

О напряженном состоянии трансверсально-изотропной среды с произвольно ориентированной сфероидальной полостью или дискообразной трещиной под внутренним давлением

В. С. Кирилюк, О. И. Левчук

Институт механики им. С. П. Тимошенко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрена задача о распределении напряжений в упругом трансверсально-изотропном материале, который содержит произвольно ориентированную сфероидальную полость или дискообразную трещину под внутренним давлением. При построении решения задачи использовались метод эквивалентного включения, тройное преобразование Фурье по пространственным переменным и Фурье-образ функции Грина для бесконечного анизотропного пространства. Некоторые двойные интегралы по конечной области для полости и контурные интегралы для трещины вычислялись с помощью квадратурных формул Гаусса. Результаты исследований в частных случаях сравниваются с данными других авторов. Изучено влияние геометрии полости, упругих свойств материала, ориентации полости или трещины на распределение напряжений на поверхности полости или на коэффициенты интенсивности напряжений на фронте трещины. Обнаружена наиболее опасная ориентация полости.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный материал, сфероидальная полость, дискообразная трещина, внутреннее давление, метод эквивалентного включения, распределение напряжений, коэффициенты интенсивности напряжений.

Введение. Исследование напряженно-деформированного состояния в упругой изотропной среде вблизи сфероидальных и эллипсоидальных полостей и включений проводилось в ряде работ [1–7] и др. Концентрация напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем сфероидальные полости и включения, изучалась в [1, 2, 8, 9] и др. Найденные точные решения указанных задач основаны на известных представлениях общих решений пространственных статических задач для изотропной и трансверсально-изотропной среды. Полученные аналитические решения задач для трансверсально-изотропной среды существенно ограничиваются предположением, что ось вращения сфероида совпадает с осью трансропии среды. В случаях другой ориентации сфероида точное решение задачи не построено. Для дискообразной или эллиптической трещины, расположенной в трансверсально-изотропном материале, аналитические решения задач теории упругости известны только при расположении трещины в плоскости изотропии этого материала.

В данной работе рассмотрена задача о распределении напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем сжатую сфероидальную полость или дискообразную трещину под внутренним давлением P_0 . При этом предполагается, что полость или трещина могут быть произвольным образом ориентированы относительно оси трансропии. При построении решения задачи использовались метод эквивалентного включения [4, 7],

тройное преобразование Фурье по пространственным переменным и теорема Коши о вычетах. При вычислении некоторых двойных интегралов без особенностей для полости и контурных интегралов для трещины использованы квадратурные формулы Гаусса. Изучено распределение напряжений вдоль поверхности полости и коэффициентов интенсивности напряжений (КИН) вдоль фронта трещины. Показано, что ориентация полости или трещины существенно влияет на эти величины. Для конкретных значений упругих постоянных трансверсально-изотропного материала и отношений полуосей сфероида обнаружена наиболее опасная ориентация полости в среде, которая в ряде случаев приводит к увеличению концентрации напряжений более чем 1,6 раза по сравнению со случаем ориентации оси вращения сфероида вдоль оси трансформации материала. Выявлено также существенное влияние ориентации дискообразной трещины в трансверсально-изотропной среде на КИН вдоль ее фронта.

Постановка задачи. Пусть упругая трансверсально-изотропная среда с осью трансформации Oz содержит сфероидальную неоднородность (включение) с другими упругими свойствами и полуосями $a_1 = a_2, a_3$, ось вращения которой образует угол α с осью Oz . Упругие свойства трансверсально-изотропного материала описываются пятью независимыми постоянными: $c_{11}, c_{33}, c_{12}, c_{13}, c_{44}$. При этом $c_{22} = c_{11}; c_{23} = c_{13}; c_{55} = c_{44}; c_{66} = 0,5(c_{11} - c_{12})$. Тензор упругих модулей трансверсально-изотропного тела с осью трансформации Oz принимает вид

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{2222} = c_{11}; & C_{3333} &= c_{33}; & C_{1122} &= C_{2211} = c_{12}; \\ C_{1133} &= C_{3311} = C_{2233} = C_{3322} & &= c_{13}; \\ C_{3131} &= C_{3113} = C_{1331} = C_{1313} & &= c_{44}; \\ C_{1212} &= C_{1221} = C_{2121} = C_{2112} & &= 0,5(c_{11} - c_{12}), \end{aligned}$$

где оставшиеся компоненты этого тензора равны нулю.

