], результаты которой используются ниже, исходная начально–краевая задача формулировалась в терминах потенциала $\Phi(r, \theta, z, t)$ абсолютных скоростей жидкости в подвижной системе координат, который связан с потенциалом относительной скорости соотношением

$$\Phi(r, \theta, z, t) = \mathbf{v}_0(t) \cdot \mathbf{r} + \varphi(r, \theta, z, t),$$

где $\mathbf{v}_0(t)$ – абсолютная скорость полюса O резервуара; $\mathbf{r} = (x, y, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z)$ – радиус-вектор жидкой частицы относительно точки O .

В общем случае решение начально–краевой задачи (10) – (15) представляется через отрезки двойных рядов в виде

$$\varphi(r, \theta, z, t) = \\ = \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{m_i} [P_{ij}(t) \cos(i\theta) + R_{ij}(t) \sin(i\theta)] \psi_{ij}(r, z), \quad (16)$$

$$\zeta(r, \theta, t) =$$

$$= \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{m_i} [p_{ij}(t) \cos(i\theta) + r_{ij}(t) \sin(i\theta)] \psi_{ij}(r, h_0), \quad (17)$$

где $\psi_{ij}(r, z)$ – координатные функции; h_0 – начальный уровень жидкости, отсчитываемый от плоскости Oxy ; $p_{ij}(t), r_{ij}(t)$ и $P_{ij}(t), R_{ij}(t)$ – искомые обобщенные координаты и квазискорости жидкости соответственно.

Замечание 2. Верхний предел m_i суммирования по j является функцией индекса i и зависит от выбора аппроксимирующего выражения, диктуемого конкретной вычислительной задачей.

Координатные функции $\psi_{ij}(r, z)$ являются нормированными решениями соответствующей линейной задачи о свободных колебаниях жидкости в цилиндрической полости и имеют вид

$$\psi_{ij}(r, z) = \frac{J_i(k_i^{(j)} r) \operatorname{ch}[k_i^{(j)}(z + \frac{l}{2})]}{J_i(k_i^{(j)} R) \operatorname{ch}(k_i^{(j)} H)}. \quad (18)$$

Здесь J_i – функции Бесселя 1-го рода и целого порядка i , а параметры $k_i^{(j)}$ определяются как корни уравнения

$$\left. \frac{dJ_i(k_i^{(j)} r)}{dr} \right|_{r=R} = 0.$$

Если обозначить через $a'_{i,j}$ j -й нуль ($j = 1, 2, \dots$) производной $J'_i(x)$ от i -ой функции $J_i(x)$ ($i = 0, 1, \dots$), то формула для определения параметра $k_i^{(j)}$ будет следующей:

$$k_i^{(j)} = \frac{a'_{i,j}}{R}. \quad (19)$$

Таким образом, задача сводится к нахождению функций $p_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$ и $P_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$. Эти Функции $p_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$ и $P_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$ разыскиваются как решения некоторой системы уравнений, в общем случае интегро-дифференциальных и нелинейных.

2. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ

Система уравнений для случая нелинейных колебаний жидкости при горизонтальных перемещениях резервуара построена с помощью вариационного метода в работе [18] и имеет следующий матричный вид:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & A(\beta) \\ A^T(\beta) & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} R \\ \beta \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} B(\beta) & 0 \\ 0 & [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_z K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \beta \end{bmatrix} - \\ & - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ S(\beta, R) \end{bmatrix} + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_x \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} + \\ & + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_y \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \end{bmatrix} + \left(C(t) - \frac{p_0}{\rho} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (20)$$

Здесь неизвестными являются вектор-столбцы

$$\beta(t) = (\beta_0(t), \dots, \beta_N(t)),$$

$$R(t) = (R_0(t), \dots, R_N(t)),$$

компоненты $\beta_i(t)$, $R_k(t)$ которых связаны с коэффициентами $p_{ij}(t)$, $r_{ij}(t)$, $P_{ij}(t)$, $R_{ij}(t)$ сумм (16), (17) соотношениями

$$\begin{aligned} \varphi(r, \theta, z, t) &= \sum_{m=0}^N R_m(t) \varphi_m(r, \theta, z) = \\ &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{m_i} [P_{ij}(t) \cos(i\theta) + R_{ij}(t) \sin(i\theta)] \psi_{ij}(r, z), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} \zeta(r, \theta, t) &= \sum_{m=0}^N \beta_m(t) f_m(r, \theta) = \\ &= \sum_{i=0}^I \sum_{j=1}^{m_i} [p_{ij}(t) \cos(i\theta) + r_{ij}(t) \sin(i\theta)] \psi_{ij}(r, h_0). \end{aligned} \quad (22)$$

В формулах (21), (22) простые (с одним индексом) последовательности $\{\varphi_m\}$, $\{f_m\}$ определяются через двойные последовательности цилиндрических гармоник из соотношений

$$\{\varphi_m(r, \theta, z)\}_{m=0}^N =$$

$$= \{\cos(i\theta) \psi_{ij}(r, z), \sin(i\theta) \psi_{ij}(r, z)\}, \quad (23)$$

$$\{f_m(r, \theta)\}_{m=0}^N = \{\varphi_m(r, \theta, z)|_{z=h_0}\}_{m=0}^N, \quad (24)$$

где N — число удерживаемых слагаемых, одинаковое для аппроксимаций потенциала и свободной поверхности. Связь простых и двойных символов определяется способом нумерации "по строкам" элементов таблицы гармоник с двумя входами (в общем случае бесконечной) вида

$$\begin{bmatrix} \varphi_{01} & 0 & \varphi_{02} & 0 & \dots \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & \dots \\ \varphi_{21} & \varphi_{22} & \varphi_{23} & \varphi_{24} & \dots \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & \varphi_{33} & \varphi_{34} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}, \quad (25)$$

где

$$\varphi_{ik} = \begin{cases} \psi_{ij} \cos(i\theta), & \text{если } k = 2j - 1, \\ \psi_{ij} \sin(i\theta), & \text{если } k = 2j, \end{cases} \quad (i, j = 1, 2, \dots).$$

Элементы матриц A (T — символ транспонирования), B , K_0 , K_1 , K_2 , S , F в уравнении (20) задаются следующими формулами: матрица $A = (a_{ki})$ —

$$\begin{aligned} a_{ki} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(r, \theta) \varphi_k \left[r, \theta, \sum_{n=0}^N \beta_n f_n(r, \theta) \right] r d\theta dr, \\ &k = 0, 1, \dots, N, \quad i = 0, 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (26)$$

матрица $B = (b_{kj})$ —

$$\begin{aligned} b_{kj} &= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{\zeta(r, \theta, \beta)} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j r dz d\theta dr, \\ &k, j = 0, 1, \dots, N; \end{aligned} \quad (27)$$

матрица K_0 и вектора K_1 , K_2 —

$$\begin{aligned} K_0 = (k_{ij}) &= \left(\rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(r, \theta) f_j(r, \theta) r d\theta dr \right), \\ &i, j = 0, 1, \dots, N; \end{aligned}$$

$$K_1 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_0(r, \theta) \\ f_1(r, \theta) \\ \vdots \\ f_N(r, \theta) \end{bmatrix} r^2 \cos(\theta) d\theta dr;$$

$$K_2 = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \begin{bmatrix} f_0(r, \theta) \\ f_1(r, \theta) \\ \vdots \\ f_N(r, \theta) \end{bmatrix} r^2 \sin(\theta) d\theta dr; \quad (28)$$

матрицы $S^{(i)} = (s_{kj}^{(i)})$ вектора квадратичных форм и соотношений $S(\beta, R) —$

$$s_{kj}^{(i)} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(r, \theta) \left[\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j \right]_{z=\zeta(r, \theta, \beta)} r d\theta dr, \\ k, j = 0, 1, \dots, N, \quad i = 0, 1, \dots, N; \quad (29)$$

вектор $F = (F_i) —$

$$F_i = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(r, \theta) r d\theta dr, \\ i = 0, 1, \dots, N. \quad (30)$$

Матрица K_0 в самом общем случае является диагональной вида

$$K_0 = \text{diag}(k_{00}, k_{11}, \dots, k_{NN}),$$

причем ее элементы определяются по формулам

$$k_{mm} = \rho \frac{\pi R^2}{2} \begin{cases} 2, & m = 0, \dots, m_0 - 1, \\ 1 - \left(\frac{i(m)}{k_{i(m)}^{(j(m))} R} \right)^2, & m = m_0, \dots, N, \end{cases} \quad (31)$$

где $(i(m), j(m)) —$ пара двойных индексов (ij) , соответствующих однократному индексу m в суммах (21), (22).

