УДК 539.4

Концентрація напружень в елементах мікроструктури в'язко-пружних композитних матеріалів

Я. Г. Ляшенко

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, Київ, Україна

Наведено розв'язок задачі щодо оцінки концентрації напружень у компонентах (матриця і включення) багатокомпонентного в'язкопружного композитного матеріалу в залежності від форми включень, властивостей матриці й усього композита. Матеріал матриці є ізотропним та в'язкопружним. Розглядається широкий діапазон властивостей включень (наприклад, пор, твердих та в'язких частинок). Для розв'язку даної задачі використовується метод інтегральних перетворень.

Ключові слова: композитний матеріал, концентрація напружень, середні напруження, в'язкопружна матриця, включення.

Розвиток техніки потребує розробки нових інженерних конструкцій, механізмів і машин різного призначення, що, в свою чергу, вимагає використання матеріалів із властивостями, які відсутні у традиційних металах і сплавах. Необхідно розробляти такі композитні матеріали, в яких потрібні властивості синтезуються за рахунок підбору відповідних компонентів і управління їх взаємним розміщенням. Для багатьох із цих матеріалів характерні в тій чи іншій мірі реономні властивості. Проблемам концентрації напружень у в'язкопружних тілах присвячене незначне число публікацій [1, 2]. Достеменно вивчалась поведінка композитного матеріалу з пружною матрицею [3–6]. У багатьох роботах досліджувалася концентрація середніх напружень у в'язкопружних композитах, які складалися з двох компонент [7]. Нижче наведено розв'язок задачі про визначення концентрації середніх напружень у компонентах (матриця і включення) багатокомпонентного в'язкопружного композитного матеріалу.

Умови експлуатації композитних матеріалів характеризуються високими рівнями зовнішніх навантажень, температур, електричних і магнітних полів. Лінійність співвідношень між динамічними і кінетичними параметрами, що описують поведінку матеріалів у таких умовах, може порушуватися, а використання лінійної теорії деформування призводить до значних похибок. Такі чинники особливо притаманні композитам із в'язкопружною металічною та полімерною матрицею, що все більше застосовуються в елементах сучасних конструкцій. Нелінійність деформування [8, 9] матриці істотно впливає на перерозподіл напружень по компонентах матеріалу.

Розглянемо в'язкопружне деформування матриці, що описується співвідношеннями

$$\varepsilon_{ij} = \xi_{ij\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha}\eta_{ij\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}, \tag{1}$$

де

$$A_{2\hat{\sigma}} = \hat{\sigma}_{ij}\hat{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{pp}^{2};$$

$$\eta_{ij\alpha\beta} = rD_{ij\alpha\beta} = r\frac{1}{2}(\delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} + \delta_{i\beta}\delta_{j\alpha} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}); \qquad \xi_{ij\alpha\beta} = p\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta} + 2qI_{ij\alpha\beta};$$

$$p = -\frac{\nu}{E}; \qquad q = \frac{1+\nu}{E}; \qquad \alpha = \frac{N-1}{2}; \tag{2}$$

E, ν, r, N – інтегральні оператори в'язкопружного деформування з дробово-експоненціальними ядрами Работнова, які наближено можна представити таким чином:

$$\tilde{\exists}_\alpha(\beta)\cdot 1 = -\frac{1}{\beta}[1 - \exp(\gamma\beta t^{1+\alpha})]; \quad \gamma = (1+\alpha)^{1+\alpha}.$$

Тоді операторний модуль Юнга має наступний вигляд:

$$E = E_e(1 - \xi\tilde{\exists}_\alpha(\beta)).$$

У даних формулах: t – час; ξ, α, β – параметри повзучості [10].

Оскільки рівняння (1) є суттєво нелінійними і їх обернення до співвідношень напруження–швидкості деформацій призведе до втрати точності, скористаємося рівняннями сумісності деформацій:

$$e_{ikp}e_{jmq}\varepsilon_{pq,km} = 0 \tag{3}$$

або

$$e_{ikp}e_{jmq} < \xi_{pq\alpha\beta} > \sigma'_{\alpha\beta,km} = -e_{ikp}e_{jmq}[\xi'_{pq\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta} + A^{\alpha}_{2\bar{\sigma}}(\sigma)\eta_{pq\alpha\beta}\sigma_{\alpha\beta}]_{,km}, \tag{4}$$

