

Классический подход к анализу влияния краевых условий на напряжения и податливость упругогогиба трубы

И. В. Орыняк, С. А. Радченко

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Предложен новый аналитический метод для анализа краевого эффекта в нагруженном изгибающим моментом гйбе трубы с учетом действия внутреннего давления. Метод основан на использовании упрощающих гипотез, позволяющих выразить все деформационные и силовые параметры через тангенциальное перемещение, которое принимается в виде разложения в ряд Фурье по окружной координате. Получена система дифференциальных уравнений четвертой степени по осевой координате относительно неизвестных коэффициентов в разложении для перемещений. Приведены аналитическое приближенное решение для гйба и точное решение для прямой трубы, которые записываются через функции Крылова. Сформулирована процедура применения метода начальных параметров, где в качестве граничных условий используются значения тангенциального и продольного перемещений, осевого и касательного усилий. Получены уравнения связи между этими параметрами в начале и в конце гйба трубы. Проведено сопоставление полученных результатов с данными литературных источников.

Ключевые слова: гйб трубы, краевой эффект, метод начальных параметров, прямая труба, граничные условия, тангенциальное перемещение.

Введение. Ранее [1, 2] было получено и проанализировано локальное решение по Сен-Венану для гйба трубы, в котором распределение внутренних усилий в каждом сечении гйба пропорционально значениям внешних глобальных изгибающих моментов. Напомним, что локальное решение предусматривает значительную овализацию поперечного сечения (радиальные перемещения изменяются по закону $\cos 2\varphi$ ($\sin 2\varphi$), $\cos 4\varphi$ ($\sin 4\varphi$) и т.д.), и при этом возникают дополнительные осевые продольные усилия (изменяются по закону $\sin 3\varphi$ ($\cos 3\varphi$), $\sin 5\varphi$ ($\cos 5\varphi$) и т.д.). Выбор тригонометрических функций осуществляется в зависимости от способа приложения изгибающего момента – в плоскости гйба или из его плоскости. Овализация, в частности, приводит к существенному увеличению податливости гйба по сравнению с прямой трубой, что описывается коэффициентом K^l , где индекс “л” обозначает принадлежность к локальному решению.

Между тем в реальной трубопроводной системе гйб находится в сопряжении с другими элементами, например с прямолинейными участками, фланцами, характер деформирования которых иной. Поскольку напряжения и перемещения должны сохранять непрерывность, в некоторой зоне сопряжения возникают краевые эффекты. В зависимости от геометрических и физических характеристик сопрягаемых элементов эта зона может быть пренебрежимо мала по сравнению с длиной гйба либо, наоборот, весь гйб может находиться в ней. Поэтому усредненный по длине гйба коэффициент податливости K может находиться между K^l и единицей (как для прямой трубы). Такая же неопределенная ситуация имеет место при определении напряжений в гйбе.

Данная проблема экспериментально исследовалась, начиная с 20-х годов прошлого столетия (см. обзоры в [3]), и особенно интенсивно в связи с разработкой новых норм ASME по расчету трубопроводов в начале 50-х годов. Наиболее тщательные исследования, описание и обсуждение которых приведено в [3], были выполнены Пардю и Вигнессом [4]. На основе ограниченного анализа этих данных Маркл [5] сформулировал общие рекомендации по практическому учету условий сопряжения и закрепления при расчете напряжений и податливостигиба. Несмотря на большой прогресс в разработке расчетных методов, эти рекомендации до сих пор применяются в различных международных стандартах и руководствах, например в [6, 7]. Поэтому есть смысл привести их.

1. Считается, что сопряжение с прямой трубой не влияет на распределение напряжений в гйбе. Поэтому коэффициент податливости K принимается равным K^1 .

2. Для гйбов с двумя жесткими фланцами на концах полагают, что значение

$$K = 1,65\lambda^{2/3}, \quad (1a)$$

в случае одного жесткого фланца –

$$K = 1,65\lambda^{5/6}. \quad (16)$$

Здесь $\lambda = \frac{R^2}{Bt}$ – параметр гибкости, где R – радиус сечения гйба; B – радиус кривизны гйба; t – толщина стенки.

3. Влияние краевого эффекта распространяется только на зону, удаленную в пределах 30° .

Такие рекомендации качественно неправильны, поскольку длина зоны влияния зависит от абсолютной длины гйба трубы, а не от его угловой протяженности, а коэффициент податливости есть непрерывная функция, изменяющаяся от единицы до K^1 . Эти величины могут быть определены только в результате точного решения краевого эффекта.

Подобные субъективные рекомендации содержатся также в отечественных нормативных документах, например в [8], где зона влияния краевого эффекта принята равной 45° , а в ее пределах величина K линейно аппроксимируется от единицы до значения K^1 . Методически более правильными представляются методы расчета, принятые в ПНАЭ [9], где соответствующие поправочные коэффициенты определяются исходя из результатов расчетного метода Аксельрада [3]. Используя в целом корректную математическую постановку задачи, основанную на теории оболочек, авторы ограничились только трехчленным разложением искомой функции перемещений, что сужает область применения результатов. Более подробно результаты, полученные по методу Аксельрада и принятые в ПНАЭ, будут обсуждены ниже.

Строгое решение для краевого эффекта может быть получено из известных постановок теории оболочек. Так, для цилиндрической оболочки круго-

вого сечения получают три дифференциальных уравнения с тремя неизвестными компонентами перемещений. С учетом разложения неизвестных в ряды по $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, где φ – угловая по сечению координата, они сводятся к дифференциальному уравнению восьмой степени относительно осевой координаты [10, 11] с правой частью, зависящей от внешнего нагружения. Как обычно, решения таких уравнений ищут в виде суммы частного решения неоднородного уравнения и общего решения однородного уравнения с неопределенными коэффициентами. Локальное решение, по сути, представляет собой частное решение неоднородного уравнения. Что касается общего решения однородного уравнения, то при малых значениях целого числа n дифференциальное уравнение восьмой степени разбивается на два независимых биквадратных уравнения: первое описывает основное напряженное состояние, медленно изменяющееся по осевой координате, второе – дает решение, которое по мере удаления от границы очень быстро затухает. “Медленное” решение приводит к большим значениям радиальных перемещений и продольной силы – именно эти параметры являются большими в локальном решении и нуждаются в “сглаживании” при анализе краевых эффектов.

Такой подход на основе строгих постановок теории оболочек, позволяющий находить собственные функции, которые описывают характер поведения краевого эффекта, авторы называют классическим, чтобы отличать его от других аналитических подходов, где используются приближенные методы решения задачи. В работе [12] собственные функции находятся в результате минимизации функционала энергии, где в качестве неизвестных используются радиальные и осевые напряжения, что приводит к биквадратному дифференциальному уравнению. В [13] предложен альтернативный полуаналитический подход, в котором согласно [14, 15] функции, описывающие краевой эффект, принимаются в заданном виде, например $\cos \frac{m\pi x}{L}$ и $\sin \frac{m\pi x}{L}$, где m – целое число; L – длина гйба трубы; x – осевая координата, а неизвестные коэффициенты определяются из минимума потенциальной энергии. Однако известно, что собственные функции, характеризующие краевой эффект, являются экспоненциальными и приводят к нулевому влиянию, если длина L больше некоторой характерной для собственной функции длины. Поэтому такой подход [15], использующий кинематически возможные перемещения, может быть эффективен только в случае, если L меньше зоны влияния краевого эффекта.

Численные методы широко применяются при решении конкретных задач для оболочек [16], однако они не обладают предсказательными способностями, т.е. не выделяют характер решения и количественную степень влияния на него того или иного безразмерного параметра. Поэтому в литературных источниках представлено небольшое количество обобщающих работ, поскольку такой анализ требует проведения значительного объема численных экспериментов [17]. В последнее время при решении задач для торообразной оболочки успешно применяется метод дифференциальных квадратур [18, 19]. Это полуаналитический метод, использующий строгие поста-

новки для торообразной оболочки и обычное разложение неизвестных функций в виде рядов Фурье по окружной координате. Его особенностью является то, что вектор значений производных по осевой координате искомым функций в заданных точках представляется в виде произведения некоторой матрицы на вектор значений этих функций в заданных точках.

Цель настоящего сообщения – получение аналитического решения для упругого краевого эффектагиба трубы в классической постановке задачи. Решение будем искать в предположении, что параметр кривизны $\alpha = R/B \rightarrow 0$. Все геометрические и физические обозначения соответствуют принятым ранее [1, 2].

Основные уравнения в криволинейной оболочке. Полагаем, что на гиб действуют два внешних силовых фактора: внутреннее давление P и изгибающий момент K_z относительно оси z (момент в плоскостигиба):

$$K_z = \bar{\sigma} k_z \pi R^2 t, \quad (2)$$

где $\bar{\sigma}$ – единичное напряжение; k_z – безразмерный коэффициент, характеризующий величину внешнего нагружения.

Уравнения равновесия для торообразной оболочки при $\alpha \rightarrow 0$ имеют вид [20]

$$\frac{N_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{N_x \sin \varphi}{B_0} = P; \quad (3a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial N_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{Q_\varphi}{R} + \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{N_x \cos \varphi}{B_0} = 0; \quad (3б)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} + \frac{\partial N_x}{\partial x} - \frac{Q_x \sin \varphi}{B_0} = 0; \quad (3в)$$

$$Q_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial x} - \frac{M_x \cos \varphi}{B_0} = 0; \quad (3г)$$

$$Q_x + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\varphi x}}{\partial \varphi} + \frac{\partial M_x}{\partial x} = 0, \quad (3д)$$

где N_φ , N_x и Q_φ , Q_x – локальные продольные и поперечные силы в соответствующих направлениях; M_φ и M_x – локальные изгибающие моменты; L и $M_{\varphi x}$ – касательные сила и момент соответственно; φ – угловая координата по сечению трубы; x – текущая продольная координата. Длягиба имеем $x = B\theta$, где θ – угловая координата поперечного сечениягиба.

При приложении к гибу только изгибающих моментов в правой части (3a) необходимо положить $P = 0$. Задача о нахождении напряжений при действии только внутреннего давления тривиальна. Однако при совместном

действии изгибающих моментов и внутреннего давления задача не разбивается на два независимых решения. Проблема состоит в том, что овализационные перемещения от внешних моментов являются достаточно большими, и их влиянием на изменение геометрии сечения нельзя пренебречь. Данная задача – геометрически нелинейная, и процедура подхода к ее решению описана ранее [2]. Кратко повторим основные моменты решения.

