

УДК 532.526

ПЕРЕМЕШИВАНИЕ ЖИДКОСТИ В ПОЛЕ СКОРОСТИ ДВУХ ТОЧЕЧНЫХ ВИХРЕЙ ЗА БЕСКОНЕЧНЫМ ЦИЛИНДРОМ В СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. ГУРЖИЙ

Институт гидромеханики НАН Украины, Киев, Украина

Получено 12.10.04

Рассматривается процесс перемешивания пассивной жидкости (адвекция) в потоке идеальной несжимаемой жидкости, набегающем на бесконечный круговой в поперечном сечении цилиндр в направлении, перпендикулярном его образующей. Анализируются двухмерные случаи перемешивания в присутствии и отсутствии вихревой пары точечных вихрей в области, прилегающей к цилиндру. Показано, что существует стационарный режим движения вихревой пары около цилиндра, который является в общем случае неустойчивым к малым возмущениям. Однако в случае симметричных возмущений движение вихрей является устойчивым, периодическим во времени.

Исследования показывают, что процесс перемешивания жидкости в отсутствие вихрей является регулярным и не сопровождается интенсивным растяжением границы рассматриваемой подкрашенной области с течением времени. Однако присутствие вихревой пары, которая движется периодически около точки равновесия, как перед цилиндром, так и позади него, вносит существенные изменения в процесс перемешивания. Растяжение границы подкрашенной пассивной области становится экспоненциальным во времени, что свидетельствует об интенсивном, хаотическом режиме адвекции. В работе приводится сравнение различных режимов перемешивания в присутствии вихревой пары около кругового цилиндра в набегающем невозмущенном потоке идеальной несжимаемой жидкости.

Розглядається процес перемішування пасивної рідини (адвекція) у потоці ідеальної нестисливої рідини, що набігає на нескінченний круговий у поперечному перерізі циліндр, у напрямку, перпендикулярному його утворюючій. Аналізуються двомірні випадки перемішування в присутності і відсутності вихревої пари точкових вихорів в області, що прилягає до циліндра. Показано, що існує стаціонарний режим руху вихревої пари біля циліндра, що є в загальному випадку не стійким до малих збурювань. Однак у випадку симетричних збурювань рух вихрів є стійким, періодичним у часі.

Дослідження показують, що процес перемішування рідини у відсутності вихорів є регулярним і не супроводжується інтенсивним розтягненням межі розглянутої підфарбованої області з часом. Однак присутність вихревої пари, що рухається періодично біля точки рівноваги, як перед циліндром, так і за ним, вносить істотні зміни в процес перемішування. Розтягнення межі підфарбованої пасивної області стає експоненціальним у часі, що свідчить про інтенсивний, хаотичний режим адвекції. У роботі наводиться порівняння різних режимів перемішування в присутності вихревої пари біля кругового циліндра в незбуреному потоці ідеальної нестисливої рідини, що набігає.

The mixing process of a passive fluid (advection) in oncoming flow of an ideal incompressible fluid on an infinite cylinder with circular cross section in a perpendicular direction due to own generatrix is considered. The two-dimensional stirring cases with a presence and an absence of a point vortex pair in the region located nearby the cylinder. It is shown, that there is a stationary motion regime of vortex pair near the cylinder, which is generally unstable for small perturbations. However in case of symmetric perturbation, the vortex motion is steady, and periodic in time.

The investigation shows that the mixing process of passive fluid in absence of vortices is regular and is not accompanied by an intensive stretching of border of dyed region under consideration in time. However, the presence of the vortex pair, which moves periodically around an equilibrium point both in front, and behind of the cylinder, leads to an essential changes in stretching process. The stretching of border of dyed passive region becomes an exponential in time, that testifies that an advection regime is intensive and chaotic. The comparison of various mixing modes with the presence of vortex pair nearby the circular cylinder in oncoming unperturbed flow of an ideal incompressible liquid is considered in this work.

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в современной литературе появилось много исследований, посвященных проблеме перемешивания жидкостей ламинарными течениями. Известно [1-3], что медленные периодические течения при определенных условиях могут проявлять интенсивные режимы перемешивания, получившие название *хаотическое перемешивание*. Несмотря на большой перечень критериев и методов поиска [4-6] областей интенсивного перемешивания, задача о перемешивании жидкости, в целом, представляет достаточно

сложную научную проблему, и в настоящее время не существует единого концептуального подхода к ее решению [1, 6 и ссылки в них].

Среди основополагающих механизмов, приводящих к перемешиванию выделенной области жидкости в рассматриваемом течении, следует выделить три наиболее важных: *диффузионное перемешивание*, вызванное молекулярным движением жидкости, *конвекционное перемешивание*¹, возника-

¹Обычно этот механизм связывают в конвективном перемешиванием, поскольку он связан с течением сплошной среды [2].