В свою очередь, вектор-столбцы $K_1 = (K_1^{(m)})$, $K_2 = (K_2^{(m)})$, определяющие свободные члены в правой части уравнений (20), имеют отличные от нуля элементы только в тех строках, которые соответствуют координатным функциям f_m из строки с номером $i = 1$ таблицы гармоник (25). Точнее,

$$K_1^{(m)} = \begin{cases} c_j, & m = m_0, m_0 + 2, m_0 + 4, \\ & \dots, m_0 + 2m_1 - 2, \quad j = j(m), \\ 0 & \text{для остальных } m = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (32)$$

$$K_2^{(m)} = \begin{cases} c_j, & m = m_0 + 1, m_0 + 3, m_0 + 5, \\ & \dots, m_0 + 2m_1 - 1, \quad j = j(m), \\ 0 & \text{для остальных } m = 0, \dots, N, \end{cases} \quad (33)$$

где

$$c_j = \frac{\rho \pi R^2}{k_1^{(j)}} \frac{J_2(k_1^{(j)} R)}{J_1(k_1^{(j)} R)} = \frac{\rho \pi R}{(k_1^{(j)})^2}, \quad j = 1, 2, \dots, m_1. \quad (34)$$

В формуле (34) последнее равенство получается в результате исключения $J_2(x)$, а затем $J_0(x)$ с помощью известных зависимостей

$$J_2(x) = \frac{2J_1(x)}{x} - J_0(x), \quad xJ_1'(x) = xJ_0(x) - J_1(x)$$

$$J_1'(k_1^{(j)} R) = 0.$$

Таким образом, у векторов K_1, K_2 количество отличных от нуля компонент полностью определяется числом m_1 элементов в первой строке таблицы нулей следующего вида:

$$\begin{bmatrix} k_0^{(1)} & k_0^{(2)} & \dots & k_0^{(m_0)} \\ k_1^{(1)} & k_1^{(2)} & \dots & k_1^{(m_1)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ k_I^{(1)} & k_I^{(2)} & \dots & k_I^{(m_I)} \end{bmatrix}. \quad (35)$$

У вектора K_1 отличны от нуля только компоненты, соответствующие функциям

$$f_{m_0}, f_{m_0+2}, \dots, f_{m_0+2m_1-2},$$

а у вектора $K_2 —$ соответствующие функциям

$$f_{m_0+1}, f_{m_0+3}, \dots, f_{m_0+2m_1-1}$$

из первой строки таблицы гармоник (25), причем их значения на соответствующих местах совпадают, т.е. $K_1^{(m)} = K_2^{(m+1)} = c_j$ ($j = j(m)$).

Наконец, вектор F в уравнении (20) имеет только одну отличную от нуля компоненту:

$$F = (\rho \pi R^2, 0, \dots, 0)^T. \quad (36)$$

Из уравнения (20) видно, что сейсмические воздействия на жидкость обусловлены проекциями w_{0x}, w_{0y}, w_{0z} вектора ускорения $\mathbf{w}_0(t)$ центра резервуара O на подвижные оси x, y, z . В силу параллельности осей x, y, z и ξ^*, η^*, ζ^* можно написать

$$(w_{0x}(t), w_{0y}(t), w_{0z}(t)) = (w_{0\xi}(t), w_{0\eta}(t), w_{0\zeta}(t)),$$

где $w_{0\xi}(t), w_{0\eta}(t), w_{0\zeta}(t) —$ проекции ускорения грунта (полагаемые известными из акселерограмм) на оси географической системы координат $O^*\xi^*\eta^*\zeta^*$, т.е. на направления запад-восток, юг-север и вертикали места соответственно.

Произвольная функция $C(t)$ из интеграла Лагранжа-Коши выбирается ниже.

Начальные условия при $t = 0$ в сейсмических задачах будем полагать следующими:

$$(\beta_0(0), \beta_1(0), \dots, \beta_N(0)) = (h_0, 0, \dots, 0),$$

$$(R_0(0), R_1(0), \dots, R_N(0)) = (0, 0, \dots, 0). \quad (37)$$

Эти условия, очевидно, соответствуют положению равновесия жидкости в начальный момент времени.

3. ОБЩИЕ УРАВНЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ ЖИДКОСТИ

Выведем из уравнений (20) общие линейные уравнения колебаний жидкости, общность которых заключается в том, что они справедливы для любых аппроксимаций (16), (17) и при любом законе поступательных движений резервуара. Эти уравнения позволят, в частности, получить уравнения для аппроксимаций из работ [4, 5].

Пусть в процессе колебаний свободная поверхность $z = \zeta(r, \theta, t)$ мало отклоняется от плоскости $z = h_0$. Это равносильно допущению

$$\frac{l}{2} + \zeta(r, \theta, t) \simeq H.$$

Учитывая здесь представление свободной поверхности (22), получаем соотношение

$$\frac{l}{2} + \sum_{m=0}^N \beta_m(t) f_m(r, \theta) \simeq H.$$

Но из условия постоянства объема жидкости следует, что должно быть [18]

$$\beta_0(t) = p_{01}(t) \equiv h_0.$$

Тогда, в силу $H = \frac{l}{2} + h_0$, из предыдущего соотношения следует, что при малых отклонениях свободной поверхности от положения равновесия обобщенные координаты жидкости $\beta_i(t)$ ($i = 1, \dots, N$) должны удовлетворять условию

$$H + \sum_{m=1}^N \beta_m(t) f_m(r, \theta) \simeq H. \quad (38)$$

В соответствии с этим полагаем, что величины $|\beta_i(t)|$ ($i = 1, \dots, N$) малы (величина $|\beta_0(t)|$ не обязательно мала). Кроме того, полагаем малыми квазискорости $R_i(t)$ ($i = 0, \dots, N$), а также производные по времени от $\beta_i(t)$ и $R_i(t)$. Членами выше первого порядка малости относительно этих величин будем пренебрегать.

При сделанных предположениях сохраним в уравнениях (20) лишь линейные члены с $\beta_i, R_i, \dot{\beta}_i, R_i$. Тогда в этих уравнениях исчезнут квадратичные формы от переменных R_i , т.е. члены $S(\beta, R)$, и, кроме того, коэффициенты a_{ki}, b_{kj} примут вид

$$a_{ki} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(r, \theta) \varphi_k(r, \theta, h_0) r d\theta dr, \quad (39)$$

$$k, i = 0, 1, \dots, N;$$

$$b_{kj} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_{-l/2}^{h_0} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j r dz d\theta dr, \quad (40)$$

$$k, j = 0, 1, \dots, N.$$

Вычислим коэффициенты a_{ki}, b_{kj} в линейном случае.

В формуле (39) под интегралом стоит функция $\varphi_k(r, \theta, h_0)$, которая в силу (24) равна $f_k(r, \theta)$. Поэтому в линейном случае элементы матрицы A удовлетворяют соотношениям

$$a_{ki} = \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_i(r, \theta) f_k(r, \theta) r d\theta dr = k_{ki},$$

$$k, i = 0, 1, \dots, N.$$

Отсюда и из первой формулы (28) следует, что в линейном случае

$$A = K_0, \quad (41)$$

т. е. матрица A совпадает с матрицей K_0 из правой части уравнения (20).

Обратимся к формулам (40) для элементов b_{kj} . Воспользуемся формулой Грина, которая в случае жидкого объема $\Omega(t)$ со свободной границей $\Sigma(t)$ приводит к соотношению

$$b_{kj} = \rho \int_{\Omega(t)} \nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j d\Omega = \rho \int_{\Sigma(t)} \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma.$$

В линейном случае свободная поверхность $\Sigma(t)$ в последнем интеграле заменяется кругом в плоскости $z = h_0$. Поэтому

$$b_{kj} = \rho \int_{\Sigma(t)} \varphi_j \frac{\partial \varphi_k}{\partial n} d\Sigma =$$

$$= \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} \varphi_j(r, \theta, h_0) \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \Big|_{z=h_0} r d\theta dr. \quad (42)$$

С помощью соотношений (23) и (18) находим, что

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \Big|_{z=h_0} = k_i^{(j)} \text{th}(k_i^{(j)} H) \frac{J_i(k_i^{(j)} r)}{J_i(k_i^{(j)} R)} \left\{ \begin{array}{l} \cos(i\theta) \\ \sin(i\theta) \end{array} \right\} =$$

$$= k_i^{(j)} \text{th}(k_i^{(j)} H) f_k(r, \theta), \quad k = 0, 1, \dots, N.$$

Подставляя эти выражения в (42) и используя (24), получаем соотношение

$$b_{kn} = k_i^{(j)} \text{th}(k_i^{(j)} H) \rho \int_0^R \int_0^{2\pi} f_n(r, \theta) f_k(r, \theta) r d\theta dr =$$

$$= k_i^{(j)} \text{th}(k_i^{(j)} H) k_{kn}, \quad k, n = 0, 1, \dots, N.$$

Отсюда, в силу диагональности матрицы $K_0 = (k_{kn})$, имеем следующий результат:

$$b_{kn} = \begin{cases} \varkappa_{ij} k_{nn}, & k = n, \\ 0, & k \neq n, \end{cases} \quad (k, n = 0, 1, \dots, N), \quad (43)$$

где $\varkappa_{ij} = k_i^{(j)} \text{th}(k_i^{(j)} H)$ — собственные числа спектральной гидродинамической задачи [18], а двойные индексы (i, j) являются функциями индекса k , т. е. $i = i(k)$, $j = j(k)$.

Таким образом, в линейном случае матрица B является диагональной, а ее элементы лишь множителями \varkappa_{ij} отличаются от соответствующих элементов матрицы K_0 .

Замечание 3. Тот же результат получается, если в (40) подставить выражение $\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j$ в цилиндрических координатах

$$\nabla \varphi_k \cdot \nabla \varphi_j = \frac{\partial \varphi_k}{\partial r} \frac{\partial \varphi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi_k}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_j}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \frac{\partial \varphi_j}{\partial z}$$

и при интегрировании бесселевых функций по r воспользоваться формулой интегрирования по частям, являющейся аналогом формулы Грина в одномерном случае, и уравнениями Бесселя для функций целого порядка $J_i(x)$.