Во-первых, в результате овализации изменяется кривизна поперечного сечения χ_φ , которая может быть записана в виде суммы исходной кривизны $1/R$ и кривизны χ_φ^M , связанной с деформированием от действия локальных моментов M_φ :

$$\chi_\varphi = 1/R + \chi_\varphi^M. \quad (4)$$

Во-вторых, окружное усилие представляется в виде суммы окружного усилия, вызванного изгибающими моментами N_φ^M и внутренним давлением N_φ^P , причем N_φ^P значительно больше N_φ^M . Выражение для N_φ^P легко находится из (3а) и при условии $\alpha \rightarrow 0$ записывается так:

$$N_\varphi^P = PR. \quad (5)$$

Множитель $1/R$ при компоненте N_φ в уравнении (3а) заменяем значением χ_φ (4), при этом учитываем, что $1/R \gg \chi_\varphi^M$, и N_φ^P в уравнении (3а) уравновешивает внутреннее давление. Используя обычные обозначения для сил и кривизны, т.е. без верхнего индекса M , первое уравнение равновесия при совместном действии изгибающих моментов и внутреннего давления преобразуется следующим образом:

$$\frac{N_\varphi}{R} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{N_x \sin \varphi}{B_0} + \chi_\varphi N_\varphi^P = 0. \quad (6)$$

Изменения в остальных уравнениях равновесия незначительны и поэтому не учитываются.

Геометрические уравнения, связывающие перемещения точек срединной поверхности и деформации, имеют вид

$$\varepsilon_\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v \cos \varphi + w \sin \varphi}{B_0}; \quad (7a)$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R}; \quad (7б)$$

$$\gamma_{\theta\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (7в)$$

и

$$\chi_{\theta} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad (7\text{г})$$

$$\chi_{\varphi} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} - \frac{w}{R^2}; \quad (7\text{д})$$

$$\chi_{\theta\varphi} = \frac{2}{R} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{2}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial \varphi}, \quad (7\text{е})$$

где ε_{θ} , ε_{φ} , $\gamma_{\theta\varphi}$ – деформации срединной поверхности; χ_{θ} , χ_{φ} и $\chi_{\theta\varphi}$ – кривизны в соответствующих направлениях; u , v , w – соответственно продольное, тангенциальное и радиальное перемещения срединной поверхности.

Внутренние силы и моменты связаны с деформациями следующим образом:

$$N_{\varphi} = H(\varepsilon_{\varphi} + \mu\varepsilon_{\theta}); \quad (8\text{а})$$

$$N_x = H(\varepsilon_{\theta} + \mu\varepsilon_{\varphi}); \quad (8\text{б})$$

$$L = \frac{H}{2}(1 - \mu)\gamma_{\theta\varphi} \quad (8\text{в})$$

и

$$M_{\varphi} = H\delta(\chi_{\varphi} + \mu\chi_{\theta}); \quad (8\text{г})$$

$$M_x = H\delta(\chi_{\theta} + \mu\chi_{\varphi}); \quad (8\text{д})$$

$$M_{\varphi x} = \frac{H\delta(1 - \mu)}{2}\chi_{\theta\varphi}; \quad (8\text{е})$$

где $H = \frac{Et}{1 - \mu^2}$; $\delta = \frac{t^2}{12}$; E – модуль Юнга; μ – коэффициент Пуассона.

Последовательность решения. Решение задачи в строгой постановке теории оболочек состоит в следующем [10, 11]. С учетом соотношений (7), (8) и уравнений равновесия (3г), (3д) все силы и моменты записываются в зависимости от компонент перемещений. Таким образом, подставляя в первые три уравнения равновесия (3б), (3в) и (6) выражения для Q_{φ} и Q_x , нетрудно получить три дифференциальных уравнения для трех неизвестных перемещений u , v , w . Эти уравнения с учетом разложения неизвестных в виде рядов по $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ приводятся к одному дифференциальному уравнению восьмой степени с одной неизвестной компонентой перемещений относительно продольной координаты. Решение такого уравнения представляет определенные трудности и требует наличия восьми следующих граничных условий, выражаемых через v , v' , u , u' , w , w' , w'' , w''' .

Аналитическое решение такого рода задач возможно, если использовать упрощающие гипотезы, которые дают дополнительные уравнения связи для компонент перемещений и позволяют уменьшить количество неизвестных параметров. При использовании этих гипотез можно существенно понизить степень дифференциального уравнения. Основой для применения данных гипотез является то, что при малых n упомянутое выше уравнение восьмой степени разбивается на два независимых уравнения четвертой степени. В результате решения первого из них получаем так называемое “быстро изменяющееся решение”, в результате решения второго – “медленно изменяющееся решение”. Быстро изменяющееся решение дает большие значения поперечного усилия Q_x и изгибающего момента M_x , в то время как перемещения, например w , u , и осевое усилие N_x являются незначительными. Медленно изменяющееся решение, напротив, дает большие значения перемещений w и осевого усилия N_x , которые важны при сопряжении гiba с другими конструктивными элементами.

Суть обоснования применения упрощающих гипотез заключается в том, что при овализации величины поперечного Q_φ и касательного L усилий соизмеримы с окружным усилием N_φ . Их сопоставление позволяет получить выражения связи для овализационных компонент перемещений:

$$w + \frac{\partial v}{\partial \varphi} = 0; \quad (9a)$$

$$\frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \quad (9б)$$

Учитывая гипотезы (9), все силы и моменты можно представить в зависимости только от одной неизвестной функции v . Однако при этом следует принимать во внимание, что уравнения (8a) и (8в) для определения окружного N_φ и касательного L усилий становятся некорректными. Эти усилия должны определяться соответственно из первого и третьего уравнений равновесия. Таким образом, подстановка гипотез (9) в уравнения равновесия может осуществляться только после исключения из них усилий N_φ и L .

Применение упрощающих гипотез в виде (9) позволяет отбросить “короткие” решения и понизить степень конечного дифференциального уравнения с восьмой до четвертой, что существенно облегчает процедуру получения аналитического решения.

В соответствии с гипотезами (9) и геометрическими уравнениями (7) выражения для моментов (8) и поперечных усилий (3) записываются следующим образом:

$$M_\varphi = \frac{H\delta}{R^2} \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \mu R^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial x^2} \right); \quad (10a)$$

$$M_x = \frac{H\delta}{R^2} \left[R^2 \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi \partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^3} + \frac{\partial v}{\partial \varphi} \right) \right]; \quad (10б)$$

$$M_{\varphi x} = \frac{H\delta}{R}(1-\mu)\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^2 \partial x}\right); \quad (10\text{в})$$

$$Q_{\varphi} = -\frac{H\delta}{R^3}\left[\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^2 \partial x^2} + (1-\mu)R^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right]; \quad (10\text{г})$$

$$Q_x = -\frac{H\delta}{R^2}\left[\frac{\partial^2 v}{\partial \varphi \partial x} + \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^3 \partial x} + R^2 \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi \partial x^3}\right]. \quad (10\text{д})$$

Осевое усилие N_x также можно выразить через тангенциальные перемещения v . Из выражений (8а) и (8б) несложно получить связь между усилиями N_x и N_{φ} :

$$N_x - \mu N_{\varphi} = Et\varepsilon_{\theta}. \quad (11)$$

Поскольку окружное усилие N_{φ} пропорционально коэффициенту α , близкому к нулю, в данном анализе можно полагать, что $N_{\varphi} \approx 0$. В этом случае, учитывая (7а), имеем

$$N_x = Et\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{v \cos \varphi + w \sin \varphi}{B_0}\right) \quad (12\text{а})$$

и, воспользовавшись гипотезами (9), окончательно запишем

$$\frac{\partial N_x}{\partial \varphi} = -Et\left(R \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\sin \varphi}{B_0}\left(v + \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2}\right)\right). \quad (12\text{б})$$

Выражение для касательного усилия L получаем из уравнения равновесия (3в). Полагая, что локальное перерезывающее усилие Q_x достаточно мало и $\alpha \rightarrow 0$, получаем

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} = -R \frac{\partial N_x}{\partial x} \quad (13\text{а})$$

или

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \varphi^2} = EtR\left(R \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} + \frac{\sin \varphi}{B_0}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial \varphi^2 \partial x}\right)\right). \quad (13\text{б})$$

Таким образом, все внутренние усилия и моменты представлены в зависимости только от одной переменной v . При этом сами тангенциальные перемещения v будем представлять в виде бесконечных тригонометрических рядов. В общем виде они записываются следующим образом:

$$v(x, \varphi) = \Omega R[A_2(x) \sin 2\varphi + A_3(x) \cos 3\varphi + \dots], \quad (14)$$

где, как и ранее [1], коэффициент $\Omega = \frac{k_z \bar{\sigma} B_0}{ER}$ введен для удобства; A_i – искомые функции.

Технически процедура решения такова. Уравнение (6) дифференцируем один раз по угловой координате φ и вычитаем его из уравнения (3б). Продифференцировав полученное уравнение два раза по координате φ и подставив в него выражение для касательного усилия L (13а), получим следующее уравнение:

$$N_\varphi^P \frac{\partial^3 \chi_\varphi}{\partial \varphi^3} + \frac{1}{R} \frac{\partial^4 Q_\varphi}{\partial \varphi^4} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 Q_\varphi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^4 Q_x}{\partial \varphi^3 \partial x} + R \frac{\partial^3 N_x}{\partial \varphi \partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left(\frac{2N_x \cos \varphi}{B_0} + \frac{\sin \varphi}{B_0} \frac{\partial N_x}{\partial \varphi} \right) = 0. \quad (15)$$

Уравнение (15) является главным уравнением анализа краевого эффекта и, как будет показано ниже, представляет собой дифференциальное уравнение четвертой степени относительно v по переменной x .

Одно из важных условий решения заключается в правильном выборе граничных условий. Для определения коэффициентов в решении уравнения (15) требуется четыре граничных условия, которые должны обеспечить непрерывность решения. Применение гипотез (9) позволило выразить все силовые и деформационные параметры через комбинации нулевой, первой, второй и третьей производных от v по координате x . Как наиболее значимые в граничных условиях используются значения тангенциального перемещения v , продольного перемещения u (как функции от v' (9б)), осевого усилия N_x (как функции от v и v'' (12б)), касательного усилия L (как функции от v' и v''' (13б)).

Несмотря на то что окончательное уравнение анализа (15) является дифференциальным уравнением четвертой степени, получить его аналитическое решение затруднительно. Это обусловлено тем, что уравнения (15), записанные для разных гармоник по φ , связаны между собой. Поэтому прежде чем перейти непосредственно к анализу краевого эффекта в гйбе трубы, рассмотрим решение для прямой трубы. Оно более простое, однако на его примере будут сделаны некоторые допущения, которые позволят легче понять и построить схему решения для гйба трубы. Более того, такое решение необходимо иметь для анализа сопряжения прямой трубы с гйбом.