ющее в результате неоднородного распределения скалярных полей (температура, соленость и др.) в рассматриваемом течении, и *конвективное перемешивание*, вызванное движением самой жидкости или твердых поверхностей [2]. Несмотря на то, что указанные механизмы одновременно присутствуют в большинстве важных с практической точки зрения течений [7-9], в некоторых случаях преобладающим в отношении масштабов течений остается конвективный механизм. Если физические свойства жидкости выделенной области течения незначительно отличаются от физических свойств внешней среды, то процесс конвективного перемешивания сводится к деформации исходной выделенной области жидкости (лагранжевы пассивные жидкие частицы) под действием поля скорости течения (Эйлерово поле скорости) [3, 10].

Явление перемешивания представляет собой нелинейное явление. В некоторых случаях незначительное изменение начальных условий приводит к существенным изменениям в развитии течения и, как результат, к значительным изменениям режимов перемешивания. Такая особенность течений жидкости в современной литературе (например, [3]) получила название *лагранжева турбулентность* или *хаотическая адвекция*.

Анализ особенностей процесса адвекции в вязких течениях жидкости встречает ряд трудностей, обусловленных в первую очередь получением аналитического представления поля скорости [11-16]. В некоторых случаях анализ масштабов течения показывает, что инерционные силы преобладают над вязкостными, особенно на начальной стадии перемешивания слабовязких жидкостей. Тогда оказывается вполне приемлемой для исследований модель идеальной несжимаемой жидкости. В этом случае поле скорости течения может быть представлено аналитически и анализ основных закономерностей процесса адвекции пассивной примеси может быть проведен со значительно меньшими усилиями (например, [3, 10]).

В настоящей работе рассматривается процесс перемешивания в двухмерном течении идеальной жидкости за бесконечным цилиндром с круговым поперечным сечением в плоскости, перпендикулярной его образующей. Анализируются случаи безвихревого обтекания цилиндра и случаи обтекания в присутствии двух прямолинейных вихревых нитей, параллельных цилиндру. Такая модель течения часто используется при анализе обтекания вязкой жидкостью тел с плавной образующей в качестве первого приближения [11, 12].

Изучению движения системы точечных вихрей около круговой твердой поверхности посвящено

много работ [11, 12, 16]. Прежде всего следует выделить одно из первых подробных исследований Холандом [15], в котором приведены уравнения движения вихрей около неподвижного цилиндра, найден стационарный случай движения двух вихрей (вихревая пара) и приводится анализ устойчивости движения вихрей. Анализ движения системы точечных вихрей при более общем случае движения цилиндра (или набегающего потока) можно найти в недавних публикациях [17-19].

Известно, что при поперечном обтекании цилиндра при достаточно малых числах Рейнольдса в течении за цилиндром возникает пара устойчивых вихрей [20]. При малых числах Рейнольдса вихри могут достаточно устойчиво следовать за цилиндром. При умеренных числах Рейнольдса вихри отрываются от цилиндра, образуя так называемую решетку Кармана. Очевидно, что движение вихревой пары за цилиндром может быть как стационарным, так и периодическим по замкнутым траекториям около положения равновесия. Некоторые подробности движения вихрей около цилиндра с круговым поперечным сечением можно найти, например, в [11, 12, 15]. Однако анализ процесса перемешивания жидкости в этих публикациях не рассматривается. Изучить, насколько влияет на процесс перемешивания присутствие вихревой пары в близлежащем к цилиндру течении, представляет основную цель настоящей работы.

В первом разделе статьи приводится выражение для компонент поля скорости движения системы точечных вихрей в набегающем на круговой цилиндр потенциальном потоке. Во втором разделе получено выражение, связывающее значение интенсивности вихревой пары со скоростью набегающего потока для стационарного взаимодействия вихрей с цилиндром и проводится анализ устойчивости этого решения к различным видам возмущений. Особенности процесса перемешивания пассивной жидкости в рассматриваемом течении анализируются в третьем разделе статьи. Последний раздел посвящен обсуждению полученных результатов.

1. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

Рассмотрим двухмерное течение идеальной несжимаемой жидкости около бесконечного цилиндра в плоскости, перпендикулярной его образующей (рис. 1). Пусть система состоит из N вихрей с интенсивностями Γ_i (где $i = 1, \dots, N$), вихри расположены в точках (x_i, y_i) в системе координат,

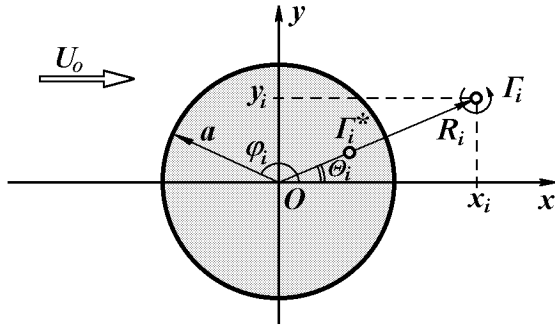


Рис. 1. Геометрия задачи

связанной с центром поперечного сечения цилиндра, радиус которого равен a . Цилиндр обтекается невозмущенным потоком жидкости со скоростью U_0 вдали от цилиндра.