Матрицу B удобно представить в виде

$$B = \Lambda \cdot K_0, \quad (44)$$

где

$$\Lambda = \text{diag}(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_N)$$

— диагональная матрица из последовательности спектральных чисел $\{\lambda_m\} = \{\varkappa_{ij}\}$. Согласование простых индексов m чисел λ_m с двойными индексами (i, j) чисел \varkappa_{ij} совпадает с согласованием простых и двойных индексов функций φ_m и ψ_{ij} в соотношениях (23). Заметим, что $\lambda_0 = k_0^{(1)} = 0$, т. е. нулевая строка матрицы B состоит только из нулей.

Теперь, используя выражения (41) и (44), представим уравнения (20) в линейном случае следующим образом:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 0 & K_0 \\ K_0 & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} R \\ \beta \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} \Lambda \cdot K_0 & 0 \\ 0 & [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_z K_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ \beta \end{bmatrix} + \\ & + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_x \begin{bmatrix} 0 \\ K_1 \end{bmatrix} + \\ & + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_y \begin{bmatrix} 0 \\ K_2 \end{bmatrix} + \left(C(t) - \frac{p_0}{\rho} \right) \begin{bmatrix} 0 \\ F \end{bmatrix}. \quad (45) \end{aligned}$$

Порядок системы уравнений (45), равный $2N+2$, можно уменьшить на 2. Пользуясь вырожденностью матрицы Λ ($\lambda_0 = 0$), получаем из группы уравнений по β_i уравнение относительно обобщенной координаты β_0 :

$$k_{00} \dot{\beta}_0 = 0.$$

Аналогично, из группы уравнений по R_i получаем уравнение относительно квазискорости R_0 :

$$\begin{aligned} k_{00} \dot{R}_0 = & [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_z k_{00} \beta_0 + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_x K_1^{(0)} + \\ & + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_y K_2^{(0)} + \left(C(t) - \frac{p_0}{\rho} \right) F_0. \end{aligned}$$

Полагая произвольную функцию из интеграла Лагранжа – Коши равной

$$C(t) = \frac{p_0}{\rho} - [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_x \frac{K_1^{(0)}}{F_0} - [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_y \frac{K_2^{(0)}}{F_0},$$

интегрируя эти уравнения и учитывая начальные условия (37), сразу находим две из искоемых функций, а именно:

$$\beta_0(t) \equiv h_0, \quad R_0(t) = h_0 \int_0^t [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_z dt. \quad (46)$$

Остальные функции β_i , R_i ($i = 1, \dots, N$) должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$\dot{\beta}_n = \lambda_n R_n,$$

$$\begin{aligned} k_{nn} \dot{R}_n = & [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_z k_{nn} \beta_n + \\ & + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_x K_1^n + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_y K_2^n, \\ & n = 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Исключая из этих уравнений R_n , получаем искомую общую систему линейных колебаний жидкости, а именно:

$$\begin{aligned} & \ddot{\beta}_n - [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_z \lambda_n \beta_n = \\ & = \frac{\lambda_n}{k_{nn}} \left\{ [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_x K_1^{(n)} + [\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)]_y K_2^{(n)} \right\}, \\ & n = 1, \dots, N. \quad (47) \end{aligned}$$

Пример. Получим из (47) уравнения Д.Е.Охочимского [4], которые были положены в основу исследований сейсмических колебаний жидкости в [5]. Полагаем, что резервуар совершает поступательное движение вдоль оси y со скоростью $v_0(t)$. Тогда в проекциях на оси x, y, z имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_0 = & (0, 0, -g), \quad \mathbf{w}_0(t) = (0, \dot{v}_0(t), 0), \\ (\mathbf{g}_0 - \mathbf{w}_0(t)) = & (0, -\dot{v}_0(t), -g), \end{aligned}$$

где g — ускорение силы тяжести. Подставляя эти выражения в (47), приходим к уравнениям

$$\ddot{\beta}_n + g\lambda_n\beta_n = -\dot{v}_0(t)\frac{\lambda_n}{k_{nn}}K_2^{(n)}, \quad n = 1, \dots, N. \quad (48)$$

Для уточнения вида правых частей этих уравнений положим теперь

$$m_0 = 1, \quad m_1 = 3, \quad m_2 = m_3 = \dots = 0.$$

Соответствующие таблица нулей (35) и таблица гармоник (25) будут следующими:

$$\begin{bmatrix} k_0^{(1)} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ k_1^{(1)} & k_1^{(2)} & k_1^{(3)} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad (k_0^{(1)} = 0),$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \varphi_{11} & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} & \varphi_{15} & \varphi_{16} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} \varphi_{11} &= \psi_{11} \cos(\theta), & \varphi_{12} &= \psi_{11} \sin(\theta), \\ \varphi_{13} &= \psi_{12} \cos(\theta), & \varphi_{14} &= \psi_{12} \sin(\theta), \\ \varphi_{15} &= \psi_{13} \cos(\theta), & \varphi_{16} &= \psi_{13} \sin(\theta). \end{aligned}$$

В соответствии с этими таблицами получаем следующие представления искомых функций:

$$\begin{aligned} \varphi &= \sum_{k=0}^N R_k(t)\varphi_k(r, \theta, z) = \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^3 [P_{ij} \cos(i\theta) + R_{ij} \sin(i\theta)]\psi_{ij}(r, z), \\ \zeta &= \sum_{k=0}^N \beta_k(t)f_k(r, \theta) = \\ &= \sum_{i=0}^1 \sum_{j=1}^3 [p_{ij} \cos(i\theta) + r_{ij} \sin(i\theta)]\psi_{ij}(r, h_0). \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь решением задачи о соответствии одинарных и двойных индексов из работы [17, стр.32–33]

1) Номер N последнего члена одинарной последовательности будет

$$N = m_0 + 2 \sum_{i=1}^1 m_i - 1 = 2m_1 = 6.$$

2) Одинарный номер k для элементов i -ой строки таблицы гармоник удовлетворяет неравенству

$$a_i \leq k \leq b_i,$$

где

$$a_i = m_0 + 2 \sum_{n=1}^{i-1} m_n, \quad b_i = m_0 + 2 \sum_{n=1}^i m_n - 1.$$

В рассматриваемом случае $i = 1$. Поэтому

$$a_1 = m_0 + 2 \sum_{n=1}^{1-1} m_n = m_0 + 0 = 1,$$

(если $i = 1$, сумму $\sum_{n=1}^{i-1} m_n$ полагаем равной нулю),

$$b_1 = m_0 + 2 \sum_{n=1}^1 m_n - 1 = 1 + 2 \cdot 3 - 1 = 6.$$

Таким образом, одинарный индекс k , соответствующий элементам первой строки таблицы гармоник, лежит в пределах

$$1 \leq k \leq 6.$$

Для элементов 0-ой строки $0 \leq k \leq m_0 - 1$, т.е. $k = 0$.

3) Соответствующие одинарному индексу k двойные индексы (i, j) пересчитываются по формулам

$$i(k) = 1, \quad j(k) = E\left[\frac{l(k)+2}{2}\right], \quad l(k) = k - a_i = k - 1,$$

где $E(x)$ — функция, равная наибольшему целому числу, не превосходящему x . В результате получается такое соответствие индексов k, l, j (индекс $k = 0$ соответствует нулевой строке и в этой таблице не присутствует):

$$\begin{aligned} k &= 1, 2, 3, 4, 5, 6 \\ l(k) &= 0, 1, 2, 3, 4, 5 \\ j(k) &= 1, 1, 2, 2, 3, 3. \end{aligned}$$

Соответствие функций $\beta_k(t)$ и $p_{ij}(t), r_{ij}(t)$ задается таблицей

$$\begin{array}{cccccccc} \beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \\ p_{01} & p_{11} & r_{11} & p_{12} & r_{12} & p_{13} & r_{13}. & \end{array}$$

Найдем теперь величины $\lambda_n, k_{nn}, K_2^{(n)}$ ($n = 0, 1, \dots, 6$), используя установленное соответствие индексов. С помощью формул (31), (33), (44) получаем следующие соотношения:

$$k_{00} = \rho\pi R^2, \quad k_{11} = k_{22} = \rho \frac{\pi R^2 (\zeta_1^2 - 1)}{2\zeta_1^2},$$

$$k_{33} = k_{44} = \rho \frac{\pi R^2 (\zeta_2^2 - 1)}{2\zeta_2^2},$$

$$k_{55} = k_{66} = \rho \frac{\pi R^2 (\zeta_3^2 - 1)}{2\zeta_3^2}, \quad \zeta_n = k_1^{(n)} R;$$

$$K_2^{(1)} = K_2^{(3)} = K_2^{(5)} = 0,$$

$$K_2^{(2)} = \frac{\rho\pi}{(k_1^{(1)})^2}, \quad K_2^{(4)} = \frac{\rho\pi}{(k_1^{(2)})^2}, \quad K_2^{(6)} = \frac{\rho\pi}{(k_1^{(3)})^2};$$