Решение краевого эффекта для прямой трубы. Постановочные уравнения для прямой трубы легко записываются, если положить, что радиус кривизны $B_0 = \infty$. Тогда с учетом представления для внутренних сил (10) и (12) главное уравнение анализа (15) для прямой трубы записывается так:

$$\frac{N_\varphi^P}{R^2} \left(\frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} \right) - EtR^2 \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} - \frac{H\delta}{R^4} \left[\left(\frac{\partial^4 v}{\partial \varphi^4} + 2 \frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^6} + \frac{\partial^8 v}{\partial \varphi^8} \right) + \right.$$

$$+ R^2 \left[2 \frac{\partial^8 v}{\partial \varphi^6 \partial x^2} + 3 \frac{\partial^6 v}{\partial \varphi^4 \partial x^2} \right] + R^4 \frac{\partial^8 v}{\partial \varphi^4 \partial x^4} = 0. \quad (16)$$

Подставляя в (16) разложение для перемещений v (14), получаем независимые дифференциальные уравнения четвертой степени по переменной x для определения неизвестных функций A_i путем сравнения коэффициентов при одинаковых тригонометрических членах, т.е. $\sin i\varphi$ и $\cos i\varphi$, $i = 2, 3, \dots$. В общем виде эти уравнения имеют следующий вид:

$$a_{1,i} A_i + a_{2,i} A_i'' + a_i A_i^{IV} = 0. \quad (17)$$

Здесь

$$a_{1,i} = (i^4 - i^2)^2 + 12P_n(1 - \mu^2)i^4(i^2 - 1); \quad (18a)$$

$$a_{2,i} = R^2 i^4 (3 - 2i^2); \quad (18б)$$

$$a_i = 12(1 - \mu^2) \frac{R^2}{t^2} R^4 + i^4 R^4; \quad (18в)$$

$$P_n = \frac{PR^3}{Et^3} = \frac{\sigma_{\varphi p} R^2}{E t^2}, \quad (18г)$$

где $\sigma_{\varphi p} = PR/t$ – окружные напряжения от давления в тонкостенной цилиндрической оболочке.

Покажем, что выражение (17) можно упростить за счет пренебрежения коэффициентом $a_{2,i}$. Представляя решение в виде $A_i = e^{\lambda x}$, записываем выражение для корней характеристического уравнения, из которого видно, что коэффициентом $a_{2,i}$ можно пренебречь, если выполняется условие

$$\frac{a_{2,i}}{a_i} \ll 2 \sqrt{\frac{a_{1,i}}{a_i}}. \quad (19)$$

Подставив в (19) выражения для коэффициентов a (18), получим окончательно условие пренебрежимости коэффициентом $a_{2,i}$, которое зависит от номера гармоники, давления и отношения t/R :

$$1 \gg \frac{i^2}{\sqrt{12 + i^4(t/R)^2} \sqrt{1 + 12P_n/i^2}} \frac{t}{R}. \quad (20)$$

Таким образом, общий вид уравнения (17) для определения неизвестных функций A_i записывается так:

$$a_{1,i}A_i + a_iA_i^{IV} = 0. \quad (21)$$

Решение уравнения (21) удобно представить через функции Крылова $Y_k(x)$:

$$A_i = C_{1,i}Y_{1,i} + C_{2,i}\frac{Y_{2,i}}{\beta_i} + C_{3,i}\frac{Y_{3,i}}{\beta_i^2} + C_{4,i}\frac{Y_{4,i}}{\beta_i^3}. \quad (22)$$

Здесь для удобства введены обозначения: $Y_{k,i} = Y_k(\beta_i x)$; $C_{k,i}$ – неизвестные коэффициенты, которые находятся из граничных условий, где $k = 1, \dots, 4$; β_i – собственное число,

$$\beta_i = \sqrt[4]{\frac{a_{1,i}}{4a_i}} = \sqrt[4]{\frac{(i^4 - i^2)^2 + 12\frac{PR^3}{Et^3}(1 - \mu^2)i^4(i^2 - 1)}{48(1 - \mu^2)\left(1 + \frac{i^4}{12(1 - \mu^2)R^2}\frac{t^2}{R}\right)}} \sqrt{\frac{t}{R}} \frac{1}{R}. \quad (23)$$

Напомним, что функции Крылова записываются следующим образом:

$$Y_{1,i} = \frac{1}{2}(e^{\beta_i x} + e^{-\beta_i x})\cos\beta_i x; \quad (24a)$$

$$Y_{2,i} = \frac{1}{4}[(e^{\beta_i x} + e^{-\beta_i x})\sin\beta_i x + (e^{\beta_i x} - e^{-\beta_i x})\cos\beta_i x]; \quad (24б)$$

$$Y_{3,i} = \frac{1}{4}(e^{\beta_i x} - e^{-\beta_i x})\sin\beta_i x; \quad (24в)$$

$$Y_{4,i} = \frac{1}{8}[(e^{\beta_i x} + e^{-\beta_i x})\sin\beta_i x - (e^{\beta_i x} - e^{-\beta_i x})\cos\beta_i x] \quad (24г)$$

и обладают двумя характерными свойствами. Во-первых, они связаны между собой дифференциальными зависимостями:

$$Y'_{1,i} = -4\beta_i Y_{4,i}; \quad Y'_{2,i} = \beta_i Y_{1,i}; \quad Y'_{3,i} = \beta_i Y_{2,i}; \quad Y'_{4,i} = \beta_i Y_{3,i}. \quad (25a)$$

Во-вторых, при $x = 0$ имеем

$$Y_{1,i} = 1; \quad Y_{2,i} = 0; \quad Y_{3,i} = 0; \quad Y_{4,i} = 0. \quad (25б)$$

Отметим два важных результата, используемых далее при анализе гиба.

1. Возможность пренебрежения в уравнении (17) коэффициентом $a_{2,i}$.

2. Из анализа выражения (23) для параметра β_i в прямой трубе следует условие:

$$\beta_i^4 \ll \beta_{i+1}^4, \quad (26)$$

которое справедливо, по крайней мере, при малых i .

Общее решение краевого эффекта для гiba трубы. Главным уравнением анализа для гiba трубы является дифференциальное уравнение (15). Подставляя в него разложение (14) для перемещений v , путем сравнения коэффициентов при одинаковых тригонометрических членах ($\sin i\varphi$ и $\cos i\varphi$, $i = 2, 3, \dots$) получаем взаимосвязанные дифференциальные уравнения четвертой степени по переменной x для определения неизвестных функций A_i . В общем виде эти уравнения записываются так:

$$a_{1,i}A_i + a_{2,i}A_{i-2} + a_{3,i}A_{i+2} + a_{4,i}A_i'' + a_{5,i}A_{i-1}'' + a_{6,i}A_{i+1}'' + a_i A_i^{IV} = f_i, \quad (27)$$

где

$$\begin{cases} a_{1,i} = 144 + 12A + 576P_n(1 - \mu^2), & i = 2; \\ a_{1,i} = (i^4 - i^2)^2 + 6Ai^2(i^2 + 1) + 12P_n(1 - \mu^2)i^4(i^2 - 1), & i \geq 3; \end{cases} \quad (28a)$$

$$a_{2,i} = 3Ai^2(3 - i)(1 + i); \quad (28б)$$

$$a_{3,i} = 3Ai^2(3 + i)(1 - i); \quad (28в)$$

$$a_{4,i} = R^2 i^4 (3 - 2i^2); \quad (28г)$$

$$a_{5,i} = 12(1 - \mu^2)R^2 \lambda \frac{R}{t} (-1)^{i+1} \frac{i^3 - i^2 + i}{i - 1}; \quad (28д)$$

$$a_{6,i} = 12(1 - \mu^2)R^2 \lambda \frac{R}{t} (-1)^i \frac{i^3 + i^2 + i}{i + 1}; \quad (28е)$$

$$a_i = 12(1 - \mu^2) \frac{R^2}{t^2} R^4 + i^4 R^4; \quad (28ж)$$

$$\begin{cases} f_2 = -72A, & i = 2; \\ f_i = 0, & i \geq 3; \end{cases} \quad (28з)$$

A – безразмерный коэффициент,

$$A = \frac{R^4(1 - \mu^2)}{B_0^2 t^2} = (1 - \mu^2)\lambda^2. \quad (29)$$

В уравнении (27), как и для прямой трубы, полагаем возможным пренебречь коэффициентом $a_{4,i}$ по условию, аналогичному (20). Таким образом, уравнение для определения функций A_i окончательно запишем так:

$$a_{1,i}A_i + a_{2,i}A_{i-2} + a_{3,i}A_{i+2} + a_{5,i}A_{i-1}'' + a_{6,i}A_{i+1}'' + a_i A_i^{IV} = f_2. \quad (30)$$

Уравнение типа (30) с несколькими другими коэффициентами было получено Аксельрадом и Ильиным [3]. Можно показать, что ограничиваясь функциями A_i , где $i = 2, 3, \dots, n, n+1$, система (30) сводится к дифференциальному уравнению

$$\frac{d^{4n}B}{dx^{4n}} + \frac{d^{4(n-1)}B}{dx^{4(n-1)}} g_1 + \dots + \frac{d^4B}{dx^4} g_2 + B g_3 = f_2, \quad (31)$$

где B – искомая функция; g_i – постоянные коэффициенты, определяемые комбинацией коэффициентов a (28). Учитывая сложность определения корней уравнения (31) и согласования граничных условий при анализе краевого эффекта, Аксельрад ограничился значением n , равным трем.