Предположим, что исходная система декартовых координат x, y, z связана с локальной системой координат x^1, y^1, z^1 (система для включения) следующим образом: новую систему координат можно получить из исходной системы поворотом вокруг оси Ox на угол α (рис. 1). Тогда тензор упругих модулей C_{ijkl}^α в новой (локальной) системе координат получаем с помощью преобразования тензора четвертого порядка [10]:

$$C_{ijkl}^\alpha = C_{mnpq} \alpha_{im} \alpha_{jn} \alpha_{kp} \alpha_{lq},$$

где α_{ij} – матрица преобразования,

$$\alpha_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}. \quad (1)$$

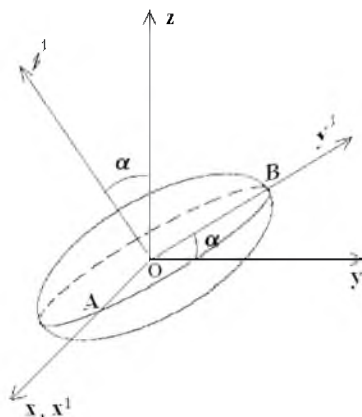


Рис. 1. Ориентация сфероидальной полости относительно оси Oz (оси трансформации).

Закон Гука для материала в новой системе координат принимает вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{\alpha} \varepsilon_{kl},$$

где, как и при вычислении компонентов тензора C_{ijkl}^{α} , по повторяющимся индексам проводится суммирование.

В дальнейшем все построения решения будем проводить в новой системе координат, однако во избежание громоздкости в выражениях верхние индексы “1” будем опускать. Также используем обычную тензорную запись выражений, т.е. будем подразумевать, что по повторяющимся индексам в выражениях проводится суммирование.

Для построения решения задачи воспользуемся схемой метода эквивалентного включения, соответствующие уравнения эквивалентности в области включения (неоднородности) запишем в следующем виде:

$$C_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl}) = C_{ijkl}^{\alpha} (\varepsilon_{kl}^0 + \varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^*), \quad \bar{x} \in \Omega, \quad (2)$$

где C_{ijkl}^1 , C_{ijkl}^{α} – тензоры упругих модулей неоднородности и матрицы соответственно (далее для полости компоненты C_{ijkl}^1 устремим к нулю); $\varepsilon_{ij}^*(\bar{x})$ – тензор “свободных” деформаций, который определяется из условий эквивалентности включения (области среды с теми же упругими свойствами, что и матрица, но со “свободными” деформациями) и неоднородности. В случае полости под внутренним давлением P_0 деформации ε_{ij}^0 получаем из закона Гука для сплошного трансверсально-изотропного пространства без полости при всестороннем растяжении ($\sigma_{ij}^0 = P_0 \delta_{ij}$). Это следует из того обстоятельства, что напряженное состояние, вызванное постоянным давлением внутри полости, тождественно возмущенному напряженному состоянию для задачи о всестороннем растяжении пространства со свободной от нагрузок поверхностью полости той же формы.

Построение решения задачи. Выразим тензор ε_{ij} , входящий в уравнения (2), через тензор “свободных” деформаций ε_{ij}^* из задачи о включении (при отсутствии внешних воздействий, но при малых неупругих деформациях ε_{ij}^* в области включения). В этом случае будут удовлетворяться уравнения равновесия вне и внутри включения и выполняться условия идеального контакта на границе раздела фаз (следует из свойств задачи о включении [4]). Для анизотропной среды соответствующие поля перемещений, деформаций и напряжений, вызванные “свободными” деформациями $\varepsilon_{ij}^*(\vec{x})$, согласно [4, 7] представим в виде интегралов по области включения:

$$\begin{cases} u_i(\vec{x}) = -\int_{\Omega} C_{jlmn}^{\alpha} \varepsilon_{mn}^*(\vec{x}') G_{ij,l}(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}'; \\ \varepsilon_{ij}(\vec{x}) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} C_{klmn}^{\alpha} \varepsilon_{mn}^*(\vec{x}') \{G_{ik,lj}(\vec{x} - \vec{x}') + G_{jk,li}(\vec{x} - \vec{x}')\} d\vec{x}'; \\ \sigma_{ij}(\vec{x}) = -C_{ijkl}^{\alpha} \left\{ \int_{\Omega} C_{pqmn}^{\alpha} \varepsilon_{mn}^*(\vec{x}') G_{kp,ql}(\vec{x} - \vec{x}') d\vec{x}' + \varepsilon_{kl}^*(\vec{x}) \right\}. \end{cases} \quad (3)$$