причому в силу виконання стохастичних рівнянь рівноваги в представницькому об'ємі V отримаємо

$$\sigma'_{ij,i} = 0, \qquad x \in V. \tag{5}$$

Функцію Гріна рівнянь (4) знайдемо з системи

$$\begin{cases} e_{ikp}e_{jmq} < \xi_{pq\alpha\beta} > G_{\alpha\beta rs,km} = -I_{ijrs}\delta(\vec{x}); \\ G_{\alpha\beta rs,\alpha} = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Одиничний тензор четвертого рангу I_{ijrs} розкладемо на потенціальну і бівіхреву частини [10]. За допомогою перетворення Фур'є отримаємо

$$\begin{gathered} k_k k_m e_{ikp}e_{jmq} < \xi_{pq\alpha\beta} > \hat{G}_{\alpha\beta rs}(k) = \\ = \frac{1}{2}[(\delta_{ir} - \gamma_{ir})(\delta_{js} - \gamma_{js}) + (\delta_{jr} + \gamma_{jr})(\delta_{is} + \gamma_{is})]; \\ \gamma_j = \frac{k_j}{k}; \qquad k = |\vec{k}|. \end{gathered} \tag{7}$$

Враховуючи, що для ізотропного середовища тензор $\xi_{ij\alpha\beta}$ заданий у формулах (2), отримаємо

$$e_{ikp}e_{jmq} < \xi_{pq\alpha\beta} > = < p > \delta_{\alpha\beta}(\delta_{ij}\delta_{km} - \delta_{kj}\delta_{im}) + 2 < q > e_{ik\alpha}e_{jm\beta}. \tag{8}$$

Підставимо (8) в (7) і після деяких перетворень знайдемо Фур'є-образ тензорної функції Гріна $G_{ij\alpha\beta}$:

$$\hat{G}_{ijrs}(k) = \frac{1}{4 < q > k^2}\left[\frac{< p + 2q >}{< p + q >}(\delta_{ij} - \gamma_{ij})(\delta_{rs} - \gamma_{rs}) - \right.$$

$$\left. -(\delta_{ir} - \gamma_{ir})(\delta_{js} - \gamma_{js}) - (\delta_{jr} - \gamma_{ir})(\delta_{is} - \gamma_{is})\right]. \tag{9}$$

Розв'язок рівнянь (4) представимо у формі інтегральної згортки:

$$\sigma'_{ij}(x) = \int G_{ijrs,mk}(x - \hat{x})e_{rkp}e_{smq}f_{pq}(\hat{x})d\hat{V} +$$

$$+\int G_{ijrs,m}(x - \hat{x})e_{rkp}e_{smq}\hat{N}_k f_{pq}(\hat{x})d\hat{S} \tag{10}$$

або

$$\begin{aligned} &\sigma'_{ij} = \Gamma^*_{ij\alpha\beta}f_{\alpha\beta}; \\ &f_{\alpha\beta} = e_{\alpha kp}e_{\beta mq}[\xi'_{pqrs}\sigma_{rs} + A^{\alpha}_{2\hat{\sigma}}(\sigma)\eta_{pqrs}\sigma_{rs}]. \end{aligned} \tag{11}$$

Скористаємося методом умовних моментних функцій [4]. Для цього осереднимо рівняння (11) за умови, що координата-аргумент лівої частини рівняння знаходиться в об'ємі V_1, який містить включення:

$$< \sigma | 1 > = < \sigma > + \sum_{i=1}^{2}\Gamma^* < f | i,1 > p_{1i}, \tag{12}$$

де p_{1i} – умовні імовірності переходу з 1 в i компоненту; $< f | i,1 >$ – умовні моментні функції,

$$< f | i,1 > = < f(\hat{x}) | \hat{x} \in V_i, x \in V_1 >. \tag{13}$$

У наближенні однорідності напруженого стану в матриці і включеннях, а саме:

$$< f | i,1 > = < f(\hat{x}) | \hat{x} \in V_i > \tag{14}$$

із (12) знайдемо

$$< \sigma | 1 > = < \sigma > + c_2 M \sum_{i=1}^{2}(-1)^{i+1} < f | i >, \tag{15}$$

де

$$< f | i > = e \otimes e[\xi^{(i)} < \sigma | i > + A^{\alpha(i)}_{2\hat{\sigma}}(< \sigma | i >)\eta^{(i)} < \sigma | i >]. \tag{16}$$

Виділимо в рівнянні (15) лінійну і нелінійну частини, щоб можна було скористатися методом послідовних наближень:

$$(I - M\xi_k) < \sigma|1> = (I - M\xi'^{(2)}) < \sigma > +$$

$$+ c_2 M \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha(i)}(<\sigma|i>)\eta^{(i)} < \sigma|i>, \qquad (17)$$

де

$$\xi_x = c_1 \xi^{(2)} + c_2 \xi^{(1)} - < \xi >;$$

$$M_{ijpq} = \int G_{ijrs,km}(x) e_{rkp} e_{smq} \varphi(x) dV =$$

$$= -(2\pi)^{-3} e_{rkp} e_{smq} \int \int k_k k_m \hat{G}_{ijrs}(k) e^{i\bar{k}\bar{x}} \varphi(x) dV_x dV_k; \qquad (18)$$

$\varphi(x)$ – кореляційна функція композитного середовища.