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = k_1^{(1)} \text{th}(k_1^{(1)} H),$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = k_1^{(2)} \text{th}(k_1^{(2)} H), \quad \lambda_5 = \lambda_6 = k_1^{(3)} \text{th}(k_1^{(3)} H).$$

Подставляя эти выражения в (48) и обобщая полученный результат на произвольное n , найдем, что для нечетных n координаты жидкости β_n удовлетворяют уравнениям

$$\ddot{\beta}_n + \omega_n^2 \beta_n = 0, \quad n = 1, 3, 5, \dots, \quad (49)$$

а для четных —

$$\ddot{\beta}_n + \omega_n^2 \beta_n = -2 \frac{\lambda_n R}{\zeta_n^2 - 1} \dot{v}_0(t), \quad n = 0, 2, 4, \dots, \quad (50)$$

где собственная частота жидкости

$$\omega_n = \sqrt{g\lambda_n}.$$

Заменяя в этих уравнениях переменные β_n по формуле

$$\beta_n = \frac{2\lambda_n R^2}{\zeta_n^2 - 1} \chi_n, \quad n = 2k, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

приходим к уравнениям Д.Е.Охоцимского [4, стр. 8, ф-ла (1.28)], в случае чисто поступательных перемещений резервуара угол поворота резервуара $\beta = 0$

$$\ddot{\chi}_k + \omega_k^2 \chi_k = -\frac{\dot{v}_0(t)}{R}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (51)$$

Замечание 4. Из уравнений (49) следует, что при нулевых начальных условиях $\beta_n(0) = 0$, $d\beta_n(0)/dt = 0$ координаты β_n с нечетными индексами n будут тождественно равны нулю и в разложении искомых функций $\varphi(r, \theta, z, t)$, $\zeta(r, \theta, t)$ сохранятся только антисимметричные формы колебаний, т.е. только члены с $\sin(\theta)$. В отличие от этого, при поступательных движениях резервуара вдоль оси x и нулевых начальных условиях сохранятся только симметричные формы колебаний с $\cos(\theta)$. Это обусловлено структурой векторов K_1 , K_2 в уравнениях (45).

Замечание 5. При ненулевых начальных условиях решения однородных уравнений (49) не будут

тождественными нулями и в разложении функции $\zeta(z, \theta, t)$ в общем случае нужно учитывать также симметричные формы с $\cos(\theta)$, т.е. сохранять β_n с нечетными n . Поэтому при случайных правых частях в уравнениях (50) с четными n свободная поверхность будет суммой детерминированной и случайной составляющих, а именно:

$$\zeta(r, \theta, t) = \sum_{k=0}^N \beta_k(t) f_k(r, \theta) =$$

$$= h_0 + \cos(\theta) \sum_{j=1}^{m_1} p_{1j}(t) \psi_{1j}(r, h_0) +$$

$$+ \sin(\theta) \sum_{j=1}^{m_1} r_{1j}(t) \psi_{1j}(r, h_0). \quad (52)$$

Здесь, как следует из приведенной выше таблицы соответствий, обобщенные координаты жидкости $\beta_n(t)$ с нечетными n равны функциям $p_{ij}(t)$, а с четными n — функциям $r_{ij}(t)$. Обобщенные координаты $p_{ij}(t)$ являются детерминированными, а $r_{ij}(t)$ — случайными функциями времени, поскольку являются решениями уравнений (49) и (50) соответственно. Н.А.Николаенко в [5] рассматривал частный случай, когда форма свободной поверхности в начальный момент времени $t = 0$ была такова, что начальные условия по $\beta_n(t)$ с нечетными n равнялись нулю. При этих условиях, в силу уравнений (49), в формуле (52) сумма при $\cos(\theta)$ равна нулю. Для уравнений же (50) рассматривались стационарный [5, стр. 98] и переходной [5, стр. 100] режимы колебаний жидкости, причем стационарный режим отвечал ненулевым начальным условиям, а переходной — нулевым начальным условиям по $\beta_n(t)$ с четными n .

4. ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Трактуя свободную поверхность жидкости как колебательное звено, на вход которого подается сейсмическое воздействие $-\dot{v}_0(t)$, а выходом является функция $\zeta(r, \theta, t)$, передокажем формулу для частотной характеристики $\Phi_\zeta(i\omega, t)$ этого колебательного звена [5] (стр.100). Формула понадобится в дальнейшем при получении выражения для дисперсии свободной поверхности.

Введем в уравнениях (51) вместо переменных Охоцимского χ_k переменные q_k с помощью соотношения

$$\chi_k(t) = \frac{q_k(t)}{R}$$

и учтем силы трения в жидкости по феноменологической теории. В результате получаются следующие уравнения для переменных q_n :

$$\ddot{q}_k(t) + 2\nu_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = -\dot{v}_0(t), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (53)$$

где ν_k – коэффициент затухания колебаний жидкости по k -й форме. Эти уравнения с точностью до обозначений совпадают с уравнениями работы [5, стр.94, Ф-ла (3.21)], которые в соответствии с замечанием 5 являются частным случаем более общих уравнений.

Формула свободной поверхности получается из соотношения (52) и после замены

$$\beta_k(t) = \frac{2\lambda_k R}{\zeta_k^2 - 1} q_k(t)$$

принимает вид

$$\zeta(r, \theta, t) = h_0 + 2R \sin(\theta) \sum_{j=1}^{m_1} \frac{\lambda_j}{\zeta_j^2 - 1} q_j(t) \psi_{1j}(r, h_0).$$

Подставив сюда вместо ψ_{1j} выражение (18), получив

$$\omega_j^2 q_j = -(\ddot{q}(t) + \dot{v}(t)), \quad (54)$$

и заметив, что

$$\lambda_j = k_1^{(j)} \operatorname{th}(k_1^{(j)} H), \quad \zeta_j = k_1^{(j)} R, \quad \omega_j^2 = g \lambda_j, \quad (55)$$

будем иметь (с точностью до обозначений и слагаемого h_0) выражение свободной поверхности в форме, полученной в работе [5, стр. 94, Ф-ла (3.20)], а именно:

$$\zeta(r, \theta, t) = h_0 - \frac{2R}{g} \sin(\theta) \sum_{j=1}^{m_1} a_j(r) [\ddot{q}_j(t) + \dot{v}_0(t)], \quad (56)$$

где

$$a_j(r) = \frac{J_1(\zeta_j r/R)}{(\zeta_j^2 - 1) J_1(\zeta_j)}.$$

Замечание 6. Соотношение (54) получается из уравнения (53), если в нем положить $\nu = 0$. В противоположность этому дальнейшие преобразования формулы (56) связаны с полным уравнением (53). В принципе, можно было бы избежать такой непоследовательности и выразить величину $\omega_j^2 q_j$, исходя из полного уравнения (53) при $\nu \neq 0$. Рассматриваемый ниже подход работы [5] оправдан при условии $\nu^2 \ll \omega_j^2$.

Введем в рассмотрение передаточную функцию $\Phi_{q_j}(\mu) = \Phi_j(\mu)$ уравнения (53), которая имеет вид [9, стр. 409]

$$\Phi_j(\mu) = \frac{1}{\mu^2 + 2\nu_j \mu + \omega_j^2}.$$

В частном случае, когда ускорение грунта равно так называемому *элементарному воздействию*, т. е.

$$\dot{v}_0(t) = e^{i\omega t} \quad (i = \sqrt{-1}),$$

а параметр $\mu = i\omega$, передаточная функция превращается в *частотную характеристику* вида

$$\Phi_j(i\omega) = -\frac{1}{-\omega^2 + 2i\nu_j \omega + \omega_j^2}. \quad (57)$$

(Знак минус перед дробью появляется в силу того, что правая часть уравнения равна $-\dot{v}_0(t)$.)

Общее решение уравнения (53) известным способом представляется в виде суммы его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения. Оно выражается через частотную характеристику и имеет вид

$$q_j(t) = \Phi_j(i\omega) \left(e^{i\omega t} + C_1 e^{\mu_1 t} + C_2 e^{\mu_2 t} \right), \quad (58)$$

где C_1, C_2 – зависящие от начальных условий произвольные постоянные; μ_1, μ_2 – корни характеристического уравнения, определяемые по формулам

$$\mu_1(j) = -\nu_j + i\sigma_j, \quad \mu_2(j) = -\nu_j - i\sigma_j, \quad \sigma_j^2 = \omega_j^2 - \nu_j^2. \quad (59)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением наиболее важного *переходного* режима колебаний жидкости, который соответствует нулевым начальным условиям, т.е.

$$t = 0, \quad q_j(0) = 0, \quad \dot{q}_j(0) = 0.$$

Для переходного режима постоянные C_1, C_2 в решении (58) принимают комплексные значения и определяются формулами

$$C_1 = \frac{\mu_2 - i\omega}{\mu_1 - \mu_2}, \quad C_2 = -\frac{\mu_1 - i\omega}{\mu_1 - \mu_2}. \quad (60)$$