Здесь C_{ijkl}^{α} – тензор упругих модулей среды; запятая после индекса означает дифференцирование по соответствующей переменной; $G_{ij}(\vec{x} - \vec{x}')$ – функция Грина для бесконечной среды (фундаментальное решение) для матрицы, т.е. эта функция удовлетворяет следующим уравнениям равновесия анизотропного тела:

$$C_{ijkl}^{\alpha} G_{km,jl} + \delta_{im} \delta(\vec{x} - \vec{x}') = 0, \quad (4)$$

где $\delta(\vec{x} - \vec{x}')$ – дельта-функция Дирака; δ_{im} – символ Кронекера; по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Воспользуемся согласно [4, 7] интегральным выражением фундаментального решения для анизотропной среды:

$$G_{ij}(\vec{x} - \vec{x}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} N_{ij}(\vec{\xi}) D^{-1}(\vec{\xi}) e^{i\vec{\xi}(\vec{x} - \vec{x}')} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, \quad (5)$$

где $N_{ij}(\vec{\xi})$ – соответствующие алгебраические дополнения элементов матрицы

$$\{K_{ki}(\vec{\xi})\} = \{C_{kjil}^{\alpha} \xi_j \xi_l\} = \{C_{klij}^{\alpha} \xi_l \xi_j\} = \{C_{ijkl}^{\alpha} \xi_l \xi_j\} = \{K_{ik}(\vec{\xi})\}, \quad (6)$$

$D(\vec{\xi})$ – ее определитель.

Доказательство того, что эта функция удовлетворяет уравнениям (4), можно получить непосредственной проверкой, либо воспользовавшись пред-

ставлением δ -функции с помощью тройного обратного преобразования Фурье. Для сокращения записи трехкратный интеграл будем обозначать

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\bar{\xi}, \text{ где } d\bar{\xi} = d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 d\bar{\xi}_3.$$

С помощью формул (3) и (4) поле перемещений можно представить таким образом:

$$u_i(\bar{x}) = -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\partial}{\partial x_l} \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{\infty} C_{jlmn}^{\alpha} \varepsilon_{mn}^*(\bar{x}') N_{ij}(\bar{\xi}) D^{-1}(\bar{\xi}) e^{i\bar{\xi}(\bar{x}-\bar{x}')} d\bar{\xi} d\bar{x}'.$$

После ряда преобразований поле перемещений внутри эллипсоида, вызванное постоянным тензором “свободных” деформаций, представим в виде [7]

$$u_i(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi} C_{jlmn}^{\alpha} \varepsilon_{nm}^* x_k \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \tilde{G}_{ijkl}(\bar{\xi}) d\theta d\bar{\eta}_3, \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{G}_{ijkl}(\bar{\xi}) &= \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l N_{ij}(\bar{\xi}) / D(\bar{\xi}) = \bar{\xi}_k \bar{\xi}_l (K_{kl}(\bar{\xi}))^{-1}; \\ \bar{\xi}_1 &= \frac{\sqrt{1-\bar{\eta}_3^2}}{a_1} \cos \theta; \quad \bar{\xi}_2 = \frac{\sqrt{1-\bar{\eta}_3^2}}{a_1} \sin \theta; \quad \bar{\eta}_3 = \bar{\xi}_3 / a_3. \end{aligned}$$

В окончательном виде связь тензора деформаций ε_{ij} с тензором “свободных” деформаций ε_{ij}^* для задачи о включении (без воздействия основного поля) можно записать так:

$$\varepsilon_{ij} = S_{ijmn} \varepsilon_{mn}^*, \quad (8)$$

где S_{ijmn} – тензор Эшелби,

$$S_{ijmn} = \frac{1}{8\pi} C_{pqmn}^{\alpha} \int_{-1}^1 \int_0^{2\pi} \{ \tilde{G}_{ipjq}(\bar{\xi}) + \tilde{G}_{jpiq}(\bar{\xi}) \} d\theta d\bar{\eta}_3. \quad (9)$$

Для нахождения неизвестных значений тензора свободных деформаций с помощью выражений (8), (9) и уравнений эквивалентности (2) получаем систему линейных алгебраических уравнений, коэффициенты которой зависят от двойных интегралов типа (9), не имеющих каких-либо особенностей в области интегрирования.

Вычислим тензор Эшелби с помощью метода квадратур Гаусса, т.е. представим компоненты этого тензора в виде

$$S_{ijmn} = \frac{1}{8} C_{pqmn}^{\alpha} \sum_k^K \sum_l^L \{ \tilde{G}_{ipjq}(\bar{\xi}^{(kl)}) + \tilde{G}_{jpiq}(\bar{\xi}^{(kl)}) \} W^{(k)} W^{(l)}, \quad (10)$$

где k – номер соответствующего узла по переменной θ ; l – номер узла по ξ_3 ; $W^{(k)}$ – значения весового коэффициента для k -го узла.