Домножимо рівняння (16) на тензор $(I - M\xi_x)^{-1}$ і в результаті отримаємо

$$< \sigma|1> = (I + c_2 Q\xi^{(3)}) < \sigma > + c_2 Q \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha(i)}(<\sigma|i>)\eta^{(i)} < \sigma|i>;$$
$$Q = (I - M\xi_x)^{-1} M. \qquad (19)$$

Осереднимо визначальне співвідношення (1) в припущенні, що напружений стан включень і матриці є однорідним. Тоді, враховуючи (19), матимемо

$$< \xi > = \xi^* < \sigma > + c_1 c_2 \xi^{(3)} Q \sum_{i=1}^{2} (-1)^{i+1} A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha(i)} \eta^{(i)} < \sigma|i> +$$

$$+ \sum_{i=1}^{2} c_1 A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha(i)} \eta^{(i)} < \sigma|i> = \xi^* < \sigma > + \sum_{i=1}^{2} c_i B_{(1)}^{T(i)} A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha(i)} \eta^{(i)} < \sigma|i>, \qquad (20)$$

де

$$B_{(1)}^{(i)} = I + (-1)^{i+1}(1 - c_i) Q\xi^{(3)}; \quad B_{(1)}^{T(i)} = I + (-1)^{i+1}(1 - c_i)\xi^{(3)} Q. \qquad (21)$$

Якщо використати представлення

$$A_{2\hat{\sigma}}(<\sigma|i>) = <\sigma_{pq}|i><\sigma_{pq}|i> - \frac{1}{3} <\sigma_{pq}|i>^2 = \sum_{m=1}^{5} \alpha_m^{(i)} P_m \qquad (22a)$$
$$(p, q = 1, 2, 3);$$

$$\begin{cases} P_1 = <\sigma_{\beta\beta}>^2; & P_2 = <\sigma_{\beta\beta}><\sigma_{33}>; \\ P_3 = <\sigma_{33}>^2; & P_4 = <\sigma_{\alpha\beta}><\sigma_{\alpha\beta}>; \\ P_5 = <\sigma_{\alpha\beta}><\sigma_{3\alpha}> & (\alpha, \beta = 1, 2), \end{cases} \tag{22б}$$

то з (20) отримаємо наступний вираз:

$$<\xi> = \xi^* <\sigma> + \sum_{i=1}^{2} c_i \left(\sum_{m=1}^{5} \alpha_m^{(i)} P_m \right)^{N-1/2} B_{(1)}^{T(i)} \eta^{(i)} B_{(n)}^{(i)} <\sigma>. \tag{23}$$

Тензор $B_{(n)}^{(i)}$ знаходиться в результаті ітераційного процесу, який можна задати формулою

$$B_{(n+1)}^{(i)} = B_{(n)}^{(i)} + (-1)^{i+1}(1-c_i) \sum_{\nu=1}^{2} (-1)^{\nu+1} A_{2\delta(n)}^{\alpha(\nu)} \eta^{(\nu)} B_{(n)}^{(\nu)}. \tag{24}$$

Якщо в'язкопружні властивості має тільки матриця, що, як правило, спостерігається в реальних композитах, то отримані формули можна спростити:

$$<\xi> = \xi^* <\sigma> + c_2 \left(\sum_{m=1}^{5} \alpha_{m(n)}^{(2)} P_m \right)^{N-1/2} B_{(1)}^{T(2)} \eta^{(2)} B_{(n)}^{(2)} <\sigma>;$$
$$B_{(n+1)}^{(2)} = B_{(1)}^{(2)} + c_1 A_{2\delta(n)}^{\alpha(2)} \eta^{(2)} B_{(n)}^{(2)}. \tag{25}$$

Перейдемо тепер до безпосереднього обчислення складових наведених вище тензорів і розрахунку напружено-деформованого стану компонентів матеріалу.