Подставим решения (58) с учетом выражений (59), (60) в формулу (56). Для этого, разделяя действительные и мнимые части в комплексных множителях при $\Phi_j(i\omega)$ в (58), представим эти решения и их производные по времени в следующем виде (промежуточные выкладки опускаем):

$$q_j(t) = \Phi_j(i\omega) \left\{ \cos(\omega t) - e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t) - \frac{\nu_j}{\sigma_j} e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t) + i \left[\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\sigma_j} e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t) \right] \right\}, \quad (61)$$

$$\dot{q}_j(t) = \Phi_j(i\omega) \left\{ -\omega \sin(\omega t) + \frac{\omega_j^2}{\sigma_j} e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t) + \right.$$

$$+i\left[\omega \cos(\omega t) - \omega \cos(\sigma_j t) + \frac{\nu_j \omega}{\sigma_j} e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t)\right\}, \quad (62)$$

$$\ddot{q}_j(t) = \Phi_j(i\omega) \left\{ -\omega^2 \cos(\omega t) + \omega_j^2 e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t) - \frac{\nu_j \omega_j^2}{\sigma_j} e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t) + i\left[-\omega^2 \sin(\omega t) + 2\nu_j \omega e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t) + \frac{\omega_j^2 - 2\nu_j^2}{\sigma_j} \omega e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t)\right] \right\}. \quad (63)$$

Далее, из уравнения (53) получается представление

$$\ddot{q}_j(t) + \dot{v}_0(t) = -[2\nu_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t)] \quad \forall j. \quad (64)$$

Подстановка в правую часть равенства (64) комплексных выражений (61), (62) приводит к соотношению

$$- [2\nu_j \dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t)] = \Phi_j(i\omega) \left\{ -\omega_j^2 \cos(\omega t) + 2\nu_j \omega \sin(\omega t) + \omega_j^2 e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t) - \frac{\nu_j \omega_j^2}{\sigma_j} e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t) + i\left[-2\nu_j \omega \cos(\omega t) - \omega_j^2 \sin(\omega t) + 2\nu_j \omega e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t) + \frac{\omega}{\sigma_j} (\omega_j^2 - 2\nu_j^2) e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t)\right] \right\}. \quad (65)$$

Замечание 7. Этот же результат получается, если в выражение

$$\ddot{q}_j(t) + e^{i\omega t} = \Phi_j(i\omega) \left[\{ \dots \} + \frac{e^{i\omega t}}{\Phi_j(i\omega)} \right],$$

вытекающее из левой части равенства (64) при

$$\dot{v}_0(t) = e^{i\omega t},$$

подставить формулу (63) с учетом (57) (через $\{ \dots \}$ обозначено выражение в фигурных скобках в правой части равенства (63)).

Наконец, подставляя последовательно (65) в (64), а затем (64) в (56), получаем искомое выражение свободной поверхности в случае $\dot{v}_0(t) = e^{i\omega t}$ и нулевых начальных условий, а именно:

$$\zeta(r, \theta, t) = \Phi_\zeta(i\omega, t) = h_0 - \frac{2R}{g} \sin(\theta) \sum_{j=1}^{m_1} a_j(r) \Phi_j(i\omega) \left\{ -\omega_j^2 \cos(\omega t) + 2\nu_j \omega \sin(\omega t) + \omega_j^2 e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t) - \frac{\nu_j \omega_j^2}{\sigma_j} e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t) + i\left[-2\nu_j \omega \cos(\omega t) - \omega_j^2 \sin(\omega t) + \right. \right.$$

$$\left. + 2\nu_j \omega e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t) + \frac{\omega}{\sigma_j} (\omega_j^2 - 2\nu_j^2) e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t) \right\}. \quad (66)$$

В дальнейшем, не нарушая общности, полагаем

$$h_0 = 0,$$

что означает перенесение начала O жестко связанной с резервуаром системы координат $Oxyz$ в центр невозмущенной поверхности жидкости.

Функцию $\Phi_\zeta(i\omega, t)$ будем называть, по аналогии с параметрической передаточной функцией в теории нестационарных случайных процессов [20, стр. 210], *параметрической* частотной характеристикой свободной поверхности (с параметром t). Она обобщает понятие обычной частотной характеристики $\Phi_\zeta(i\omega)$. Ее дальнейшее применение связано с вычислением дисперсии случайной функции $\zeta(r, \theta, t)$, т.е. свободной поверхности при случайных сейсмических колебаниях грунта.

Замечание 8. Формула (66) по структуре совпадает с формулой для $\Phi_\zeta(i\omega, t)$ работы [5, стр. 100], т.е. действительные и мнимые части обеих формул являются линейными комбинациями функций $\cos(\omega t)$, $\sin(\omega t)$, $e^{-\nu_j t} \cos(\sigma_j t)$, $e^{-\nu_j t} \sin(\sigma_j t)$. Однако формула указанной работы ошибочна, поскольку содержит неправильные коэффициенты при этих функциях.

5. ДИСПЕРСИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Положим теперь, что ускорение грунта $\dot{v}_0(t) = w(t)$ при землетрясении является эргодическим стационарным случайным процессом. Рассматривая ускорение грунта как входной процесс линейной системы (53), выведем формулу для дисперсии выходного процесса $\zeta(r, \theta, t)$, т.е. свободной поверхности жидкости.

Дисперсия

$$\sigma_\zeta^2(t) = \langle \zeta^2(r, \theta, t) \rangle$$

(угловые скобки $\langle \dots \rangle$ напоминают об усреднении по времени одной реализации случайной функции, которое для эргодических случайных функций совпадает с усреднением по ансамблю реализаций) случайной функции $\zeta(r, \theta, t)$ связана с параметрической частотной характеристикой свободной поверхности $\Phi_\zeta(i\omega, t)$ и *двусторонней* спектральной плотностью

$$s_w(\omega), \quad -\infty < \omega < \infty$$

входного воздействия (ускорения грунта) $w(t)$ следующей основной формулой корреляционной теории случайных колебаний жидкости [5, стр. 32,

формула (1.86)]:

$$\sigma_{\zeta}^2(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\zeta}(i\omega, t)|^2 s_w(\omega) d\omega. \quad (67)$$

В дальнейшем для упрощения выкладок ограничимся только наиболее важной первой формой колебаний. Таким образом, вместо выражения (66) полагаем

$$\Phi_{\zeta}(i\omega, t) = -\frac{2R}{g} \sin(\theta) a_1(r) \Phi_1(i\omega) [\operatorname{Re}\Psi + i \operatorname{Im}\Psi], \quad (68)$$

где действительная и мнимая части в квадратных скобках определяются соотношениями

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\Psi &= -\omega_1^2 \cos(\omega t) + 2\nu_1 \omega \sin(\omega t) + \\ &+ \omega_1^2 e^{-\nu_1 t} \cos(\sigma_1 t) - \frac{\nu_1 \omega_1^2}{\sigma_1} e^{-\nu_1 t} \sin(\sigma_1 t), \\ \operatorname{Im}\Psi &= -2\nu_1 \omega \cos(\omega t) - \omega_1^2 \sin(\omega t) + \\ &+ 2\nu_1 \omega e^{-\nu_1 t} \cos(\sigma_1 t) + \frac{\omega}{\sigma_1} (\sigma_1^2 - \nu_1^2) e^{-\nu_1 t} \sin(\sigma_1 t). \end{aligned} \quad (69)$$

Используя свойство узкополосности системы и полагая спектральную плотность ускорения грунта $s_w(\omega)$ постоянной и равной $s_w(\omega_1)$, получаем из (67), после вынесения константы за знак интеграла, формулу

$$\sigma_{\zeta}^2(t) = \frac{s_w(\omega_1)}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{\zeta}(i\omega, t)|^2 d\omega. \quad (70)$$

В дальнейшем двусторонняя спектральная плотность случайных ускорений грунта считается известной. Тогда вычисление дисперсии свободной поверхности сводится к вычислению несобственного интеграла от квадрата модуля параметрической частотной характеристики свободной поверхности $\Phi_{\zeta}(i\omega, t)$.

Для нахождения квадрата модуля функции $\Phi_{\zeta}(i\omega, t)$ заметим, что

$$\begin{aligned} &|\Phi_{\zeta}(i\omega, t)|^2 = \\ &= \frac{4R^2}{g^2} \sin^2(\theta) a_1^2(r) |\Phi_1(i\omega)|^2 |\operatorname{Re}\Psi + i \operatorname{Im}\Psi|^2. \end{aligned} \quad (71)$$

Найдем квадрат модуля комплексной величины Ψ в выражении (68) с учетом (69). После выполнения необходимых действий и выделения в конечном выражении функций, зависящих от ω , приходим к следующему соотношению:

$$|\operatorname{Re}\Psi + i \operatorname{Im}\Psi|^2 =$$

$$\begin{aligned} &= \left[4\nu_1^2 + e^{-2\nu_1 t} \left(\frac{\nu_1^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) - 2\nu_1 \cos(\sigma_1 t) \right)^2 \right] \omega^2 + \\ &+ 4\nu_1 e^{-\nu_1 t} \left(\frac{\nu_1^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) - 2\nu_1 \cos(\sigma_1 t) \right) \omega^2 \cos(\omega t) - \\ &- 2 \frac{\omega_1^4}{\sigma_1} e^{-\nu_1 t} \sin(\sigma_1 t) \omega \sin(\omega t) + \\ &+ 2\omega_1^4 e^{-\nu_1 t} \left(-\cos(\sigma_1 t) + \frac{\nu_1}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) \right) \cos(\omega t) + \\ &+ \omega_1^4 \left[1 + e^{-2\nu_1 t} \left(\cos(\sigma_1 t) - \frac{\nu_1}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (72)$$