Для решения уравнения (30) авторы предлагают довольно простой метод, использующий зависимости вида (26). Его применение позволяет получать решение при достаточном для практики числе гармоник. Метод описан в Приложении 1. Полное решение уравнения (30) записывается в виде

$$A_i = A_{i,i} + \tilde{A}_i; \quad (32a)$$

$$\tilde{A}_i = \sum_{j=2}^{i-1} A_{i,j} + A_i^{\text{II}}, \quad (32b)$$

где A_i^{II} – компоненты частного решения неоднородной системы уравнений, представляющие собой локальное решение длягиба трубы [1, 2]; функции $A_{i,i}$ и $A_{i,j}$ – компоненты общего решения однородной системы. Функции с совпадающими индексами $A_{i,i}$ условимся называть главными, поскольку они содержат неизвестные коэффициенты, определяемые из граничных условий, остальные функции – дополнительными. Выражения для функций $A_{i,i}$ и $A_{i,j}$, где $j < i$, следующие:

$$A_{i,i} = C_{1,i}Y_{1,i} + C_{2,i} \frac{Y_{2,i}}{\gamma_i} + C_{3,i} \frac{Y_{3,i}}{\gamma_i} + C_{4,i} \frac{Y_{4,i}}{\gamma_i^3}; \quad (33a)$$

$$A_{i,j} = \begin{cases} k_{i,j}A_{j,j}, & \text{если } i-j = 2n, \\ k_{i,j}A_{j,j}'', & \text{если } i-j = 2n-1, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots; \quad j < i, \quad (33b)$$

где для удобства введены обозначения: $Y_{k,i} = Y_k(\gamma_i x)$ – функции Крылова; $C_{k,j}$ – неизвестные коэффициенты; γ_i – параметр, рассчитываемый по формуле (П18); $k_{i,j}$ – поправочные коэффициенты, определяемые по формулам (П12) и (П17), приведенным в Приложении 1. Заметим, что выражения (32) определяют елочную структуру решения, где с ростом i увеличивается число компонент общего решения.

Метод начальных параметров при решении краевого эффекта. Полученные общие решения для краевого эффекта могут быть легко реализованы для простых случаев сопряжения. В общем случае трубопроводная система состоит из большого числа участков, включающих гибы труб. Поэтому целесообразно развивать сразу общий метод решения. Удобно, например, применить метод начальных параметров (МНП). Суть его состоит в том, что трубопровод разбивается на подучастки, для которых записываются уравнения связи между параметрами v , u , N_x , L в конце подучастка и в начале (см. Приложение 2).

Процедура использования МНП общеизвестна. Применительно к трубопроводам она описана, например, в [21] и заключается в следующем. При расчете трубопровода происходит обход всех его подучастков и записывается разрешающая система уравнений, включающая: 1) уравнения связи между параметрами в начале и конце подучастка; 2) условия сопряжения подучастков, обеспечивающие непрерывность соответствующих переменных (П27); 3) граничные условия. В результате решения этой системы уравнений определяются параметры на всех концах подучастков. Некоторые типичные граничные условия и условия сопряжения приведены в Приложении 3.

Благодаря елочной структуре функций A_i (32) при решении краевого эффекта можно применить МНП независимо для каждой из гармоник i . При этом последовательно составляется и решается система уравнений для каждой гармоники, начиная с $i=2$.

Итак, по уравнениям (П23) и (П24), условиям сопряжения и граничным условиям составляется разрешающая система уравнений для гармоники $i=2$. Заметим, что для этой гармоники все дополнительные функции являются нулевыми. Решением такой системы будут значения перемещений и усилий на обоих концах всех подучастков, по которым с помощью формул (П20) и (П21) определяются главная функция $A_{2,2}$ и ее производные. Отметим, что коэффициент податливости K определяется только функцией $A_2(x)$. Далее по формуле (33б) находятся дополнительные функции $A_{n,2}$ ($n > 2$), определяемые по уже известным $A_{2,2}$ и $A_{2,2}''$.

На следующем этапе решения составляется разрешающая система уравнений для гармоники $i=3$. Согласно формулам (П23) и (П24) система включает дополнительные функции \bar{A}_3 , \bar{A}_3 и \bar{A}_3 , которые определяются по известным с предыдущего этапа функциям $A_{2,2}$ и $A_{2,2}''$. Таким образом, аналогично системе уравнений для гармоники $i=2$ неизвестными также будут только перемещения и усилия на обоих концах всех подучастков. После решения системы по формулам (П20) и (П21) с учетом условий сопряжения и граничных условий находятся функция $A_{3,3}$ и ее производные, по которым с использованием (33б) определяются дополнительные функции $A_{n,3}$ ($n > 3$).

Дальнейший ход решения для последующих гармоник $i > 3$ аналогичен решению для гармоники $i = 3$.

Примеры и обсуждение. Для проверки точности полученных решений рассмотрим примеры вычисления окружных σ_φ и осевых σ_x напряжений, а также коэффициента податливости K , приведенные в [17]. Напряжения вычисляются по следующим формулам:

$$\sigma_\varphi(x, \varphi) = \frac{6M_\varphi(x, \varphi)}{t^2} y; \quad (34a)$$

$$\sigma_x(x, \varphi) = \frac{N_x(x, \varphi)}{t} + \frac{6M_x(x, \varphi)}{t^2} y, \quad (34б)$$

где y – безразмерная координата по толщине стенки трубы, причем $y = 1$ и -1 соответственно для внешней и внутренней поверхности трубы. Выражение для коэффициента податливости таково [1]:

$$K(x) = 1 - \frac{3}{2} A_2(x). \quad (35)$$

Рассматриваются два гйба с жесткой заделкой на обоих концах и углом дуги $\theta = 90^\circ$. При расчетах использовалось приведенное в Приложении 1 решение (для $n = 5$), которое предположительно позволяет получать приемлемые результаты при $\lambda \leq 6$. Отметим, что наши решения были получены в предположении $\alpha \rightarrow 0$, что также может быть источником ошибок, поскольку в данных примерах значение параметра α достаточно большое. Для обоих случаев: $t = 12,5$ мм; $R = 131,25$ мм; $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\mu = 0,28$; $B_0 = \text{var}$.

Пример 1. Радиус гйба $B_0 = 250$ мм. В этом случае $\lambda = 5,5125$; $\alpha = 0,525$.

Рис. 1, а, б иллюстрирует зависимости осевых $\sigma_x(\varphi)$ и окружных $\sigma_\varphi(\varphi)$ напряжений на внешней поверхности, полученные по предлагаемому методу расчета. Там же представлены результаты численных расчетов, выполненных с помощью известной программы ADINAP [17], и экспериментальные данные [22]. Как видно, полученные результаты удовлетворительно соответствуют экспериментальным. Расхождение между ними обусловлено, во-первых, большим значением α и, в частности, неучетом напряжений от N_φ , во-вторых, большим значением λ , требующим использования большего числа гармоник.

Пример 2. Радиус гйба $B_0 = 375$ мм. Здесь $\lambda = 3,675$; $\alpha = 0,35$.

На рис. 1, в, г представлены аналогичные зависимости. В этом случае (умеренные α и λ) соответствие между полученными расчетными и экспериментальными данными значительно лучше. Наблюдается не только совпадение расчетных и экспериментальных значений напряжений по амплитуде, но и смещение локальных максимумов, например σ_φ , в сторону больших φ . В нашем решении последнее вызвано учетом членов, пропорциональных $\cos 3\varphi$. Заметим, что исходные уравнения ADINAP не содержат компонент с нечетными гармониками [17].

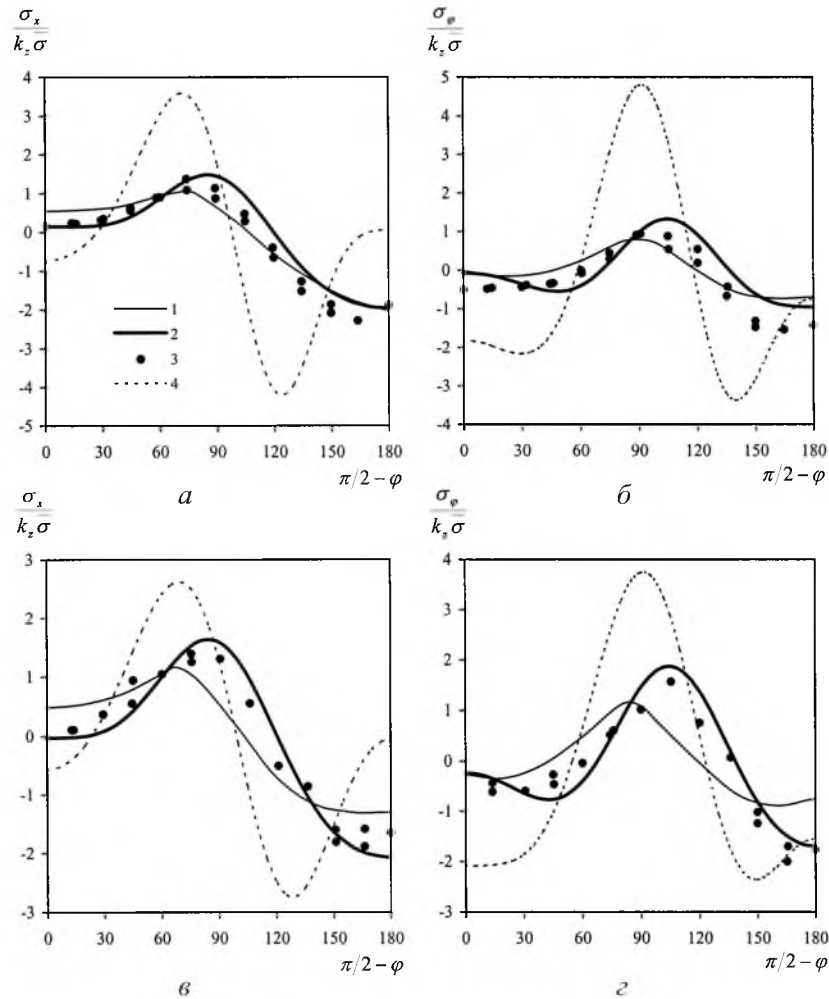


Рис. 1. Осевые σ_x (а, в) и окружные σ_φ (б, г) напряжения на внешней поверхностигиба в точке $\theta = 45^\circ$ при различных значениях B_0 : а, б – $B_0 = 250$ мм; в, г – $B_0 = 375$ мм (1 – по программе ADINAP; 2 – настоящие результаты; 3 – данные эксперимента; 4 – решение по Сен-Венану).

На рис. 1 для сравнения представлены графики напряжений $\sigma_x(\varphi)$ и $\sigma_\varphi(\varphi)$, полученные для локального решения задачигиба трубы, т.е. без учета влияния условий сопряжения. Как и ожидалось, локальное решение дает завышенные значения напряжений по сравнению с решением для краевого эффекта.

Сопоставим наши результаты расчета коэффициента податливости K с полученными по программе ADINAP [17] и экспериментальными данными [22]. На рис. 2 представлены усредненные по длинегиба коэффициенты податливости длягибов с $B_0 = \text{var}$, $t = 12,5$ мм, $R = 131,25$ мм. Условия закреплениягибов – жесткая заделка на обоих концах. Уголгибов $\theta = 90^\circ$. Для наглядности там же построен график $K^{\text{л}}$, полученный без учета краевого эффекта. Приведенные данные свидетельствуют о высокой эффективности метода.