Для композита, армованого односпрямованими еліпсоїдальними включеннями, кореляційна функція задається виразом [5, 7]

$$p_{1n,1n} = c_{1n} + (1-c_{1n}) \exp[-(n_1^2 \rho^2 + n_2^2 y_3^2)^{1/2}];$$
$$n_i = [\kappa_i]^{-1}, \tag{26}$$

де $\kappa_1 = \kappa_2, \kappa_3$ – розміри півосей еліпсоїдальних включень у поперечному і поздовжньому напрямках.

Проінтегруємо співвідношення (18) за умови, що Фур'є-образ функції Гріна рівнянь сумісності відомий (9). При переході до нової системи координат y_i, в якій вісь y_3 збігається з n-напрямком включень, отримаємо в явному вигляді складові тензора M:

$$k_M = \frac{a}{4}(1 + 3j_1 - j_3) + 2bj_1; \qquad l_M = \frac{a}{2}(j_2 + j_3) + bj_2; \tag{27а}$$

$$m_M = \frac{a}{8}(j_2 - j_3) - bj_1; \quad n_M = a(j_2 - j_3); \quad p_M = \frac{a}{2}j_3 - \frac{b}{2}j_2, \tag{27б}$$

де

$$a = -\frac{< p + 2q >}{4 < q >< p + q >}; \quad b = \frac{1}{4 < q >}; \tag{28}$$

коефіцієнти j_1, j_2, j_3 залежать від співвідношення розмірів головних півосей армуючих включень $\kappa = \kappa_3 / \kappa_1$.

Згідно з (19), (27) тензор Q матиме наступні складові:

$$k_Q = \frac{1}{2\Delta_2}[k_M - \Delta_M(p_x + 2q_x)]; \quad l_Q = l_Q^T = \frac{1}{2\Delta_2}[l_M - 2\Delta_M p_x];$$

$$m_Q = m_M(1 - 4q_x m_x)^{-1}; \quad n_Q = \frac{1}{2\Delta_2}[n_M - 4\Delta_M(p_x + q_x)];$$

$$p_Q = p_M(1 - 4p_x p_M); \quad \Delta_M = k_M n_M - l_M^2;$$

$$2\Delta_2 = 1 - 4l_M p_x - 4k_M(p_x + q_x)] - n_M(p_x + 2q_x)] + 4q_x(3p_x + 4q_x)\Delta_M. \tag{29}$$

Складові тензора приведених в'язкопружних податливостей лінійно-в'язкопружного матеріалу, армованого еліпсоїдальними включеннями, знайдемо з формул

$$\begin{cases} \xi^* = < \xi > + \xi^{(3)} Q \xi^{(3)}; \\ k_\xi^* = < p + q > + c_2 c_1 [4k_Q (p^{(3)} + q^{(3)})^2 + \\ \quad + 4l_Q p^{(3)} (p^{(3)} + q^{(3)}) + n_Q p^{(3)2}]; \\ l_\xi^* = < p > + c_1 c_2 [2l_Q (2p^{(3)2} + 3p^{(3)} q^{(3)} + 2q^{(3)2}) + \\ \quad + n_Q p^{(3)} (p^{(3)} + 2q^{(3)}) + 4k_Q p^{(3)} (p^{(3)} + q^{(3)})]; \\ m_\xi^* = < q > + 4c_1 c_2 q^{(3)2} m_Q; \\ n_\xi^* = < p + 2q > + c_1 c_2 [n_Q (p^{(3)} + 2q^{(3)})^2 + \\ \quad + 4l_Q p^{(3)} (p^{(3)} + 2q^{(3)}) + 4k_Q p^{(3)2}]; \\ p_\xi^* = < q > + 4c_1 c_2 q^{(3)2} p_Q; \\ p^{(3)} = p^{(1)} - p^{(2)}; \\ q^{(3)} = q^{(1)} - q^{(2)}. \end{cases} \tag{30}$$

Аналоги технічних параметрів: модулі Юнга, коефіцієнти Пуассона, модулі зсуву трансверсально ізотропного композита, армованого еліпсоїдальними частинками, виражаються через складові тензора ξ^*:

$$E_1^* = \frac{1}{k_\xi^* + m_\xi^*}; \qquad E_3^* = \frac{1}{n_\xi^*}; \qquad \nu_{13}^* = -l_\xi^*(n_\xi^*)^{-1};$$
$$G_{12}^* = (4m_\xi^*)^{-1}; \qquad G_{13}^* = (4p_\xi^*)^{-1}; \qquad \nu_{12}^* = \frac{E_1^*}{2G_{12}^*} - 1. \tag{31}$$