После нахождения “свободных” деформаций ε_{ij}^* по формулам (2) и (8) определим напряженное состояние внутри включения. Далее для вычисления напряжений в точках среды, примыкающих к поверхности полости, воспользуемся формулами для скачка напряжений при переходе через границу включения [4, 7]:

$$[\sigma_{ij}] = \sigma_{ij}^{out} - \sigma_{ij}^{in} = C_{ijkl}^{\alpha} \{ -C_{pqmn}^{\alpha} \varepsilon_{mn}^* n_q n_l N_{kp}(\vec{n}) / D(\vec{n}) + \varepsilon_{kl}^* \},$$

где n_i – компоненты нормали поверхности, а выражения $N_{ij}(\vec{\xi})$ и $D(\vec{\xi})$ определяются по вышеприведенным формулам (6).

Апробация и анализ результатов числовых исследований для полости. При расчетах тензора Эшелби применялись квадратурные формулы Гаусса по 24 и 48 узлам по каждой из переменных. Тестирование подхода проводилось на задачах для сфероидальной полости в трансверсально-изотропной среде, ось вращения которой совпадала с осью транстропии. В задачах о концентрации напряжений в трансверсально-изотропном материале, содержащем сферическую или сфероидальную полость, для сравнения используются данные работы [7], полученные на основе точного решения задачи с помощью аппарата обобщенных аналитических функций [8]. В таблице приведены данные сравнения концентрации напряжений при двухосном растяжении $\sigma_x^0 = \sigma_y^0 = 1$; $\sigma_z^0 = 0$ в трансверсально-изотропном теле со сфероидальной полостью, полученные по предложенному подходу, с результатами работы [7] (в скобках).

**Данные сравнения концентрации напряжений
в трансверсально-изотропном материале по двум подходам**

Коэффициенты Пуассона	E/E'	E'/G'	$a_3/a_1 = 5$	$a_3/a_1 = 1,667$	$a_3/a_1 = 1$
$\nu = \nu' = 0,33$	2	3	2,92945 (2,928)	2,67587 (2,676)	2,42388 (2,424)
$\nu = \nu' = 0,33$	2	7	2,95436 (2,953)	2,79613 (2,796)	2,61426 (2,614)
$\nu = 0,1; \nu' = 0,33$	2	3	2,19541 (2,195)	2,07023 (2,070)	1,93840 (1,938)
$\nu = 0,1; \nu' = 0,33$	2	7	2,20742 (2,206)	2,12849 (2,128)	2,03518 (2,035)
$\nu = 0,33; \nu' = 0,1$	2	3	2,93793 (2,937)	2,71345 (2,713)	2,47944 (2,479)
$\nu = 0,33; \nu' = 0,1$	2	7	2,95744 (2,956)	2,80923 (2,809)	2,63581 (2,636)

Следовательно, проверка используемого подхода на тестовых задачах, имеющих точные решения, для трансверсально-изотропной среды со сферической и сфероидальной полостью показала высокую его эффективность.

Изучим концентрацию напряжений в трансверсально-изотропном материале со сжатой сфероидальной полостью под внутренним давлением P_0 со следующими характеристиками: $\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 0,4$; $E_1 = 2G_1(1 + \nu_1)$; $E_2 = 2E_1$; $G_2 = E_1$. Полагаем, что система координат (x^1, y^1, z^1) является локальной и связана со сфероидом, т.е. ось Oz^1 является осью вращения сфероида, а ось Oz – осью трансстропии среды (рис. 1). На рис. 2 показано изменение напряжений $\sigma_{z^1z^1}$ вдоль поверхности полости в сечении y^1z^1 от вершины на оси Oy^1 до ее вершины на оси Oz^1 (по углу эллипса сечения). Отношение полуосей сжатого сфероида предполагалось $a_3/a_1 = 0,5$. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям углов между осью трансстропии и осью вращения сфероида $\alpha = 30^\circ, 60^\circ$ и 90° , полученных вращением исходной системы координат вокруг оси Ox (рис. 1).