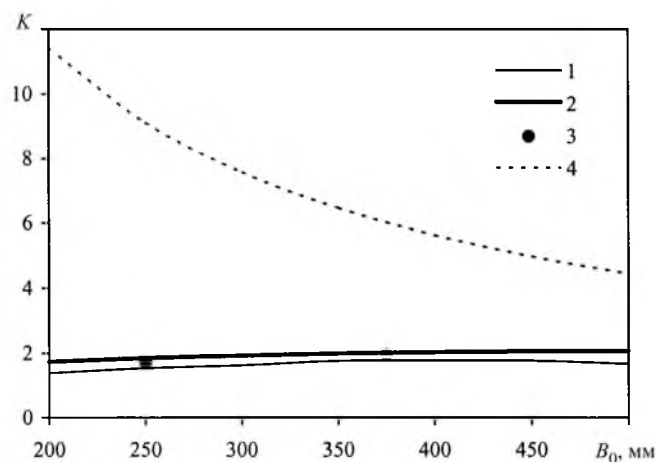


Рис. 2. Коэффициент податливости длягиба с жесткой заделкой на обоих концах: 1 – по программе ADINAP; 2 – настоящие результаты; 3 – данные эксперимента; 4 – решение по Сен-Венану.

Оценка прочности оборудования и трубопроводов атомных электростанций проводится по ПНАЭ [9]. Как отмечалось выше, представленные в этом документе методы расчетов являются наиболее методологически обоснованными. В [9] предлагается усредненный по длине коэффициент податливостигиба трубы, сопряженного на концах с бесконечными прямыми трубами, определять по следующей формуле:

$$K = \xi K^{\text{л}}, \quad (36)$$

где $K^{\text{л}}$ – локальный коэффициент податливости; ξ – поправочный коэффициент, который зависит от углагиба θ и безразмерных параметров α и λ и определяется способом линейной интерполяции по данным таблицы, приведенной в [9].

Проведем сравнение расчетных коэффициентов K , определенных по предлагаемому методу и по ПНАЭ (36), для разныхгибов. Анализ показал, что практически для всех случаев усредненное значение K , рассчитанное по предлагаемому методу, больше, чем определенное по ПНАЭ. В качестве примера на рис. 3 приведены такие результаты длягибов с углом θ от 0 до 90°. Безразмерные параметры приняты постоянными и равны $\lambda = 5$, $\alpha = 0,125$. Рассматриваются два случая в зависимости от типа нагружения: а) только изгибающим моментом; б) изгибающим моментом и внутренним давлением $P_n = 1$.

Отметим, что при учете действия внутреннего давления величина K по ПНАЭ может принимать значение меньше единицы (рис. 3,б), т.е. меньше значения K в прямой трубе.

Проведенный сравнительный анализ результатов расчетов по предлагаемому аналитическому методу с экспериментальными данными и численными расчетами по программе ADINAP [17] свидетельствует о возможности

получения приемлемой точности расчетных оценок напряжений и коэффициента K . Бесспорно, что аналитические методы не могут использоваться во всех случаях. Это касается и предлагаемого метода, применение которого при $\lambda > 6$ приводит к неточной оценке напряжений. Однако использование аналитических методов позволяет оценить границы влияния краевых эффектов и, следовательно, существенно упростить численные процедуры. Весьма показательными при этом являются параметр γ_2 (см. рис. П1) и функция A_2 , определяющая K (35). На рис. 4 для гiba с жесткой заделкой на обоих концах представлен график нормированной функции A_2 в центральном сечении гiba в зависимости от параметра η , определяемого как

$$\eta = \frac{L}{L_0}, \quad (37)$$

где $L = \theta B_0$ – длина срединной линии гiba; $L_0 = 1/\gamma_2$ – условная длина волны для гармоники $i=2$; параметр η обозначает количество волн по длине гiba. При $\eta > 8$ значение A_2 определяется локальным решением для гiba трубы (рис. 4).

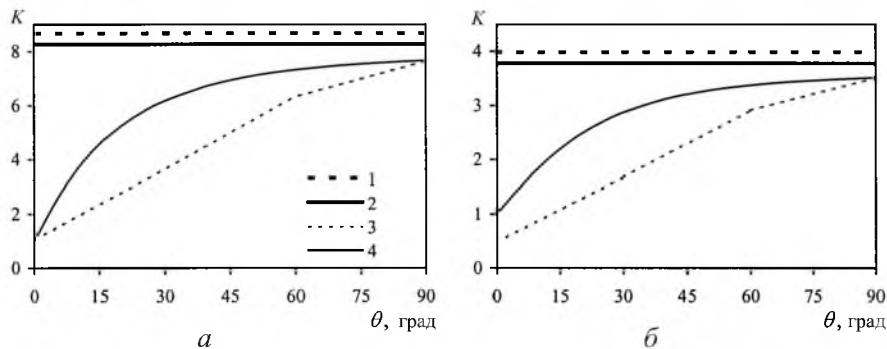


Рис. 3. График коэффициента увеличения податливости для гiba при $\lambda = 5$, $\alpha = 0,125$: a – при отсутствии давления; b – при действии внутреннего давления $P_n = 1$. (Локальное решение: 1 – по ПНАЭ, 2 – настоящие результаты; краевой эффект: 3 – по ПНАЭ, 4 – настоящие результаты.)

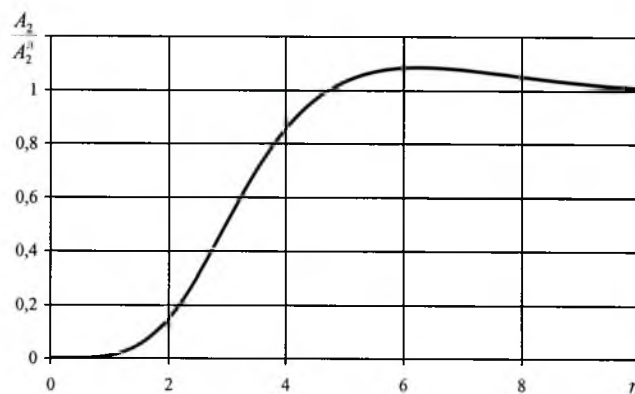


Рис. 4. Функция A_2 в центральном сечении гiba с жесткой заделкой на обоих концах.

Аналогичный обобщенный график функции A_2 невозможно получить длягиба трубы, сопряженного на концах с прямыми трубами, поскольку в уравнения (П21) для осевого и касательного усилий длягиба функции A_2'' и A_2''' входят с коэффициентами, пропорциональными λ . Более того, на функцию A_2 влияет параметр ω , представляющий собой отношение параметра γ_2 в гيبة (П11) к параметру β_2 в прямой трубе (23):

$$\omega = \frac{\gamma_2}{\beta_2}. \quad (38)$$

В качестве примера на рис. 5 приведены графики функции A_2 для некоторых значений λ и ω . Видно, что функция A_2 более податливогогиба быстрее выходит на свое локальное значение. Кроме того, увеличение (уменьшение) λ в меньшей степени влияет на A_2 . Больше влияние на быстрое приближение к локальному решению оказывает параметр ω .

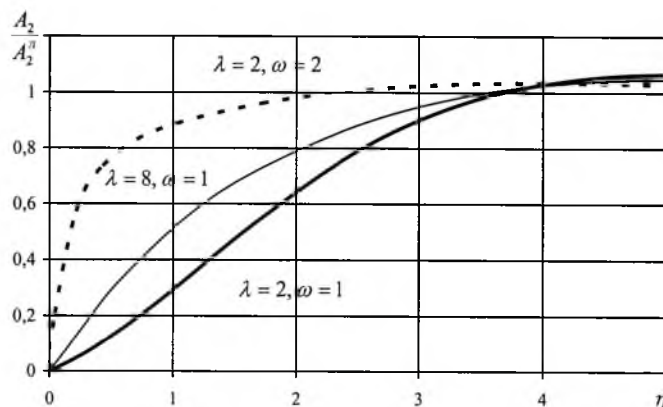


Рис. 5. Функция A_2 в центральном сечениигиба, сопряженного на концах с прямыми трубами.

Приложение 1.

Решение системы уравнений (30). Рассмотрим неоднородную систему с постоянными коэффициентами (30), состоящую из $n - 1$ уравнений ($i = 2, \dots, n$). Общее решение такой системы записывается как сумма частного и общего решений однородной системы уравнений. Частное решение тривиально и представляет собой локальное решение длягиба трубы при $\alpha = 0$, рассмотренное в [1]. Например, для $n = 5$ оно имеет такой вид:

$$A_2^л = -\frac{72Aa_{1,4}}{a_{1,2}a_{1,4} - a_{3,2}a_{2,4}}; \quad A_4^л = -\frac{a_{2,4}}{a_{1,4}}A_2^л. \quad (\text{П1})$$

Получим общее решение однородной системы уравнений. В целом система (30) сводится к уравнению $4(n - 1)$ порядка и определяет $4(n - 1)$ характеристические функции и $4(n - 1)$ неизвестных коэффициента. Предлагается следующий приближенный метод решения. Полагаем, что каждое

из уравнений, как и для прямой трубы, определяет для компоненты A_i четыре характеристические функции вида $e^{\bar{\gamma}_i x}$ с показателями степени $\bar{\gamma}_i$ и вводит четыре неизвестных коэффициента \bar{C}_i . Такие решения будем называть $A_{i,i}$ и записывать в виде

$$A_{i,i} = \bar{C}_i e^{\bar{\gamma}_i x}. \quad (\text{П2})$$

Тогда для каждого фиксированного номера уравнения i считаем, что $A_{i,i}$ уже известно. Поэтому остальные уравнения можем рассматривать как неоднородные уравнения с правой частью, зависящей от известного $A_{i,i}$. Используя априорное условие для неизвестных заранее параметров $\bar{\gamma}_i$:

$$\gamma_2^4 \ll \gamma_3^4 \ll \gamma_i^4 \ll \dots \ll \gamma_n^4, \quad (\text{П3})$$

которое является аналогом (26), можно показать, что в уравнении с номером j , где $j \neq i$, можно пренебречь либо $a_{1,j}A_j$, либо $a_j A_j^{\text{IV}}$ в зависимости от $j < i$ или $j > i$ соответственно. Тогда дополнительные компоненты A_j (обозначим их как $A_{i,j}$) выражаются как линейные комбинации от $A_{i,i}$. Выражая $A_{i,j}$ через $A_{i,i}$ и подставляя в уравнение с номером i , получаем относительно $A_{i,i}$ дифференциальное уравнение четвертой степени, содержащее только $A_{i,i}$ и $A_{i,i}^{\text{IV}}$ и определяющее частоты $\bar{\gamma}_i$ и неизвестные коэффициенты. Решение такого уравнения записывается через функции Крылова, что позволяет определить также дополнительные компоненты $A_{i,j}$ как линейные комбинации от $A_{i,i}$. Используя условие (П3), можно показать, что дополнительными компонентами можно пренебречь, если $j > i$. Таким образом, общее решение для функций A_i записывается в виде (32) и, например, для $n = 5$ оно имеет следующий вид:

$$A_2 = A_{2,2}; \quad (\text{П4a})$$

$$A_3 = A_{3,2} + A_{3,3}; \quad (\text{П4б})$$

$$A_4 = A_{4,2} + A_{4,3} + A_{4,4}; \quad (\text{П4в})$$

$$A_5 = A_{5,2} + A_{5,3} + A_{5,4} + A_{5,5}, \quad (\text{П4г})$$

где для $A_{i,j}$ первый нижний индекс обозначает принадлежность к искомой функции A_i , второй индекс указывает на то, что данная функция пропорциональна характеристической функции $e^{\gamma_j x}$.