Середні напруження в компонентах обчислюються за допомогою тензорів $B_{(1)}^{(i)}$ $(i=1,2)$, складові яких згідно з (21) представимо у вигляді

$$\begin{cases} k_{B(1)}^{(i)} = \frac{1}{2} + (-1)^{i+1}(1-c_i)[2k_Q(p^{(3)} + q^{(3)}) + l_Q p^{(3)}]; \\ l_{B(1)}^{(i)} = (-1)^{i+1}(1-c_i)[2k_Q p^{(3)} + l_Q(p^{(3)} + 2q^{(3)})]; \\ l_{B(1)}^{T(i)} = (-1)^{i+1}(1-c_i)[2l_Q(p^{(3)} + q^{(3)}) + n_Q p^{(3)}]; \\ m_{B(1)}^{(i)} = \frac{1}{2} + (-1)^{i+1}(1-c_i)2m_Q q^{(3)}; \\ n_{B(1)}^{(i)} = 1 + (-1)^{i+1}(1-c_i)[2l_Q p^{(3)} + n_Q(p^{(3)} + 2q^{(3)})]; \\ p_{B(1)}^{(i)} = \frac{1}{2} + (-1)^{i+1}(1-c_i)2p_Q q^{(3)}. \end{cases} \tag{32}$$

При цьому коефіцієнти розкладу другого алгебраїчного інваріанта девіаторів середніх напружень компонентів (22) запишемо наступним чином:

$$\begin{cases} \alpha_{1(1)}^{(i)} = \frac{2}{3}[(l_{B(1)}^{T(i)} - l_{B(1)}^{(i)})^2 - 3m_{B(1)}^{(i)2}]; \\ \alpha_{2(1)}^{(i)} = \frac{4}{3}[(l_{B(1)}^{T(i)} - k_{B(1)}^{(i)})(n_{B(1)}^{(i)} - l_{B(1)}^{(i)})]; \\ \alpha_{3(1)}^{(i)} = \frac{2}{3}(n_{B(1)}^{(i)} - l_{B(1)}^{(i)})^2; \ \alpha_{4(1)}^{(i)} = 4m_{B(1)}^{(i)2}; \ \alpha_{5(1)}^{(i)} = 8p_{B(1)}^{(i)2}; \\ B_{(1)}^{(i)}(k_{B(1)}^{(i)}, l_{B(1)}^{(i)}, m_{B(1)}^{(i)}, n_{B(1)}^{(i)}, p_{B(1)}^{(i)}) \quad (i=1,2). \end{cases} \tag{33}$$

Позначимо добуток тензорів у макроскопічних співвідношеннях (22) через

$$R_{(n)}^{(i)} = B_{(1)}^{T(i)} D B_{(n)}^{(i)};$$
$$D_{ij\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\delta_{i\beta}\delta_{j\alpha} - \delta_{i\alpha}\delta_{j\beta} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\delta_{\alpha\beta}). \tag{34}$$

Тоді отримаємо

$$<\varepsilon>_{(n+1)} = \xi^* <\sigma> + \sum_{i=1}^{2} c_i r^{(i)} A_{2\delta}^{\alpha(i)}(<\sigma|i>) R_{(n)}^{(i)} <\sigma>; \tag{35a}$$

$$A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha(i)} = \left(\sum_{m=1}^{s} \alpha_{m(n)}^{(i)} P_m \right)^{\alpha}, \tag{35б}$$

причому $R_{(n)}^{(i)}$ має наступні складові:

$$\begin{gathered} k_{R(n)}^{(i)} = \frac{2}{3}(k_{B(n)}^{(i)} - 2l_{B(n)}^{T(i)})(k_{B(n)}^{(i)} - l_{B(n)}^{T(i)})]; \\ l_{R(n)}^{(i)} = \frac{2}{3}(k_{B(n)}^{(i)} - l_{B(n)}^{(i)})(l_{B(n)}^{(i)} - n_{B(n)}^{(i)})]; \\ m_{R(n)}^{(i)} = 2m_{B(n)}^{(i)2}; \qquad n_{R(n)}^{(i)} = \frac{2}{3}(l_{B(n)}^{(i)} - n_{B(n)}^{(i)})^2; \qquad p_{R(n)}^{(i)} = 2p_{B(n)}^{(i)2}, \end{gathered} \tag{36}$$

де індексом (n) позначено порядок наближення (24).