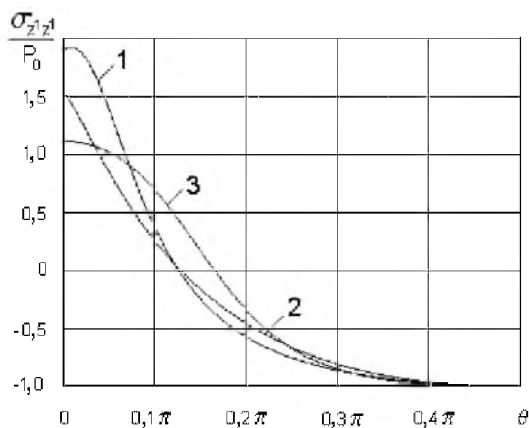


Рис. 2. Распределение напряжений вдоль поверхности полости при различных значениях угла α : 1 – $\alpha = 30^\circ$; 2 – $\alpha = 60^\circ$; 3 – $\alpha = 90^\circ$.

Рис. 3 иллюстрирует изменение напряжений $\sigma_{z^1z^1}$ вдоль поверхности сфероидальной полости в указанном сечении для $a_3/a_1 = 0,5$ (кривые 1, 2) и $a_3/a_1 = 0,3$ (кривые 3, 4). Для сравнения штриховыми линиями показано изменение соответствующих напряжений при $\alpha = 0$, т.е. при совпадении оси вращения сфероида с осью трансстропии материала, сплошными линиями – распределение напряжений с наибольшей концентрацией по всем возможным углам поворота α (расчеты осуществляли с дискретностью в один градус). Для отношения полуосей $a_3/a_1 = 0,5$ значение угла поворота α с наибольшей концентрацией составило 38° , для $a_3/a_1 = 0,3$ – 37° . Видно, что такие “наихудшие” ориентации полостей могут увеличивать напряжения примерно на 36% для $a_3/a_1 = 0,3$ и на 61% для $a_3/a_1 = 0,5$ по сравнению со случаем ориентации осей вращения сфероидов вдоль оси трансстропии среды.

Рассмотрим ситуацию, когда сжатая сфероидальная полость вырождается в дискообразную (круговую) трещину, находящуюся под тем же внутренним давлением P_0 . Исследования по распределению напряжений

вблизи дискообразной или эллиптической трещины в изотропном или трансверсально-изотропном материале проводились в работах [9, 11–18]. Однако аналитические решения задач для трансверсально-изотропной среды с плоской трещиной получены только при расположении дискообразной или эллиптической трещины в плоскости изотропии трансверсально-изотропного материала. Для рассмотрения поставленной задачи представим неизвестные “свободные” деформации с помощью скачков перемещений через поверхность трещины [19]:

$$u_i(\bar{x}) = \frac{i}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S C_{jlm3}^a b_m(\bar{x}') \xi_l A_{ij}(\bar{\xi}) \Delta^{-1}(\bar{\xi}) e^{i\bar{\xi} \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\bar{\xi} dx'_1 dx'_2, \quad (11)$$

где неизвестный вектор имеет вид

$$\bar{b}(\bar{x}) = \bar{b} (1 - x_1^2/a^2 - x_2^2/a^2)^{1/2};$$

a – радиус трещины; \bar{b} – постоянный вектор, компоненты которого могут быть комплексными числами.

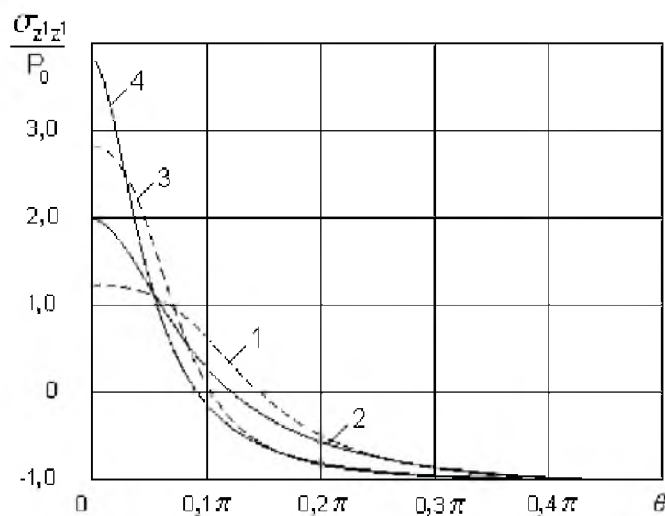


Рис. 3. Распределение напряжений вдоль поверхностей полости при “наихудших” их ориентациях.