Описанные выше выкладки проиллюстрируем на примере $i = 2$ для системы уравнений при $n = 5$, которая согласно (30) имеет следующий вид:

$$a_{1,2}A_2 + a_{3,2}A_4 + a_{6,2}A_3'' + a_2 A_2^{\text{IV}} = -72A; \quad (\text{П5a})$$

$$a_{1,3}A_3 + a_{3,3}A_5 + a_{5,3}A_2'' + a_{6,3}A_4'' + a_3A_3^{IV} = 0; \quad (\text{П5б})$$

$$a_{1,4}A_4 + a_{2,4}A_2 + a_{5,4}A_3'' + a_{6,4}A_5'' + a_4A_4^{IV} = 0, \quad (\text{П5в})$$

$$a_{1,5}A_5 + a_{2,5}A_3 + a_{5,5}A_4'' + a_5A_5^{IV} = 0. \quad (\text{П5г})$$

Итак, пусть уравнение (П5а) однозначно определяет функцию $A_{2,2}$, которую в общем виде можно представить как

$$A_{2,2} = \bar{C}_2 e^{\gamma_2 x}. \quad (\text{П6})$$

Поскольку согласно (П3) выполняется условие $\gamma_2^4 \ll \gamma_3^4$, в уравнении (П5б) можно пренебречь членом с четвертой производной $A_{3,2}^{IV}$, и функция $A_{2,2}''$ уравнивается функциями $A_{3,2}$, $A_{4,2}''$ и $A_{5,2}$. Аналогично обосновывается возможность пренебрежения членом с четвертой производной в уравнениях (П5в) и (П5г). Тогда из (П5г) имеем выражение для $A_{5,2}$:

$$A_{5,2} = -\frac{a_{2,5}}{a_{1,5}}A_{3,2} - \frac{a_{5,5}}{a_{1,5}}A_{4,2}''. \quad (\text{П7})$$

Подставив (П7) в (П5в), получим выражение для $A_{4,2}$:

$$A_{4,2} = -\frac{a_{2,4}}{a_{1,4}}A_{2,2} + \left(\frac{a_{6,4}a_{2,5}}{a_{1,4}a_{1,5}} - \frac{a_{5,4}}{a_{1,4}} \right) A_{3,2}''. \quad (\text{П8})$$

Выражения (П7) и (П8) подставим в уравнение (П5б) и запишем выражение для $A_{3,2}$:

$$A_{3,2} = \frac{\left[a_{5,3} + \frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} \left(a_{3,3} \frac{a_{5,5}}{a_{1,5}} - a_{6,3} \right) \right]}{\left(a_{3,3} \frac{a_{2,5}}{a_{1,5}} - a_{1,3} \right)} A_{2,2}''. \quad (\text{П9})$$

С учетом (П8) и (П9) из уравнения (П5а) получим первое независимое дифференциальное уравнение четвертой степени для нахождения функции $A_{2,2}$:

$$A_{2,2} \underbrace{\left(a_{1,2} - \frac{a_{3,2}a_{2,4}}{a_{1,4}} \right)}_{b_{1,2}} +$$

$$+ A_{2,2}^{IV} \underbrace{\left\{ a_2 + \left[a_{6,2} - a_{3,2} \left(\frac{a_{5,4}}{a_{1,4}} - \frac{a_{6,4} a_{2,5}}{a_{1,4} a_{1,5}} \right) \right] \frac{a_{5,3} + \frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} \left(\frac{a_{3,3} a_{5,5}}{a_{1,5}} - a_{6,3} \right)}{\frac{a_{3,3} a_{2,5}}{a_{1,5}} - a_{1,3}} \right\}}_{b_{2,2}} = 0. \quad (\text{П10})$$

Решение уравнения (П10) записывается аналогично решению A_2 для прямой трубы и может быть представлено через функции Крылова (см. (33a)). При этом собственное число γ_2 определяется из (П10) как

$$\gamma_2 = \sqrt[4]{\frac{b_{1,2}}{4b_{2,2}}}. \quad (\text{П11})$$

Зная выражение для главной функции $A_{2,2}$ и учитывая (П7)–(П9), получаем зависимости для дополнительных функций $A_{3,2}$, $A_{4,2}$, $A_{5,2}$ (см. (33б)). Поправочные коэффициенты при этом имеют вид

$$k_{3,2} = \frac{a_{5,3} + \frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} \left(\frac{a_{3,3} a_{5,5}}{a_{1,5}} - a_{6,3} \right)}{\frac{a_{3,3} a_{2,5}}{a_{1,5}} - a_{1,3}}; \quad (\text{П12a})$$

$$k_{4,2} = -\frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} + 4\gamma_2^4 k_{3,2} \left(\frac{a_{5,4}}{a_{1,4}} - \frac{a_{6,4} a_{2,5}}{a_{1,4} a_{1,5}} \right); \quad (\text{П12б})$$

$$k_{5,2} = -\frac{a_{2,5}}{a_{1,5}} k_{3,2} - \frac{a_{5,5}}{a_{1,5}} k_{4,2}. \quad (\text{П12в})$$

Используя аналогичные рассуждения, основанные на условии (П3), записываем следующие уравнения для определения функций $A_{3,3}$, $A_{4,4}$, $A_{5,5}$:

$$A_{3,3} \underbrace{\left\{ a_{1,3} - \frac{a_{3,3} a_{2,5}}{a_{1,5}} + \left[a_{5,3} - \frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} \left(a_{6,3} - \frac{a_{3,3} a_{5,5}}{a_{1,5}} \right) \right] \left[\frac{a_{3,2}}{a_2} \left(\frac{a_{5,4}}{a_{1,4}} - \frac{a_{6,4} a_{2,5}}{a_{1,4} a_{1,5}} \right) - \frac{a_{6,2}}{a_2} \right] \right\}}_{b_{1,3}} +$$

$$+ A_{3,3}^{IV} \underbrace{\left\{ a_3 - \left(\frac{a_{5,4}}{a_{1,4}} - \frac{a_{6,4} a_{2,5}}{a_{1,4} a_{1,5}} \right) \left(a_{6,3} - \frac{a_{3,3} a_{5,5}}{a_{1,5}} \right) \right\}}_{b_{2,3}} = 0; \quad (\text{П13})$$

$$A_{4,4} \left[\underbrace{a_{1,4} - \left(a_{5,4} - \frac{a_{6,4}a_{2,5}}{a_{1,5}} \right)}_{b_{1,4}} \left(\frac{a_{6,3}}{a_3} - \frac{a_{3,3}a_{5,5}}{a_{1,5}a_3} \right) \right] + A_{4,4}^{\text{IV}} \left\{ \underbrace{a_4 - \frac{a_{6,4}a_{5,5}}{a_{1,5}}}_{b_{2,4}} \right\} = 0; \quad (\text{П14})$$

$$A_{5,5} \left(\underbrace{a_{1,5} - \frac{a_{5,5}a_{6,4}}{a_4}}_{b_{1,5}} \right) + \frac{a_5}{b_{2,5}} A_{5,5}^{\text{IV}} = 0. \quad (\text{П15})$$

Решения уравнений (П13)–(П15) также представляются через функции Крылова (см. (33а)), а выражение для собственного числа γ_i в общем виде записывается следующим образом:

$$\gamma_i = 4 \sqrt{\frac{b_{1,i}}{4b_{2,i}}}. \quad (\text{П16})$$

Получив выражения для $A_{3,3}$, $A_{4,4}$, $A_{5,5}$, согласно (33б) можно определить дополнительные функции $A_{4,3}$, $A_{5,3}$ и $A_{5,4}$. Выражения для поправочных коэффициентов таковы:

$$k_{2,3} = \frac{a_{6,2} - a_{3,2} \left(\frac{a_{5,4}}{a_{1,4}} - \frac{a_{6,4}a_{2,5}}{a_{1,4}a_{1,5}} \right)}{4a_2\gamma_3^4}; \quad (\text{П17а})$$

$$k_{4,3} = -\frac{a_{2,4}}{a_{1,4}} k_{2,3} - \left(\frac{a_{5,4}}{a_{1,4}} - \frac{a_{6,4}a_{2,5}}{a_{1,4}a_{1,5}} \right); \quad (\text{П17б})$$

$$k_{5,3} = -\frac{a_{2,5}}{a_{1,5}} + 4\gamma_3^4 k_{4,3} \frac{a_{5,5}}{a_{1,5}}; \quad (\text{П17в})$$

$$k_{3,4} = \frac{1}{4a_3\gamma_4^4} \left(a_{6,3} - \frac{a_{3,3}a_{5,5}}{a_{1,5}} \right); \quad (\text{П17г})$$