У розгорнутій формі запису маємо

$$\begin{gathered} B_{(n+1)}^{(i)} = B_{(1)}^{(i)} + (-1)^{i+1}(1 - c_1)\sum_{\nu=1}^{2}(-1)^{\nu+1} r^{(\nu)} A_{2\hat{\sigma}}^{\alpha(\nu)} \beta_{(n)}^{(\nu)}; \\ \beta_{(n)}^{(\nu)} = QDB_{(n)}^{(\nu)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots), \end{gathered} \tag{37}$$

причому

$$\begin{gathered} k_{\beta(n)}^{(i)} = \frac{2}{3}(k_Q - 2l_Q)(k_{B(n)}^{(i)} - l_{B(n)}^{T(i)}); \qquad l_{\beta(n)}^{(i)} = \frac{2}{3}(k_Q - l_Q)(l_{B(n)}^{(i)} - n_{B(n)}^{(i)}); \\ m_{\beta(n)}^{(i)} = 2m_Q m_{B(n)}^{(i)}; \qquad n_{\beta(n)}^{(i)} = \frac{2}{3}(l_Q - n_Q)(l_{B(n)}^{(i)} - n_{B(n)}^{(i)}); \\ p_{\beta(n)}^{(i)} = \frac{2}{3}(l_Q - n_Q)(l_{B(n)}^{(i)} - n_{B(n)}^{(i)}) \qquad (i = 1, 2;\ n = 1, 2, 3, \ldots). \end{gathered} \tag{38}$$

Отримані співвідношення значно спрощуються, якщо на матеріал діють одновимірні макроскопічні навантаження, що має місце, наприклад, при дослідному визначенні діаграм деформування.

Нехай відмінні від нуля тільки зовнішні навантаження $< \sigma_{33} > \neq 0$. У цьому випадку

$$A_{2\hat{\sigma}(n)}^{(i)} = \alpha_{3(n)}^{(i)} < \sigma_{33} >^2 = \frac{2}{3}(n_{B(n)}^{(i)} - l_{B(n)}^{(i)})^2 < \sigma_{33} >, \tag{39}$$

і макроскопічний закон буде наступним:

$$< \varepsilon_{33} > = n^* < \sigma_{33} > + \sum_{i=1}^{2} c_i r^{(i)} (n_{B(n)}^{(i)} - l_{B(n)}^{(i)})^{N+1} \left(\frac{2}{3}\right)^{(N+1)/2} < \sigma_{33} >^N. \tag{40}$$

Окрім того, матеріал розтягується упоперек включень $<\sigma_{11}>\neq 0$. Тоді запишемо

$$A_{2\hat{\sigma}(n)}^{(i)}=\frac{2}{3}[(l_{B(n)}^{(i)}-k_{B(n)}^{(i)})^2+3m_{B(n)}^{(i)2}]<\sigma_{11}>^2 \tag{41}$$

і, як наслідок,

$$<\varepsilon_{11}>=(k_\xi^*+m_\xi^*)<\sigma_{11}>+\sum_{i=1}^{2}c_i r^{(i)}\left(\frac{2}{3}\right)^{(N+1)/2}[(l_{B(n)}^{(i)}-k_{B(n)}^{(i)})^2+$$

$$+3m_{B(n)}^{(i)2}]^{(N-1)/2}[(k_{B(n)}^{(i)}-2l_{B(n)}^{(i)})(k_{B(n)}^{(i)}-l_{B(n)}^{T(i)})+3m_{B(n)}^{(i)2}]<\sigma_{11}>^N. \tag{42}$$

Якщо композитний матеріал знаходиться в стані макроскопічного чистого зсуву упоперек включень $<\sigma_{12}>\neq 0$, то

$$\begin{cases} A_{2\hat{\sigma}(n)}^{(i)}=8m_{B(n)}^{(i)}<\sigma_{12}>^2; \\ <\varepsilon_{12}>=2m_\xi^*<\sigma_{12}>+(2)^{(N-1)/2}\sum_{i=1}^{2}c_i r^{(i)}(2m_{B(n)}^{(i)})^{N+1}<\sigma_{12}>^N; \\ \alpha^{(1)}=\alpha^{(2)}=\dfrac{N-1}{2} \qquad (n=1,2,3,\ldots). \end{cases} \tag{43}$$

Нехай на матеріал діють макроскопічні напруження поздовжнього зсуву $<\sigma_{13}>\neq 0$, при цьому

$$\begin{aligned} &A_{2\hat{\sigma}(n)}^{(i)}=8p_{B(n)}^{(i)2}<\sigma_{13}>^2; \\ &<\varepsilon_{13}>=2p_\xi^*<\sigma_{13}>+(2)^{(N-1)/2}\sum_{i=1}^{2}c_i r^{(i)}(2p_{B(n)}^{(i)})^{N+1}<\sigma_{13}>^N. \end{aligned} \tag{44}$$