Подставим (72) и (71) в формулу (70), а затем заменим интеграл от суммы суммой интегралов. В результате получим следующее выражение для дисперсии свободной поверхности:

$$\begin{aligned} \sigma_{\zeta}^2(t) &= \frac{s_w(\omega_1)}{2\pi} \cdot \left\{ \left[4\nu_1^2 + \right. \right. \\ &+ e^{-2\nu_1 t} \left(\frac{\nu_1^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) - 2\nu_1 \cos(\sigma_1 t) \right)^2 \left. \right] I_1 + \\ &+ 4\nu_1 e^{-\nu_1 t} \left(\frac{\nu_1^2 - \sigma_1^2}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) - 2\nu_1 \cos(\sigma_1 t) \right) I_2 - \\ &- 2 \frac{\omega_1^4}{\sigma_1} e^{-\nu_1 t} \sin(\sigma_1 t) I_3 + \\ &+ 2\omega_1^4 e^{-\nu_1 t} \left(-\cos(\sigma_1 t) + \frac{\nu_1}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) \right) I_4 + \\ &+ \omega_1^4 \left[1 + e^{-2\nu_1 t} \left(\cos(\sigma_1 t) - \frac{\nu_1}{\sigma_1} \sin(\sigma_1 t) \right)^2 \right] I_5 \left. \right\}. \end{aligned} \quad (73)$$

где введены обозначения

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(i\omega)|^2 \omega^2 d\omega, \quad (74)$$

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(i\omega)|^2 \omega^2 \cos(\omega t) d\omega, \quad (75)$$

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(i\omega)|^2 \omega \sin(\omega t) d\omega, \quad (76)$$

$$I_4 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(i\omega)|^2 \cos(\omega t) d\omega, \quad (77)$$

$$I_5 = \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_1(i\omega)|^2 d\omega. \quad (78)$$

Заметим, что во всех интегралах квадрат модуля функции $\Phi_1(i\omega)$ определяется, в силу (57), формулой

$$|\Phi_1(i\omega)|^2 = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_1^2)^2 + 4\nu_1^2 \omega^2}. \quad (79)$$

Остается выразить несобственные интегралы I_k через параметры колебаний жидкости ν_1, ω_1 .

6. ОБЩАЯ ФОРМУЛА ДЛЯ НЕСОБСТВЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА I_k

Интегралы I_k ($k = 1, \dots, 5$) относятся к классу интегралов вида

$$I_k = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g_k(\omega)}{h_2(i\omega)h_2(-i\omega)} d\omega, \quad \omega \in R,$$

где $g_k(\omega)$ – действительные четные функции вещественной переменной ω , а $h_2(i\omega)$, $h_2(-i\omega)$ – полиномы второй степени от ω с комплексными коэффициентами, причем

$$h_2(i\omega) = -\omega^2 + 2i\nu_1\omega + \omega_1^2,$$

$$h_2(-i\omega) = -\omega^2 - 2i\nu_1\omega + \omega_1^2.$$

Общие формулы для таких интегралов в случае дробно-рациональных подынтегральных функций получены в [21, стр. 353] и использовались в связи с задачей определения дисперсии выходной переменной стационарного колебательного звена в [9, стр. 439]. С помощью этих формул можно вычислить интегралы I_1, I_5 . Однако подынтегральные функции интегралов $I_2 - I_4$ содержат тригонометрические множители, что приводит к необходимости отдельного рассмотрения интегралов этого класса. Вычислим их с помощью теоремы Коши о вычетах (см., например, [21]).

Применение теоремы о вычетах сводится к переходу от интегралов I_k по вещественной переменной ω к интегралам в области комплексного переменного z вида

$$J_k = \int_{\gamma} f_k(z) dz = \int_{\gamma} \frac{g_k(z)}{h_2(z)h_2(-z)} dz, \quad (80)$$

где в числителе $g_k(z)$ – некоторые вспомогательные целые аналитические функции комплексного переменного z , а в знаменателе

$$h_2(z) = -z^2 + 2i\nu_1z + \omega_1^2,$$

$$h_2(-z) = -z^2 - 2i\nu_1z + \omega_1^2.$$

Заметим, что построение функций $g_k(z)$ не сводится к простой замене ω на z , как это делается в случае функций $h_2(i\omega)$, $h_2(-i\omega)$. Контур интегрирования γ , проходимый против часовой стрелки, состоит из верхней полуокружности C_R окружности $|z| = R$ радиуса R (не путать с радиусом резервуара) и отрезка действительной оси $[-R, R]$. Полуокружность C_R охватывает нули полинома $h_2(z)$, которые расположены в верхней полуплоскости в точках

$$z_1 = \sigma_1 + i\nu_1, \quad z_2 = -\sigma_1 + i\nu_1.$$

Нули полинома $h_2(-z)$ расположены в комплексно сопряженных точках

$$z_1^* = \sigma_1 - i\nu_1, \quad z_2^* = -\sigma_1 - i\nu_1.$$

Такое расположение нулей знаменателя подынтегральной функции $f_k(z)$ позволяет представить ее в виде следующего разложения на простые дроби:

$$f_k(z) = \frac{g_k(z_1)A_1}{z - z_1} + \frac{g_k(z_2)A_2}{z - z_2}, \quad (81)$$

где

$$A_1 = \frac{1}{8\nu_1\sigma_1\mu_1}, \quad A_2 = \frac{-1}{8\nu_1\sigma_1\mu_2}, \quad (82)$$

а $\mu_{1,2} = -\nu_1 \pm i\sigma_1$ – корни (59) характеристического уравнения

$$\mu_1^2 + 2\nu_1\mu + \omega_1^2 = 0$$

системы (53) для 1-ой формы колебаний.

Из выражений (81) и (82) следует, что вычеты функции $f_k(z)$ в ее простых полюсах определяются формулами

$$\operatorname{res} f_k(z_1) = \frac{g_k(z_1)}{8\nu_1\sigma_1\mu_1}, \quad \operatorname{res} f_k(z_2) = \frac{-g_k(z_2)}{8\nu_1\sigma_1\mu_2}. \quad (83)$$

Применим к интегралу (80) теорему Коши о вычетах, согласно которой

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} f_k(z) dz &= \int_{\gamma} \frac{g_k(z)}{h_2(z)h_2(-z)} dz = \\ &= 2\pi i [\operatorname{res} f_k(z_1) + \operatorname{res} f_k(z_2)]. \end{aligned} \quad (84)$$

Далее, мероморфные функции $f_k(z)$ таковы, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f_k(z) dz = 0.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\gamma} f_k(z) dz &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f_k(z) dz + \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f_k(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(x) dx. \end{aligned}$$

(В последнем интеграле переменная x равна вещественной части комплексной переменной $z = x + iy$, но сама подынтегральная функция $f_k(x)$ принимает комплексные значения.) Переходя в равенстве (84) к пределу при $R \rightarrow \infty$, учитывая (83) и последние соотношения, приходим к следующей формуле (вещественная переменная x заменена на вещественную переменную ω):

$$J_k = \int_{-\infty}^{\infty} f_k(\omega) d\omega = i \frac{\pi}{4\nu_1\sigma_1\omega_1^2} [g_k(z_1)\mu_2 - g_k(z_2)\mu_1]. \quad (85)$$

Значения несобственных интегралов I_k получаются из выражения (85) после приравнивания действительных и мнимых частей. В результате приходим к искомой общей формуле, а именно:

$$I_k = \frac{\pi}{4\nu_1\sigma_1\omega_1^2} \begin{cases} \operatorname{Re} \{i [g_k(z_1)\mu_2 - g_k(z_2)\mu_1]\}, & \text{если } I_k = \operatorname{Re} J_k, \\ \operatorname{Im} \{i [g_k(z_1)\mu_2 - g_k(z_2)\mu_1]\}, & \text{если } I_k = \operatorname{Im} J_k. \end{cases} \quad (86)$$

Выражения интегралов (74)–(78), полученные с помощью (85), (86), имеют следующий вид (в скобках указаны вспомогательные функции $g_k(z)$):

$$I_1 = \frac{\pi}{2\nu_1}, \quad (g_1(z) = z^2); \quad (87)$$

$$I_2 = \frac{\pi}{2\nu_1\sigma_1} e^{-\nu_1 t} [-\sigma_1 \cos(\sigma_1 t) + \nu_1 \sin(\sigma_1 t)], \quad (g_2(z) = z^2 e^{izt}); \quad (88)$$

$$I_3 = \frac{\pi}{2\nu_1\sigma_1} e^{-\nu_1 t} \sin(\sigma_1 t), \quad (g_3(z) = z e^{izt}); \quad (89)$$

$$I_4 = \frac{\pi}{2\nu_1\sigma_1\omega_1^2} e^{-\nu_1 t} [\sigma_1 \cos(\sigma_1 t) + \nu_1 \sin(\sigma_1 t)], \quad (g_4(z) = e^{izt}); \quad (90)$$

$$I_5 = \frac{\pi}{2\nu_1\omega_1^2}, \quad (g_5(z) = 1). \quad (91)$$

Заметим, что выражения интегралов I_1, I_5 , полученные с помощью формулы (86), совпадают с выражениями, которые вытекают из формул для интегралов от дробно-рациональных функций из [9, стр. 863].