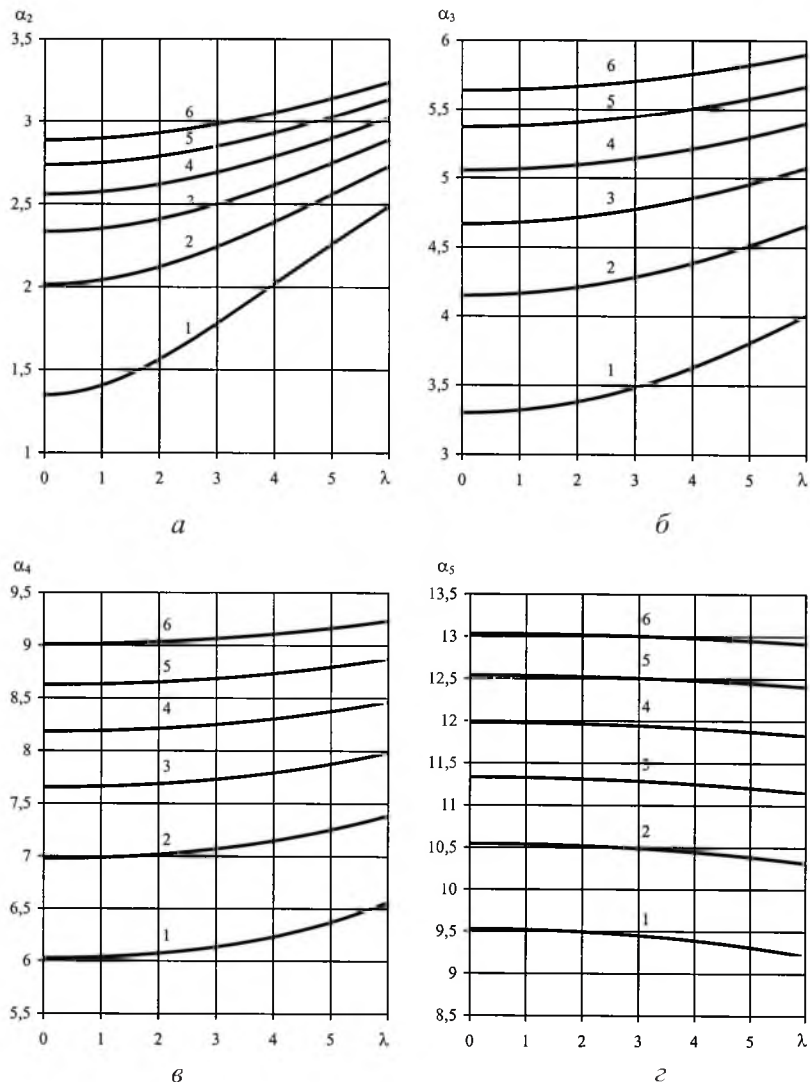
$$k_{5,4} = -\frac{a_{2,5}}{a_{1,5}} k_{3,4} - \frac{a_{5,5}}{a_{1,5}}. \quad (\text{П17д})$$

Таким образом, введены общие зависимости для функций A_i с 16 неизвестными постоянными коэффициентами $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$, $C_{4,i}$.

Для качественной оценки границ влияния краевых эффектов при разных гармониках i необходимо знать значение собственного числа γ_i , рассчитываемого по формуле (П16). Процедура расчета γ_i достаточно трудоемкая. Поэтому для наглядной оценки границ влияния краевых эффектов ниже будут представлены номограммы собственного числа γ_i в зависимости от λ и параметра давления P_n . Определяемое по формуле (П16) собственное число γ_i может быть приближенно записано в следующем виде:

$$\gamma_i = 4 \sqrt[4]{\frac{b_{1,i}}{4b_{2,i}}} \approx \frac{\alpha_i}{R} \sqrt{t}, \quad (\text{П18})$$

где α_i – безразмерный параметр, зависящий только от λ и P_n .



Номограммы безразмерного параметра α_i для второй (а), третьей (б), четвертой (в) и пятой (г) гармоник: 1 – $P_n = 0$; 2 – $P_n = 1$; 3 – $P_n = 2$; 4 – $P_n = 3$; 5 – $P_n = 4$; 6 – $P_n = 5$.

На рисунке приведены номограммы безразмерного параметра α_i для гармоник $i=2, \dots, 5$. Для второй–четвертой гармоник наблюдается увеличение приведенной частоты с ростом λ . Для пятой гармоники с ростом λ отмечается уменьшение приведенной частоты, поскольку она определяется приближенно. Между тем заметим, что вклад в общее решение от функций A_i с увеличением номера гармоники i существенно уменьшается. Поэтому такая погрешность при определении последнего параметра α_n не оказывает значимого влияния на общее решение.

Приложение 2.

Связь между параметрами v , u , N_x и L в начале и в конце подучастка. В качестве основных параметров, определяющих напряженно-деформированное состояние, используются тангенциальное v и продольное u перемещения, а также осевое N_x и касательное L усилия. Получим уравнения связи между этими параметрами в начале и в конце рассматриваемого подучастка. В начале подучастка выражения для v , u , N_x и L представляются в виде

$$v^0 = v_2^0 \sin 2\varphi + v_3^0 \cos 3\varphi + v_4^0 \sin 4\varphi + \dots; \quad (\text{П19а})$$

$$u^0 = u_2^0 \cos 2\varphi + u_3^0 \sin 3\varphi + u_4^0 \cos 4\varphi + \dots; \quad (\text{П19б})$$

$$N_x^0 = k_z \bar{\sigma} t \sin \varphi + N_{x2}^0 \cos 2\varphi + N_{x3}^0 \sin 3\varphi + N_{x4}^0 \cos 4\varphi + \dots; \quad (\text{П19в})$$

$$L^0 = L_2^0 \sin 2\varphi + L_3^0 \cos 3\varphi + L_4^0 \sin 4\varphi + \dots, \quad (\text{П19г})$$

где индекс 0 указывает на принадлежность началу подучастка. Аналогично записываются эти параметры и для конца подучастка. Воспользовавшись формулами (9б), (14) и представлением для функций A_i (32), выражения для перемещений удобно записать так:

$$v_i = \Omega R (A_{i,i} + \tilde{A}_i); \quad (\text{П20а})$$

$$u_i = (-1)^i \Omega R^2 \frac{(A'_{i,i} + \tilde{A}'_i)}{i}. \quad (\text{П20б})$$

Таким образом, параметры v_i и u_i представляются в виде суммы функции $A_{i,i}$ (или $A'_{i,i}$) и дополнительной функции \tilde{A}_i (или \tilde{A}'_i). Функция \tilde{A}_i определяется через главные функции нижних гармоник, т.е. $A_{i-1,i-1}$, $A_{i-2,i-2}$, ..., $A_{2,2}$, по выражению (32б) и на i -м этапе решения считается известной. Главная функция $A_{i,i}$ согласно (33а) включает четыре неизвестных постоянных коэффициента $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$, $C_{4,i}$.

Выражения для осевого и касательного усилий также можно записать в виде, аналогичном (П20). Подставляя представление для функций A_i (32) в (12б) и (13б), имеем

$$N_{xi} = (-1)^i Et\Omega R^2 [A''_{i,i} b_i + \bar{A}_i]; \quad (\text{П21а})$$

$$L_i = -\frac{Et\Omega R^3}{i} [A'''_{i,i} b_i + \bar{A}'_i], \quad (\text{П21б})$$

где

$$\bar{A}_i = \frac{1}{i} \tilde{A}''_{i,i} + (-1)^i \left(\frac{i}{2} - 1\right) \frac{A_{i-1}}{RB_0} + (-1)^i \left(\frac{i}{2} + 1\right) \frac{\tilde{A}_{i+1}}{RB_0}; \quad \tilde{A}_{i+1} = \sum_{j=2}^{i-1} A_{i+1,j}; \quad (\text{П22а})$$

b_i – множитель, определяемый по формуле

$$b_i = \frac{1}{i} + (-1)^i \left(\frac{i}{2} + 1\right) \frac{k_{i+1,i}}{RB_0}. \quad (\text{П22б})$$

Согласно формулам (12б) и (13б) выражения для осевого и касательного усилий при i -й гармонике включают дополнительные члены от $i+1$ гармоники, которые выражаются через главные функции нижних гармоник, в том числе и функцию $A_{i,i}$, по (33б). Второй член в множителе b_i учитывает функцию $A_{i,i}$ при гармонике $i+1$. Величины \bar{A}_i и \tilde{A}_{i+1} полностью зависят от главных функций нижних гармоник и на i -м этапе решения считаются известными.

Таким образом, в выражениях для перемещений (П20) и усилий (П21) на i -м этапе решения неизвестными являются только четыре постоянных коэффициента: $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$, $C_{4,i}$, связанных с величинами $A_{i,i}$, $A'_{i,i}$, $A''_{i,i}$, $A'''_{i,i}$.

Приравняв выражения для v , u , N_x и L при $x=0$ для i -й гармоники к начальным параметрам (П19), получим систему линейных уравнений для определения $C_{1,i}$, $C_{2,i}$, $C_{3,i}$, $C_{4,i}$. С учетом этих коэффициентов общий вид выражений (П20) и (П21) для v_i , u_i , N_{xi} и L_i в гире трубы записывается следующим образом:

$$v_i = v_i^0 Y_{1,i} + \Omega R \left[\left(\frac{(-1)^i i}{\Omega R^2} u_i^0 - \tilde{A}'_i(0) \right) \frac{Y_{2,i}}{\gamma_i} + \left(\frac{(-1)^i}{Et\Omega R^2 b_i} N_{xi}^0 - \frac{\bar{A}_i(0)}{b_i} \right) \frac{Y_{3,i}}{\gamma_i^2} - \left(\frac{i}{Et\Omega R^3 b_i} L_i^0 + \frac{\bar{A}'_i(0)}{b_i} \right) \frac{Y_{4,i}}{\gamma_i^3} - (\tilde{A}_i(0) Y_{1,i} - \tilde{A}_i) \right]; \quad (\text{П23а})$$

$$u_i = u_i^0 Y_{1,i} + (-1)^i \frac{\Omega R^2}{i} \left[\left(\frac{(-1)^i}{Et\Omega R^2 b_i} N_{xi}^0 - \frac{\bar{A}_i(0)}{b_i} \right) \frac{Y_{2,i}}{\gamma_i} - \right.$$

$$-\left(\frac{i}{Et\Omega R^3 b_i} L_i^0 + \frac{\bar{A}'_i(0)}{b_i}\right) \frac{Y_{3,i}}{\gamma_i^2} -$$

$$-4\gamma_i \left(\frac{1}{\Omega R} v_i^0 - \tilde{A}_i(0)\right) Y_{4,i} - (\tilde{A}'_i(0) Y_{1,i} - \tilde{A}'_i) \Big]; \quad (\text{П23б})$$

$$N_{xi} = N_{xi}^0 Y_{1,i} + (-1)^i Et\Omega R^2 b_i \left[-\left(\frac{i}{Et\Omega R^3 b_i} L_i^0 + \frac{\bar{A}'_i(0)}{b_i}\right) \frac{Y_{2,i}}{\gamma_i} -$$

$$-4\gamma_i^2 \left(\frac{1}{\Omega R} v_i^0 - \tilde{A}_i(0)\right) Y_{3,i} - 4\gamma_i \left(\frac{(-1)^i i}{\Omega R^2} u_i^0 - \tilde{A}'_i(0)\right) Y_{4,i} - \frac{1}{b_i} (\bar{A}_i(0) Y_{1,i} - \bar{A}_i) \Big]; \quad (\text{П23в})$$

$$L_i = L_i^0 Y_{1,i} - \frac{Et\Omega R^3 b_i}{i} \left[-4\gamma_i^3 \left(\frac{1}{\Omega R} v_i^0 - \tilde{A}_i(0)\right) Y_{2,i} -$$

$$-4\gamma_i^2 \left(\frac{(-1)^i i}{\Omega R^2} u_i^0 - \tilde{A}'_i(0)\right) Y_{3,i} -$$

$$-4\gamma_i \left(\frac{(-1)^i}{Et\Omega R^2 b_i} N_{xi}^0 - \frac{\bar{A}_i(0)}{b_i}\right) Y_{4,i} - \frac{1}{b_i} (\bar{A}'_i(0) Y_{1,i} - \bar{A}'_i) \Big]. \quad (\text{П23г})$$