Воспользовавшись теоремой Коши о вычетах при интегрировании по ξ_3 , поле перемещений, вызванное неизвестными скачками перемещений через поверхность трещины, можно записать так [19]:

$$u_i(\bar{x}) = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{jlm3}^a \xi_l^M A_{ij}(\bar{\xi}^M)}{\partial \Delta(\bar{\xi}^M) / \partial \xi_3} b_m(\bar{x}') e^{i\bar{\xi}^M \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\bar{\xi}_1 d\bar{\xi}_2 dx'_1 dx'_2. \quad (12)$$

Суммирование проводится для ξ_3^M – корней уравнения $\Delta(\bar{\xi}) = D(\bar{\xi}) = 0$ с отрицательной мнимой частью для $x_3 > 0$, а вектор $\bar{\xi}^M$ имеет вид $\bar{\xi}^M = (\xi_1, \xi_2, \xi_3^M(\xi_1, \xi_2))$. Соответственно поле напряжений определяется выражением

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \frac{-i}{4\pi^2} \sum_{M=1}^3 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_S \frac{C_{ijkl}^{\alpha} C_{pqm3}^{\alpha} \xi_q^M \xi_l^M A_{kp}(\bar{\xi}^M)}{\partial \Delta(\bar{\xi}^M) / \partial \xi_3} \times \\ \times b_m(\bar{x}') e^{i\bar{\xi}^M \cdot (\bar{x} - \bar{x}')} d\xi_1 d\xi_2 dx'_1 dx'_2.$$

После ряда преобразований компоненты напряжений на поверхности трещины [19] представляются следующим образом:

$$\sigma_{ij}(\bar{x}) = \frac{-i}{4} \int_0^{2\pi} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}(\eta_1/a, \eta_2/a, \xi_3^M(\eta_1/a, \eta_2/a)) b_m d\varphi, \quad (13)$$

где $\eta_1 = \cos \varphi$; $\eta_2 = \sin \varphi$;

$$F_{ijm}(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \frac{C_{ijkl}^{\alpha} C_{pqm3}^{\alpha} \xi_q \xi_l A_{kp}(\bar{\xi})}{\partial \Delta(\bar{\xi}) / \partial \xi_3}. \quad (14)$$

Дополнительный анализ асимптотических выражений для напряжений в плоскости трещины и использование определения коэффициентов интенсивности напряжений k_{ij} , связанных с соответствующими компонентами напряжений, позволяют получить

$$k_{ij} = i\sqrt{\pi a} \sum_{M=1}^3 F_{ijm}(x_1/a^2, x_2/a^2, \xi_3^M(x_1/a^2, x_2/a^2)) b_m;$$

$$K_I = k_{33}; \quad K_{II} = k_{31}n_1 + k_{32}n_2; \quad K_{III} = k_{31}(-n_2) + k_{32}n_1. \quad (15)$$

При этом компоненты нормали к контуру круговой трещины будут $n_1 = x_1/a$, $n_2 = x_2/a$. Используя для вычисления интегралов метод квадратур Гаусса и удовлетворяя граничным условиям на поверхности трещины, находим неизвестные значения скачков перемещений.

Апробация и анализ результатов числовых исследований для трещины. Для апробации используемого подхода рассмотрим задачу о дискообразной трещине в трансверсально-изотропной среде, расположенной в плоскости изотропии. Решение задачи записывается в элементарных функциях. Значения коэффициентов интенсивности напряжений K_I не зависят от упругих постоянных материала [11] и совпадают с соответствующими

значениями для изотропного тела. Коэффициенты интенсивности K_{II} , K_{III} при сдвиге зависят от упругих свойств материала. В [11, 18] показано, что достаточно взять их выражения для изотропного материала и вместо коэффициента Пуассона ν подставить значение, которое вычисляется в зависимости от вышеуказанных пяти упругих постоянных. Рассмотрим вначале согласно [11] квадратное уравнение, зависящее от упругих постоянных материала,

$$c_{11}c_{44}n^2 - [c_{44}^2 + c_{33}c_{11} - (c_{13} + c_{44})^2]n + c_{33}c_{44} = 0.$$

Пусть n_1, n_2 – корни этого уравнения; $n_3 = 2c_{44}/(c_{11} - c_{12})$. Введем следующее обозначение: $m_1 = \frac{c_{11}n_1 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}$; $m_2 = \frac{c_{11}n_2 - c_{44}}{c_{13} + c_{44}}$. Исходя из этого значение, которое необходимо подставить в соответствующие выражения КИН для изотропной среды вместо ν , находим согласно [11]:

$$\nu_* = 1 - \frac{n_3^{-1/2}(m_2 - m_1)}{(1 + m_1)(1 + m_2)(n_1^{-1/2} - n_2^{-1/2})}. \quad (16)$$