Теперь, после подстановки выражений (87) – (91) в (73) и некоторых преобразований, формула для дисперсии свободной поверхности жидкости приобретает вид

$$\sigma_\zeta^2(t) = \frac{1}{4\nu_1} s_w(\omega_1) A_1^2(\theta) a_1^2(r) \left\{ 4\nu_1^2 + \omega_1^2 + e^{-2\nu_1 t} \left[- (4\nu_1^2 + \omega_1^2) \cos^2(\sigma_1 t) + 2\frac{\nu_1}{\sigma_1} (4\nu_1^2 - \omega_1^2) \sin(\sigma_1 t) \cos(\sigma_1 t) + \frac{1}{\sigma_1^2} (5\nu_1^2\sigma_1^2 + \sigma_1^4 - 2\omega_1^4) \sin^2(\sigma_1 t) \right] \right\}, \quad (92)$$

где

$$A_1 = \frac{2R}{g} \sin(\theta).$$

Формула (92) справедлива для любых соотношений между ν_1 и ω_1 . На практике, однако, обычно

$$\nu \ll \sigma_1.$$

В этом случае

$$4\nu_1^2 + \omega_1^2 \approx \omega_1^2, \quad 4\nu_1^2 - \omega_1^2 \approx -\omega_1^2, \quad \sigma_1^2 = \omega_1^2 - \nu_1^2 \approx \omega_1^2.$$

Учитывая это в (92) и пренебрегая в фигурных скобках слагаемым, содержащим ν_1 , приходим к следующей расчетной формуле для дисперсии:

$$\sigma_\zeta^2(t) = A_1^2(\theta) a_1^2(r) s_w(\omega_1) \frac{\omega_1^2}{4\nu_1} (1 - e^{-2\nu_1 t}). \quad (93)$$

На практике часто используется нормированная спектральная плотность $G_w(\omega)$ ускорения грунта. Она связана со спектральной плотностью $s_w(\omega)$ соотношением

$$s_w(\omega) = D(0) G_w(\omega), \quad -\infty < \omega < \infty,$$

где $D(0)$ – дисперсия ускорения грунта. Подставив это выражение в (93), получим формулу

$$\sigma_\zeta^2(t) = A_1^2(\theta) a_1^2(r) D(0) G_w(\omega_1) \frac{\omega_1^2}{4\nu_1} (1 - e^{-2\nu_1 t}). \quad (94)$$

Здесь в явном виде присутствует дисперсия $D(0)$ ускорения грунта, связанная с коэффициентом сейсмичности k_c зависимостью

$$k_c = \frac{\sqrt{D(0)}}{g}.$$

Формула (93) совпадает (с точностью до обозначений) с формулой (7.2) работы [5, стр. 243], если в последней пренебречь величиной ν_1 по сравнению с $\omega_1^2/(4\nu_1)$.

7. ОЦЕНКА ПОВЕДЕНИЯ СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЖИДКОСТИ ПРИ ЗЕМЛЕТРЯСЕНИИ

Поведение свободной поверхности жидкости при землетрясении оценивается с помощью среднеквадратического отклонения σ_ζ случайной величины ζ (ординаты свободной поверхности) от ее математического ожидания (т.е. от равновесного положения свободной поверхности). Решается вопрос о вероятности гидродинамического удара, который может стать причиной сильных деформаций и даже разрушения оболочки резервуара. Выводы, естественно, должны носить вероятностный характер.

Из формулы (94) с учетом выражения (92) для A_1 среднеквадратическое отклонение выражается через параметры системы следующим образом:

$$\sigma_\zeta(t) = R \sin(\theta) a_1(r) \omega_1 k_c \sqrt{\frac{G_w(\omega_1)}{\nu_1}} (1 - e^{-2\nu_1 t}). \quad (95)$$

При колебаниях жидкости по первой форме максимальные смещения ее свободной поверхности имеют место на стенках полости, поэтому для цилиндрических координат будем полагать

$$r = R, \quad \theta = \frac{\pi}{2}.$$

По формуле (56) находим коэффициент $a_1(r)$:

$$a_1(r) = \frac{J_1(\zeta_1 r/R)}{(\zeta_1^2 - 1)J_1(\zeta_1)} \Big|_{r=R}.$$

Полагая здесь $\zeta_1 = 1.841$, получаем, что

$$a_1(R) = 0.418$$

(ζ_1 и $a_1(R)$ – безразмерные величины.)

Заметим, что коэффициент $a_1(R)$ для резервуаров всех радиусов один и тот же.

Первую собственную частоту колебаний жидкости ω_1 находим по известной формуле

$$\omega_i = \sqrt{g\lambda_i} = \sqrt{g\alpha_{ij}} = \sqrt{gk_i^{(j)} \text{th}(k_i^{(j)} H)},$$

которая в данном контексте вытекает из соотношений (50), (44), (43). Для первой частоты нужно положить

$$i = 1, \quad j = 1, \quad k_1^{(1)} = 1.841/R.$$

Рассмотрим вопрос о вычислении значения нормированной спектральной плотности $G_w(\omega_1)$. Следуя [5, 23], используем следующую аппроксимацию нормированной спектральной плотности:

$$G_w(\omega) = 2\alpha \frac{\omega^2 + m^2}{\omega^4 + 2a\omega^2 + m^4}, \quad (96)$$

где

$$m^2 = \alpha^2 + \beta^2, \quad a = \alpha^2 - \beta^2,$$

а α, β – параметры соответствующей нормированной корреляционной функции вида

$$K_w(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta t).$$

Параметры α, β определяются из статистического анализа акселерограмм. В [5, стр. 246] для первой собственной частоты жидкости, лежащей в диапазоне

$$2 \leq \omega_1 \leq 6 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1},$$

рекомендуется в формуле (96) полагать

$$\alpha = 7 \text{ с}^{-1}, \quad \beta = 18 \text{ с}^{-1}.$$

Если же ω_1 попадает в диапазон

$$0 \leq \omega_1 < 2 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1},$$

то формула (96) уже не верна. На основе анализа спектров известных землетрясений было предложено рассчитывать нормированную спектральную плотность по следующей формуле:

$$G_w(\omega_1) = \begin{cases} 0.01 \text{ с}, & \text{если } 1 \leq \omega_1 < 2 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}, \\ 0.04 \text{ с}, & \text{если } 2 \leq \omega_1 < 6 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}. \end{cases} \quad (97)$$

Эта формула предложена для тех случаев, когда резервуары сооружены на твердых грунтах. Для рыхлых и водонасыщенных грунтов (например, в г.Ниигата (Япония), подвергшемся сильному землетрясению 16 июня 1964 г. [23]) низкочастотные составляющие спектра ускорения могут быть весьма существенными, так что эта формула не годится. Для рыхлых грунтов в низкочастотной области будем полагать [5, стр. 246]

$$G_w(\omega_1) = 0.04 \text{ с}, \text{ если } 1 \leq \omega_1 < 2 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}. \quad (98)$$

Численный эксперимент. Проанализируем поведение свободной поверхности жидкости в резервуаре, который находился в г.Ниигата и был сильно деформирован во время землетрясения 16 июня 1964 г. Два таких резервуара после землетрясения изображены на рис. 1 из [5, стр. 261],

Габариты резервуара и уровень жидкости в нем, оцененные по правой фотографии рис. 1, примем следующими:

$$R = 10.0 \text{ м}, \quad l = 9.6 \text{ м}.$$

(В качестве меры длины принята величина 1.5 м, приблизительно равная высоте изображенного на этой же фотографии слегка нагнувшегося человека.) Уровень жидкости в резервуаре полагается равным расстоянию от основания резервуара до четко выраженной верхней линии недеформированной части резервуара. Приближенно считаем, что

$$H = 6.0 \text{ м}.$$

Коэффициент затухания колебаний жидкости, длительность землетрясения и ускорение силы тяжести принимаем равными

$$\nu_1 = 0.0015 \text{ с}^{-1}, \quad t = 30 \text{ с}, \quad g = 9.8 \text{ мс}^{-2}.$$

Коэффициент затухания ν_1 взят для мазута. По приведенной выше формуле находим, что угловая частота колебаний жидкости по первой форме будет

$$\omega_1 = 1.206 \text{ рад} \cdot \text{с}^{-1}.$$

Грунтовые условия учтем, выбрав соотношение (98), в силу которого

$$G_w(\omega_1) = 0.04 \text{ с}.$$

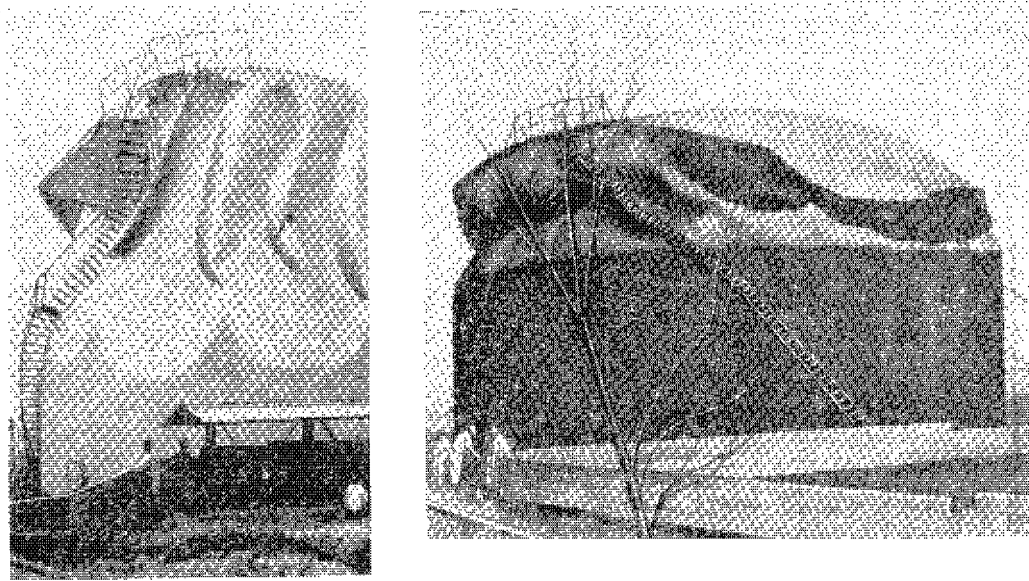


Рис. 1. Резервуары в г.Ниигата (Япония) после землетрясения 16 июня 1964 г.