Якщо навантаження відбувається під кутом до осі армування, то можна поступити наступним чином. Нехай навантаження прикладене вздовж осі x_1, $<\sigma_{11}>\neq 0$, а включення орієнтовані вздовж осі y_3, причому одиничні орти двох систем координат пов'язані перетворенням повороту в площині x_1x_3:

$$\begin{aligned} &\vec{e}_i^{\,y}=a_{im}\vec{e}_m^{\,x}; \\ &\|a_{im}\|=\begin{Vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{Vmatrix}, \end{aligned} \tag{45}$$

причому

$$\begin{gathered} \sigma_{ij}^y=a_{im}a_{jn}\sigma_{mn}^x; \\ <\sigma_{11}^y>=<\sigma_{11}^x>\cos^2\varphi=t_1; \qquad <\sigma_{22}^y>=<\sigma_{11}^x>\sin^2\varphi=t_2; \\ <\sigma_{13}^y>=-<\sigma_{11}^x>\cos\varphi\sin\varphi=t_4, \end{gathered} \tag{46}$$

звідки в системі координат y знаходимо

$$\begin{cases} A_{2\hat{\sigma}}^{(i)} = \alpha_{1(n)}^{(i)} t_1^2 + \alpha_{2(n)}^{(i)}) t_1 t_3 + \alpha_{3(n)}^{(i)} t_3^2 + \alpha_{5(n)}^{(i)} t_4^2]; \\ < \varepsilon_{11}^{y} > = (k_\xi^* + m_\xi^*) t_1 + l_\xi^* t_3 + \sum_{i=1}^{2} c_i r^{(i)} A_{2\hat{\sigma}}^{(i)(N-1)/2} [(k_{R(n)}^{(i)} + \\ + m_{R(n)}^{(i)}) t_1 + l_{R(n)}^{(i)} t_3]; \\ < \varepsilon_{33}^{y} > = l_\xi^* t_1 + n_\xi^* t_3 + \sum_{i=1}^{2} c_i r^{(i)} A_{2\hat{\sigma}}^{(i)(N-1)/2} (l_{R(n)}^{(i)}) t_1 + n_{R(n)}^{(i)} t_3]; \\ < \varepsilon_{13}^{y} > = 2 p_\xi^* t_1 + 2 \sum_{i=1}^{2} c_i r^{(i)} A_{2\hat{\sigma}}^{(i)(N-1)/2} p_{R(n)}^{(i)} t_4; \\ \alpha^{(1)} = \alpha^{(2)} = \dfrac{N-1}{2} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases} \tag{47}$$

Експериментальні дослідження показують, що руйнування композита, як правило, починається з руйнування одного з компонентів. Щоб оцінити характеристики міцності матеріалу, необхідно ввести коефіцієнти концентрації напружень у компонентах, які визначаються рівняннями:

$$K_\sigma^{(i)} = \frac{(< \hat{\sigma}_{pq} | i > < \hat{\sigma}_{pq} | i >)^{1/2}}{(< \hat{\sigma}_{pq} > < \hat{\sigma}_{pq} >)^{1/2}}. \tag{48}$$

З (39), (41), (43), (44) випливає, що при дії одновимірних макроскопічних навантажень коефіцієнти концентрації напружень у компонентах можна представити формулами

$$\begin{gathered} K_{\sigma 33}^{(i)} = \left| n_{B(n)}^{(i)} - l_{B(n)}^{(i)} \right|; \\ K_{\sigma 11}^{(i)} = [(l_{B(n)}^{(i)} - k_{B(n)}^{(i)})^2 + 3 m_{B(n)}^{(i)2}]^{1/2} \, K_{\sigma 13}^{(i)} = 2 \left| p_{B(n)}^{(i)} \right|; \\ K_{c12}^{(i)} = 2 \left| m_{B(n)}^{(i)} \right|. \end{gathered} \tag{49}$$

Як приклад наведемо результати розрахунку приведених характеристик в'язкопружного деформування композита, утвореного епоксидною смолою і скляними включеннями, і порівняємо їх з експериментальними даними. В'язкі характеристики матриці описуються за допомогою дробово-експоненціальної функції Работнова зі сталими коефіцієнтами $\xi = 0{,}0564$ год$^{-1/2}$; $\alpha = -0{,}5$; $\beta = -0{,}1764$ год$^{-1/2}$.

Рис. 1 ілюструє залежність операторних модулей зсуву та Юнга від часу. На рис. 2 приведено графік в'язкопружного деформування композита (концентрація наповнювача $c_1 = 0{,}6$) при поздовжньому розтязі за формулою (40).