Особенно просто связь между параметрами в конце и в начале участка записывается для прямой трубы, для которой ненулевыми являются только главные функции $A_{i,j}$. Положив в (П23) $B_0 = \infty$, получим выражения для v_i , u_i , N_{xi} и L_i в прямой трубе:

$$v_i = v_i^0 Y_{1,i} + (-1)^i \frac{i u_i^0}{R} \frac{Y_{2,i}}{\beta_i} + (-1)^i \frac{i N_{xi}^0}{EtR} \frac{Y_{3,i}}{\beta_i^2} - \frac{i^2 L_i^0}{EtR^2} \frac{Y_{4,i}}{\beta_i^3}; \quad (\text{П24а})$$

$$u_i = u_i^0 Y_{1,i} + \frac{N_{xi}^0}{Et} \frac{Y_{2,i}}{\beta_i} + (-1)^{i+1} \frac{i L_i^0}{EtR} \frac{Y_{3,i}}{\beta_i^2} + (-1)^{i+1} \frac{4\beta_i R v_i^0}{i} Y_{4,i}; \quad (\text{П24б})$$

$$N_{xi} = N_{xi}^0 Y_{1,i} + (-1)^{i+1} \frac{i L_i^0}{R} \frac{Y_{2,i}}{\beta_i} +$$

$$+ (-1)^{i+1} \frac{4\beta_i^2 EtR v_i^0}{i} Y_{3,i} - 4\beta_i Et u_i^0 Y_{4,i}; \quad (\text{П24в})$$

$$L_i = L_i^0 Y_{1,i} + \frac{4\beta_i^3 EtR^2}{i^2} v_i^0 Y_{2,i} +$$

$$+ (-1)^i \frac{4\beta_i^2 EtR}{i} u_i^0 Y_{3,i} + (-1)^i \frac{4\beta_i R}{i} N_{xi}^0 Y_{4,i}. \quad (\text{П24Г})$$

В выражениях (П23) и (П24) на i -м этапе решения неизвестными являются только четыре начальных параметра: v_i^0 , u_i^0 , N_{xi}^0 и L_i^0 .

Приложение 3.

Граничные условия. Рассмотрим несколько наиболее характерных практических и теоретических типов граничных условий.

1. *Жесткая заделка на конце гиба.* Данный тип закрепления ограничивает как радиальное, так и осевое перемещение гиба. При этом типе закрепления обращаются в нуль деформационные граничные условия:

$$v_i = u_i = 0. \quad (\text{П25})$$

2. *Закрепление гиба на конце тонкой пластиной.* Считается, что толщина пластины гораздо меньше толщины стенки гиба, т.е. пластина препятствует только радиальным перемещениям точек поверхности гиба. При таком закреплении имеем следующие граничные условия:

$$v_i = N_{xi} = 0. \quad (\text{П26})$$

3. *Сопряжение гиба на конце с прямой трубой.* Это наиболее общий вариант сопряжения, когда необходимо учитывать податливость и конечные перемещения обоих сопрягаемых элементов. В этом случае граничные условия записываются так:

$$(v_i)_Г = (v_i)_П; \quad (\text{П27а})$$

$$(u_i)_Г = (u_i)_П; \quad (\text{П27б})$$

$$(N_{xi})_Г = (N_{xi})_П; \quad (\text{П27в})$$

$$(L_i)_Г = (L_i)_П, \quad (\text{П27г})$$

где нижние индексы “Г” и “П” указывают на принадлежность параметра к гибу или прямой трубе соответственно.

4. *Конец гиба свободный,* т.е. данный тип закрепления не ограничивает радиальное и осевое перемещение гиба. При таком закреплении обращаются в нуль силовые граничные условия:

$$N_{xi} = L_i = 0. \quad (\text{П28})$$

Выводы

1. С использованием принятых упрощающих гипотез (9) все деформационные и силовые параметры выражаются через одну неизвестную функцию – тангенциальное перемещение v , для которого записана система взаимосвязанных дифференциальных уравнений 4-й степени. Сформулированы граничные условия и условия сопряжения, которые должны обеспечивать непрерывность решения.

2. Для прямой трубы приведено точное решение с учетом действия внутреннего давления. Предложен метод приближительного аналитического решения длягиба трубы, которое имеет елочную структуру.

3. Результаты расчетов окружных σ_φ и осевых σ_x напряжений, а также коэффициента податливости K сопоставлены с имеющимися в литературных источниках расчетными и экспериментальными результатами, что иллюстрирует приемлемую точность расчетных оценок вплоть до $\lambda \leq 6$ и $\alpha \leq 0,35$.

4. Наличие аналитического решения позволяет классифицировать гибы по степени проявления краевого эффекта на короткие, средние и длинные.

Резюме

Запропоновано новий аналітичний метод для аналізу крайового ефекту у навантаженому згинальним моментом згині труби з урахуванням дії внутрішнього тиску. Метод базується на використанні спрощених гіпотез, що дозволяє виразити усі деформаційні і силові параметри через тангенціальне переміщення, яке приймається у вигляді розкладання у ряд Фур'є по обводній координаті. Отримано систему диференціальних рівнянь четвертого степеня по осевій координаті відносно невідомих коефіцієнтів у розкладанні для переміщень. Наведено аналітичний наближений розв'язок для згину та точний розв'язок для прямої труби, що записуються через функції Крилова. Сформульовано процедуру використання методу початкових параметрів, де граничними умовами є значення тангенціального і поздовжнього переміщень, осевого і дотичного зусиль. Отримано рівняння зв'язку між цими параметрами на початку та в кінці згину труби. Отримані результати зіставляються з даними літературних джерел.

1. Орыняк И. В., Радченко С. А. Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 1. Пространственный изгиб по Сен-Венану // Пробл. прочности. – 2004. – № 3. – С. 23 – 51.
2. Орыняк И. В., Радченко С. А. Анализ деформацийгиба трубы на основе смешанного подхода. Сообщ. 2. Пространственный изгиб с учетом внутреннего давления // Там же. – № 4. – С. 46 – 59.
3. Аксельрад Э. Л., Ильин В. П. Расчет трубопроводов. – Л.: Машиностроение, 1972. – 240 с.

4. *Pardue T. E. and Vigness I.* Properties of thin-walled curved tubes of short-bend radius // *Trans. ASME.* – 1951. – **73**, No. 1. – P. 77 – 87.
5. *Markl A. R.* Piping-flexibility analysis // *Ibid.* – 1955. – **77**, No. 2. – P. 127 – 149.
6. *ASME B31.3.* Process Piping. American Society of Mechanical Engineers. – New York: New York, 1999.
7. *ASME B31.4.* Liquid Transportation Systems for Hydrocarbons, Liquid Petroleum Gas, Anhydrous Ammonia, and Alcohols. – New York: New York, 1989. – 91 p.
8. *СНУП 2.04.12-86.* Расчет на прочность стальных трубопроводов. Строительные нормы и правила. – М.: ЦИТИП Госстроя СССР, 1986. – 16 с.
9. *ПНАЭ Г-7-002-86.* Нормы расчета на прочность оборудования и трубопроводов атомных энергетических установок. – М.: Энергоатомиздат, 1989. – 525 с.
10. *Бидерман В. Л.* Механика тонкостенных конструкций. Статика. – М.: Машиностроение, 1977. – 488 с.
11. *Гольденвейзер А. Л.* Теория упругих тонких оболочек. – М.: Наука, 1976. – 512 с.
12. *Melo F. J. M. Q. and de Castro P. M. S. T.* The linear elastic stress analysis of curved pipes under generalized loads using a reduced integration finite ring element // *J. Strain Analysis.* – 1997. – **32**, No. 1. – P. 47 – 59.
13. *Fonseca E. M. M., de Melo F. J. M. Q., and Oliveira C. A. M.* Determination of flexibility factors in curved pipes with end restraints using a semi-analytic formulation // *Int. J. Press. Vess. Piping.* – 2002. – **79**. – P. 829 – 840.
14. *Thomson G.* In Plane Bending of Smooth Pipe Bends. PhD Thesis. – Scotland UK: University of Strathclyde, 1980.
15. *Thomson G. and Spence J.* The influence of flanged end constraints on smooth curved tubes under in-plane bending // *Int. J. Press. Vess. Piping.* – 1983. – **13**, No. 2. – P. 65 – 83.
16. *Marie S. and Nedelec M.* Elastic Stresses in Elbows Submitted to in-plane bending moment // *J. Press. Vess. Technol.* – 2003. – **125**. – P. 209 – 220.
17. *Bathe K. J. and Almeida C. A.* A simple and effective pipe elbow element – interaction effects // *J. Appl. Mech.* – 1982. – **49**. – P. 165 – 171.
18. *Zhang Y. M., Mirfakhraei P., Redekop D., and Xu B.* A computer program for the elastostatics of a toroidal shell using the differential quadrature method // *Int. J. Press. Vess. Piping.* – 1998. – **75**, No. 13. – P. 919 – 929.
19. *Jiang W. and Redekop D.* Static and vibration analysis of orthotropic toroidal shells of variable thickness by differential quadrature // *Thin-Walled Struct.* – 2003. – **41**. – P. 461 – 578.
20. *Вольмир А. С.* Устойчивость деформируемых систем. – М.: Наука, 1967. – 984 с.

21. *Орыняк И. В., Торон В. М., Ромащенко В. А., Жураховский С. В.* Расчет пространственного разветвленного трубопровода в программном комплексе оценки прочности оборудования АЭС // Пробл. прочности. – 1998. – № 2. – С. 87 – 100.
22. *Whatham J. F.* In-plane bending of flanged elbows // Proc. Metal Struct. Conf. – Australia (Perth), 1978.

Поступила 03. 07. 2003