Магнитуда рассматриваемого землетрясения составляла $M = 7.5$, глубина очага ≈ 40 км, расстояние до эпицентра $50 - 70$ км [25, 24]. По таблице зависимости между магнитудой, глубиной очага и балльностью в эпицентре (см. [24, табл. 1.2] находим, что интенсивность землетрясения составляла $8 - 9$ баллов. Поэтому принимаем, что коэффициент сейсмичности $k_c = 0.1$.

В результате по формуле (95) устанавливаем, что среднее квадратическое отклонение свободной поверхности σ_ζ в переходном режиме через 30 с после начала землетрясения будет

$$\sigma_\zeta(30) = 0.763 \text{ м.}$$

Для режима установившихся колебаний жидкости, когда переходные процессы в ней можно считать закончившимися и величина

$$\sqrt{(1 - e^{-2\nu_1 t})} \approx 1,$$

среднее квадратическое отклонение принимает максимальное значение и равно

$$\sigma_{\zeta \max} = 2.605 \text{ м.}$$

Полученные значения среднего квадратического отклонения случайного процесса $\zeta(t)$ (нестационарного в переходном режиме и стационарного в установившемся режиме) позволяют оценить вероятность удара жидкости о покрытие резервуара при сейсмической тряске. Для этого заметим, что вероятность события

$$\{|\zeta(t)| \leq l - H\},$$

состоящего в том, что модуль ординаты свободной поверхности не превзойдет расстояния между невозмущенной свободной поверхностью и покрытием, будет

$$\begin{aligned} P(|\zeta(t)| \leq l - H) &= P[-(l - H) \leq \zeta(t) \leq (l - H)] = \\ &= \Phi\left(\frac{l - H}{\sigma_\zeta}\right) - \Phi\left(-\frac{l - H}{\sigma_\zeta}\right) = 2\Phi\left(\frac{l - H}{\sigma_\zeta}\right), \end{aligned}$$

где $\Phi(u)$ – интеграл ошибок. Последнее соотношение справедливо в предположении, что процесс $\zeta(t)$ является гауссовским с нулевым математическим ожиданием. Подставив сюда найденные значения σ_ζ и воспользовавшись таблицей значений функции $\Phi(u)$, получим

$$P(|\zeta(30)| \leq l - H) = 2\Phi\left(\frac{3.6}{0.736}\right) = 2\Phi(4.89) \approx 1.0,$$

$$P(|\zeta(t)| \leq l - H) = 2\Phi\left(\frac{3.6}{2.605}\right) = 2\Phi(1.38) \approx 0.8324.$$

Но тогда вероятность противоположных событий будет следующей:

для переходного режима —

$$P(|\zeta(30)| > l - H) = 0,$$

для установившегося режима —

$$P(|\zeta| > l - H) = 0.1676.$$

Отсюда следует, что вероятность удара жидкости о покрытие практически равна нулю при переходном режиме (даже через 30 с после начала землетрясения) и заметно отличается от нуля (равна

0.1676) при установившейся сейсмической тряске резервуара.

Таким образом, если параметры системы (габариты резервуара, вид жидкости, уровень заполнения, параметры землетрясения, конструкция резервуара) близки к принятым в данном численном эксперименте, то одной из причин сильной деформации корпуса резервуара вполне мог быть удар жидкости о его покрытие вблизи стенки корпуса. Более определенные выводы можно было бы сделать на основании материалов о последствиях этого землетрясения, которыми, однако, автор в настоящее время не располагает.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе ряд известных линейных моделей сейсмических колебаний жидкости в цилиндрическом резервуаре дополнен нелинейной моделью. В основу гидродинамической части этой модели положена система уравнений типа Гамильтона. Сейсмическое воздействие на жидкость предлагается учитывать методом генерации синтезированных акселерограмм. Из предложенной нелинейной модели получена общая линейная модель для случая трехмерных поступательных движений грунта во время землетрясений. Как частный случай из этой общей модели, построенной на основе вариационного метода, выведена модель Охочимского для одномерных горизонтальных перемещений грунта, построенная на основе метода разделения переменных. Проверены и передоказаны формулы корреляционной теории Николаенко, описывающей с помощью модели Охочимского сейсмические колебания свободной поверхности жидкости. Выполнен численный эксперимент по вероятностной оценке перемещений свободной поверхности в резервуаре во время сильного землетрясения 16 июня 1964 года в г. Ниигата (Япония).

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке по проекту НИП N 0102U000917.

1. Рихтер Ч. Ф. Элементарная сейсмология. – М.: ИЛ, 1963. – 670 с.
2. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология. Теория и методы. В двух томах. – М.: Мир, 1983. – 880 с.
3. Jacobsen L. S. Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and of fluid surrounding a cylindrical pier // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1949. – 39, N 3. – P. 189–204.
4. Охочимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью // Прикладная математика и механика. – 1956. – 20, N 1. – С. 3–20.
5. Николаенко Н. А. Вероятностные методы динамического расчета машиностроительных конструкций. – М.: Машиностроение, 1967. – 368 с.
6. Jacobsen L. S., Ayre R. S. Hydrodynamic experiments with rigid cylindrical tanks subjected to transient motions // Bulletin of the Seismological Society of America. – 1951. – 41, N 4. – P. 313–346.
7. Гольденблат И. И., Николаенко Н. А. Расчет конструкций на действие сейсмических и импульсивных сил. – М.: Госстройиздат, 1961. – 320 с.
8. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною капельною жидкостью. Собр. соч. Т.2. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1949. – 152–309 с.
9. Пугачев В. С. Теория случайных функций. – М.: ФМ, 1962. – 883 с.
10. Штейнберг В. В., Сакс М. Ф., Аптикаев Ф. Ф. и др. Методы оценки сейсмических воздействий // Вопросы инженерной сейсмологии. – 1993. – Вып. 34. – С. 5–94.
11. Gedikli A., Erguven M. E. Seismic analysis of a storage tank with a baffle // Journal of Sound and Vibration. – 1999. – 223, N 1. – P. 141–155.
12. Jennings P., Housner G., Tsai N. Simulated earthquake motions for design purposes // Proc. IV World conf. earthquake eng. Santiago de Chile. – 1969. – Vol.1. – P. 145–160.
13. Premont A. The generation of spectrum compatible accelerograms for the design of nuclear power plants // Earthquake Eng. Struct. Dyn. – 1984. – Vol.12. – P. 481–497.
14. Строительные нормы и правила. СНиП II-7-81. – М.: Стройиздат, 1971. – 65 с.
15. Лягчер В. М., Капкан Ф. Д. Расчетные акселерограммы, отвечающие фиксированному спектру действия // Оценка сейсмостойкости условий площадок строительства атомных энергетических установок. – М.: Энергоатомиздат, 1987. – С. 79–87.
16. Николаенко Н. А. Динамика и сейсмостойкость конструкций, несущих резервуары. – М.: Госстройиздат, 1963. – 155 с.
17. Ньюмарк Н., Розенблюэт Э. Основы сейсмостойкого строительства. – М.: Стройиздат, 1980. – 344 с.
18. Золотенко Г. Ф. Компьютерное моделирование на основе уравнений типа Гамильтона нелинейных колебаний жидкости в цилиндрическом баке // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – 5, N 3. – С. 19–40.
19. Солодов А. В. Линейные системы автоматического управления с переменными параметрами. – М.: ФМ, 1962. – 324 с.
20. Лэнинг Дж. Х., Бэттин Р. Г. Случайные процессы в задачах автоматического управления. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – 387 с.
21. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1965. – 716 с.
22. Барштейн М. Ф. Приложение вероятностных методов к расчету сооружений на сейсмические воздействия // Строительная механика и расчет сооружений. – 1960. – N 2. – С. 6–14.
23. Корчинский И. Л., Бородин Л. А., Гроссман А. Б. и др. Сейсмостойкое строительство зданий. – М.: Высшая школа, 1971. – 319 с.
24. Поляков С. В. Последствия землетрясения в г. Ниигата (Япония) в 1964 г. – М.: Стройиздат, 1967. – 188 с.