Функцию тока $\Psi(x, y)$ поля скорости рассматриваемого течения задаем в виде суперпозиции функции тока Ψ_1 течения системы точечных вихрей около круговой области в покоящейся на бесконечности жидкости [21] и функции тока Ψ_2 течения при потенциальном обтекании бесконечного цилиндра [12, 15]:

$$\begin{aligned} \Psi(x, y) &= \Psi_1 + \Psi_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \ln \frac{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}{[x - (a/R_i)^2 x_i]^2 + [y - (a/R_i)^2 y_i]^2} + \\ &+ U_0 y \left(1 - \frac{a^2}{x^2 + y^2} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

где $R_i = (x_i^2 + y_i^2)^{1/2}$ – расстояние от вихря с индексом i до начала координат.

Используя связь между скалярной функцией тока $\Psi(x, y)$ и компонентами поля скорости двумерного течения жидкости $\mathbf{U} = [U(x, y), V(x, y)]$,

$$U(x, y) = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad V(x, y) = -\frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad (2)$$

находим значения проекций $U(x, y)$ и $V(x, y)$ поля скорости для текущей точки течения с координатами (x, y) :

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i (y_i - y)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i [(a/R_i)^2 y_i - y]}{[x - (a/R_i)^2 x_i]^2 + [y - (a/R_i)^2 y_i]^2} + \\ &+ U_0 \left[1 - \frac{a^2 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} \right], \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i (x - x_i)}{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2} - \\ &- \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i [x - (a/R_i)^2 x_i]}{[x - (a/R_i)^2 x_i]^2 + [y - (a/R_i)^2 y_i]^2} - \\ &- U_0 \frac{2a^2 xy}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \quad (4)$$

Первые суммы в выражениях (3) и (4) представляют собой проекции поля скорости, наведенные системой точечных вихрей, расположенных в точках (x_i, y_i) [21]. Структура вторых сумм в этих выражениях позволяет интерпретировать слагаемые, как соответствующие компоненты скорости, наведенные от системы мнимых вихрей, расположенных внутри цилиндра с координатами (x_i^*, y_i^*) . Сравнение выражений под знаками сумм позволяет заключить, что пространственное положение и интенсивности мнимых вихрей для любого момента времени связаны с соответствующими параметрами реальных вихрей рассматриваемого течения следующими выражениями:

$$x_i^* = (a/R_i)x_i, \quad y_i^* = (a/R_i)y_i, \quad \Gamma_i^* = -\Gamma_i. \quad (5)$$

Другими словами, мнимый вихрь всегда находится на прямой, соединяющей начало координат и текущий вихрь (рис. 1), причем для любого момента времени выполняется условие

$$r_i R_i = a^2, \quad (6)$$

где r_i – расстояние от начала координат до мнимого вихря с индексом i .

Третье слагаемое в выражениях (3) и (4) представляет двумерное поле скорости потенциального течения жидкости при обтекании бесконечного цилиндра в поперечном направлении [12, 15].

Переход к полярной системе координат

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \phi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \quad (7)$$

позволяет проверить граничное условие (непроницаемость твердой поверхности) на поверхности цилиндра, $r = a$. Подстановка (7) в выражения (3) и (4) приводит к тому, что радиальная U_r компонента скорости тождественно обращается в ноль:

$$U_r = 0. \quad (8)$$

Совмещая в выражениях (3) и (4) значение текущей координаты точки поля (x, y) с пространственным положением текущего вихря (x_j, y_j) , получаем систему уравнений, которая описывает динамику N точечных вихрей с координатами

(x_j, y_j) , $j = 1, \dots, N$ около круговой области радиуса a в невозмущенном течении идеальной несжимаемой жидкости [15, 18]:

$$\begin{aligned} \frac{dx_j}{dt} = & \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\Gamma_i(y_i - y_j)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i[(a/R_i)^2 y_i - y_j]}{[x_j - (a/R_i)^2 x_i]^2 + [y_j - (a/R_i)^2 y_i]^2} + \right. \\ & \left. + U_0 \left[1 - \frac{a^2(x_j^2 - y_j^2)}{(x_j^2 + y_j^2)^2} \right] \right], \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} = & \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \left[\frac{\Gamma_i(x_j - x_i)}{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2} - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^N \frac{\Gamma_i[x_j - (a/R_i)^2 x_i]}{[x_j - (a/R_i)^2 x_i]^2 + [y_j - (a/R_i)^2 y_i]^2} - \right. \\ & \left. - U_0 \frac{2a^2 x_j y_j}{(x_j^2 + y_j^2)^2} \right]. \end{aligned} \quad (10)$$