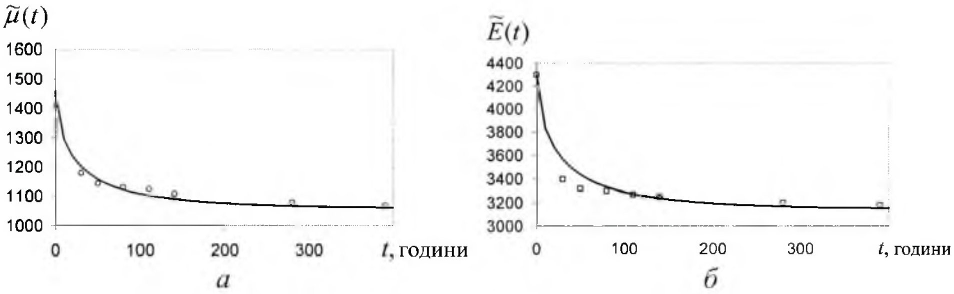

Рис. 1. Залежність модуля зсуву (*а*) і модуля Юнга (*б*) епоксидної смоли від часу. (Точки – експериментальні дані.)

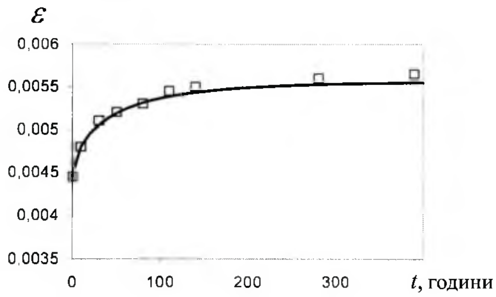

Рис. 2. Крива повзучості епоксидної смоли, армованої скляними включеннями. (Точки – експериментальні дані [11].)

Висновки

1. Запропоновано метод дослідження приведених характеристик та концентрації середніх напружень у включеннях та матриці в залежності від часу.

2. Макроскопічні параметри, що визначаються в рамках цієї теорії, є функціями в'язкопружних характеристик компонентів, їх об'ємних концентрацій та параметрів початкового напружено-деформованого стану і армуючих елементів.

Резюме

Приводится решение задачи по оценке концентрации напряжений в компонентах (матрица и включения) многокомпонентного вязкоупругого композитного материала в зависимости от формы включений, свойств матрицы и всего композита. Материал матрицы является изотропным и вязкоупругим. Рассматривается широкий диапазон свойств включений (например, пор, твердых и вязких частиц). Для решения данной задачи используется метод интегральных преобразований.

1. *Маслов Б. П.*, *Ляшенко Я. Г.* Эффективные характеристики ползучести многокомпонентных материалов // Теорет. и прикл. механика. – 2001. – Вып. 33. – С. 40 – 45.

2. *Kaminski A. A. and Gavrilov G. V.* Delayed fracture of an aging viscoelastic composite under plane strain // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 2. – P. 181 – 187.
3. *Новиков Н. В., Майстренко А. Л., Кулаковский В. Н.* Сопротивление разрушению сверхтвердых композиционных материалов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 220 с.
4. *Хорошун Л. П.* Метод условных моментов в задачах механики композитных материалов // Прикл. механика. – 1987. – **23**, № 10. – С. 100 – 108.
5. *Маслов Б. П.* Концентрация напряжений в несжимаемом многокомпонентном материале // Там же. – 2000. – **36**, № 3. – С. 108 – 114.
6. *Molchanov I. N., Levchenko I. S., Fedorchuk N. N., et al.* Numerical simulation of the stress concentration in an elastic half-space with a two-layer inclusion // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 3. – P. 308 – 314.
7. *Маслов Б. П., Рушицкий Я. Я., Коваленко А. П.* Полные наборы физических постоянных нелинейной микроструктурной теории двухфазной упругой смеси, вычисленные для ряда конструкционных материалов // Прикл. механика. – 1996. – **32**, № 4. – С. 18 – 26.
8. *Guz A. N., Maksimyuk V. A., and Chernyshenko I. S.* Numerical stress-strain analisis of shells includings the nonlinear and shear properties of composites // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, No. 10. – P. 1220 – 1228.
9. *Babich I. Yu. and Guz A. N.* Stability of composite structure members (three-dimentional formulation) // Ibid. – No. 9. – P. 1048 – 1075.
10. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. – М.: Наука, 1977. – 384 с.
11. *Megnis M. and Varna J.* Micromechanics based modeling of nonlinear viscoplastic response of unidirectional composite // Compos. Sci. Tech. – 2003. – **63**. – P. 19 – 31.

Поступила 05. 04. 2004