В работе [18] также установлена аналогичная взаимосвязь между значениями КИН для изотропной и трансверсально-изотропной сред (при расположении трещины в плоскости изотропии), и соответствующее значение, которое следует подставлять вместо ν , записано в виде

$$\nu_{**} = 1 - \frac{0,5(c_{11} - c_{12})c_{33}(2c_{44} + \sqrt{c_{11}c_{33} + c_{13}})}{(c_{11}c_{33} - c_{13}^2)(\sqrt{c_{11} + c_{33} + c_{13}})}. \quad (17)$$

Из выражений (16), (17) предельным переходом от трансверсально-изотропного материала к изотропному получен коэффициент Пуассона ν . Хотя непосредственно тождественность этих выражений не показана, числовые значения, полученные с их помощью, по многочисленным вариантам конкретных упругих постоянных материалов совпадают с большой точностью. Например, для упругих постоянных: $\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 0,4$; $E_1 = 2G_1(1 + \nu_1)$; $G_2 = E_1$ и отношений E_2/E_1 , равных 2; 6; 12 и 20, получаем следующие значения: $\nu_* = 0,0109433792$; $0,0856141237$; $0,1320075792$; $0,01617216596$; $\nu_{**} = 0,0109433795$; $0,0856141228$; $0,1320075794$; $0,1617216605$.

Рассмотрим выражения КИН для круговой трещины в изотропном материале. При действии растягивающих $\sigma_{33}^0 = \sigma_0$ или сдвигающих $\sigma_{13}^0 = \tau_{10}^0$ усилий они принимают вид [20]

$$\begin{aligned} K_I &= \frac{2}{\sqrt{\pi}}(\sigma_0 \sqrt{a}); & K_{II} &= \frac{4}{(2 - \nu)\sqrt{\pi}}(\tau_{10}^0 \sqrt{a}) \cos \phi; \\ K_{III} &= \frac{-4(1 - \nu)}{(2 - \nu)\sqrt{\pi}}(\tau_{10}^0 \sqrt{a}) \sin \phi. \end{aligned} \quad (18)$$

Аналогично для сдвигающих усилий $\sigma_{23}^0 = \tau_{20}^0$ имеем следующие выражения:

$$K_{II} = \frac{4}{(2-\nu)\sqrt{\pi}}(\tau_{20}^0\sqrt{a})\sin\phi; \quad K_{III} = \frac{4(1-\nu)}{(2-\nu)\sqrt{\pi}}(\tau_{20}^0\sqrt{a})\cos\phi. \quad (19)$$

Заменяя ν величинами ν^* или ν^{**} , получаем значения КИН для круговой трещины в плоскости изотропии. Коэффициенты интенсивности напряжений вычислялись по формулам (18), (19) и непосредственно по (15). При этом использовалась квадратурная формула Гаусса по 24 узлам. Расчеты показали совпадение результатов до шести значащих цифр во всем диапазоне изменения угла φ для всех четырех расчетных случаев.

Рассмотрим трансверсально-изотропное тело с теми же упругими постоянными: $\nu_1 = 0$; $\nu_2 = 0,4$; $E_1 = 2G_1(1 + \nu_1)$; $E_2 = 2E_1$; $G_2 = E_1$, которое вместо полости содержит произвольно ориентированную дискообразную (круговую) трещину. На рис. 4 приведено изменение коэффициента K_I при разных ориентациях трещины. Кривые 1, 2, 3 соответствуют значениям углов поворота α , равным 30, 60 и 90°. Штриховыми линиями показано изменение КИН при $\alpha = 0$. Несложно увидеть, что и в этом случае ориентация трещины в трансверсально-изотропном материале оказывает значительное влияние на значения КИН на ее фронте.

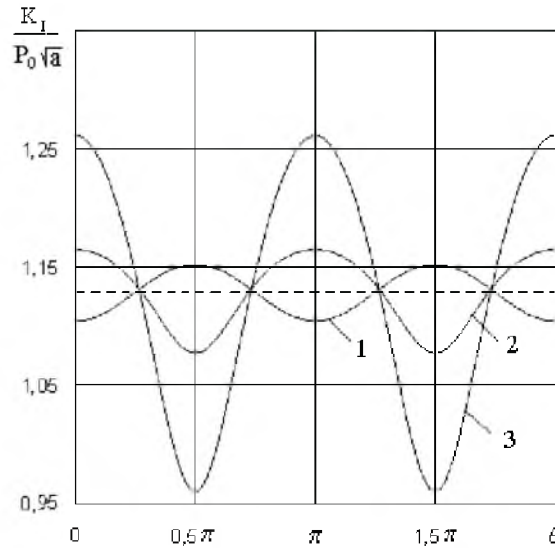


Рис. 4. Распределение коэффициентов интенсивности напряжений для дискообразной трещины при различных значениях α : 1 – $\alpha = 30^\circ$; 2 – $\alpha = 60^\circ$; 3 – $\alpha = 90^\circ$.

Резюме

Розглянуто задачу про розподіл напружень у пружному трансверсально-ізоотропному матеріалі, що містить довільно орієнтовану сфероїдальну порожнину або дископодібну тріщину під внутрішнім тиском. При побудові

розв'язку задачі використовували метод еквівалентного включення, потрібне перетворення Фур'є по просторовим змінним та Фур'є-образ функції Гріна для нескінченного анізотропного середовища. Для обчислення певних подвійних інтегралів по скінченній області для порожнини та контурних інтегралів для тріщини використовували квадратурні формули Гаусса. Результати досліджень в окремих випадках порівнюються з даними інших авторів. Досліджено вплив геометрії порожнини, пружних властивостей матеріалу, орієнтації порожнини чи тріщини на розподіл напружень на поверхні порожнини або на коефіцієнти інтенсивності напружень на фронті тріщини. Визначено найбільш небезпечну орієнтацію порожнини.

1. Александров А. Я., Соловьев Ю. И. Пространственные задачи теории. – М.: Наука, 1978. – 464 с.
2. Подильчук Ю. Н. Граничные задачи статики упругих тел. – Киев: Наук. думка, 1984. – 303 с.
3. Улитко А. Ф. Метод собственных векторных функций в пространственных задачах теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 261 с.
4. Эшелби Дж. Континуальная теория дислокаций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 287 с.
5. Kirilyuk V. S. On interaction of an ellipsoidal inclusion with elliptical crack in elastic material under triaxial tension // Int. Appl. Mech. – 2003. – **39**, No. 6. – P. 91 – 100.
6. Kirilyuk V. S. On stress state of elastic medium with elliptical crack and two ellipsoidal inclusions // Ibid. – No. 7. – P. 94 – 105.
7. Mura T. Micromechanics of Defects in Solids. – Boston; London: Martinus Nijhoff, 1987. – 587 p.
8. Александров А. Я., Вольперт В. С. Некоторые задачи о концентрации напряжений около эллипсоидальной полости в трансверсально-изотропном теле // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. – № 1. – С. 115 – 121.
9. Подильчук Ю. Н. Точные аналитические решения пространственных граничных задач статики трансверсально-изотропного тела канонической формы (обзор) // Прикл. механика. – 1997. – **33**, № 10. – С. 3 – 30.
10. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Г. А. Сопротивление жестких полимерных материалов. – Рига: Зинатне, 1972. – 498 с.
11. Kassir M. K. and Sih G. C. Three-Dimensional Crack Problems. – Leyden: Nordhof Int. Publ., 1975. – 452 p.
12. Бородачев А. Н. Определение коэффициентов интенсивности напряжений для плоской трещины при произвольных полиномиальных граничных условиях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1981. – № 2. – С. 63 – 69.
13. Green A. E. and Sneddon I. N. The distribution of stress in the neighborhood of a flat elliptical crack in an elastic solid // Proc. Cambridge Philos. Soc. – 1950. – **46**. – P. 159 – 164.

14. *Shan R. C. and Kobayashi A. S.* Stress intensity factors for an elliptical crack under arbitrary normal loading // *Eng. Fract. Mech.* – 1971. – **3**. – P. 71 – 96.
15. *Vijayakumar K. and Atluri S. N.* An embedded elliptical flaw in an infinite solid, subjected to arbitrary crack-face tractions // *J. Appl. Mech.* – 1981. – **48**. – P. 88 – 96.
16. *Орыняк И. В., Гуенко А. Ю.* Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщ. 1. Перемещение берегов трещины при полиномиальном законе нагружения // *Пробл. прочности.* – 2002. – № 1. – С. 22 – 40.
17. *Орыняк И. В., Гуенко А. Ю., Каменчук А. В.* Эллиптическая трещина нормального отрыва в бесконечном упругом теле. Сообщ. 2. Контакт берегов трещины // *Там же.* – № 2. – С. 41 – 52.
18. *Wu Kuang-Chong.* On an elliptical crack embedded in an anisotropic materials // *Int. J. Sol. Struct.* – 2000. – **37**, No. 35. – P. 4841 – 4857.
19. *Willis L. J.* The stress field of an elliptical crack in anisotropic medium // *Int. J. Eng. Sci.* – 1968. – **6**, No. 5. – P. 253 – 263.
20. *Справочник по коэффициентам интенсивности напряжений / Под ред. Ю. Мураками.* – М.: Мир, 1990. – Т. 2. – 1013 с.

Поступила 06. 09. 2004