В приведенных выражениях штрих у знака суммы означает опускание при суммировании сингулярного слагаемого при $i = j$ [11, 21]. Уравнения (9) и (10) совместно с граничными условиями

$$x_i(0) = x_i^0, \quad y_i(0) = y_i^0 \quad (11)$$

для заданной скорости набегающего потока жидкости U_0 на бесконечности полностью определяют траектории движения точечных вихрей.

2. СТАЦИОНАРНОЕ ДВИЖЕНИЕ ДВУХ ВИХРЕЙ

Рассмотрим случай взаимодействия вихревой пары с круговой областью в набегающем потоке и проведем анализ устойчивости такого движения на малые возмущения. Одним из первых эту задачу рассмотрел Холанд [15], однако в этой работе замечены некоторые опечатки. В этом разделе кратко приводятся основные этапы исследования для установления соответствия с принятыми в данной работе обозначениями.

Пусть два вихря имеют одинаковые по модулю интенсивности $\Gamma_1 = -\Gamma_2$ и расположены симметрично относительно оси симметрии течения Ox в точках с координатами $x_1^0 = x_2^0$ и $y_1^0 = -y_2^0$. В дальнейшем верхний индекс у переменных опускаем.

В принятых обозначениях компоненты скорости первого вихря принимают вид

$$\dot{x}_1 = \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left\{ \frac{y_1}{r_1^2 - a^2} + \frac{1}{2y_1} - \right. \quad (12)$$

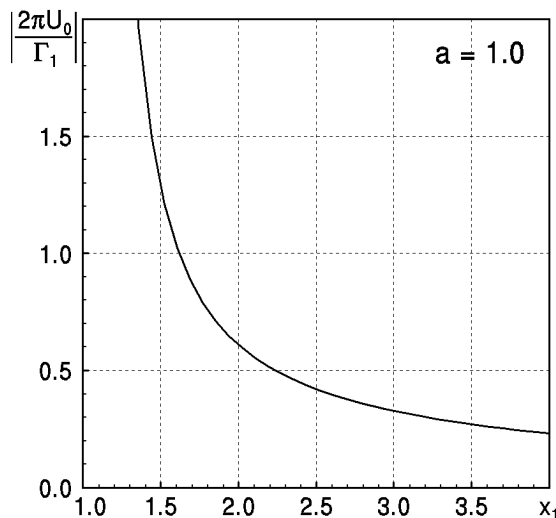


Рис. 2. Зависимость отношения $|2\pi U_0/\Gamma_1|$ от координаты x_1 стационарного движения вихревой пары

$$\begin{aligned} & - \frac{y_1(r_1^2 + a^2)}{(r_1^2 - a^2)^2 + 4y_1^2 a^2} \left\} + U_0 \left\{ 1 - \frac{a^2(x_1^2 - y_1^2)}{r_1^4} \right\}, \\ \dot{y}_1 = & \frac{\Gamma_1}{2\pi} \left\{ \frac{x_1}{a^2 - r_1^2} + \frac{x_1(r_1^2 - a^2)}{(r_1^2 - a^2)^2 + 4y_1^2 a^2} \right\} - \\ & - U_0 \frac{2a^2 x_1 y_1}{r_1^4}. \end{aligned} \quad (13)$$

Здесь $r_1^2 = x_1^2 + y_1^2$ – расстояние от вихря до начала координат, а точка над переменной обозначает дифференцирование по времени. В силу симметрии пространственной конфигурации вихрей компоненты скорости второго вихря имеют аналогичную структуру.

Исследования [15] показывают, что симметрично расположенные два одинаковых (по модулю) точечных вихря могут находиться в стационарном состоянии в течении за круглым цилиндром. Условие стационарности (одновременное равенство нулю выражений (12) и (13)) удовлетворяется при выполнении двух условий:

$$\begin{cases} 4r_1^2 y_1^2 = (r_1^2 - a^2)^2, \\ \frac{2\pi U_0}{\Gamma_1} = -\frac{r_1^5}{(r_1^2 + a^2)(r_1^2 - a^2)^2}. \end{cases} \quad (14)$$

Другими словами, стационарное состояние существует при произвольных значениях скорости набегающего потока жидкости U_0 и интенсивности вихря Γ_1 . Более того, в силу симметрии выражения (14) относительно переменной x_1 , видно, что стационарное движение вихревой пары существует при расположении вихрей как за цилиндром, так и перед ним. Отношение U_0/Γ_1 опреде-

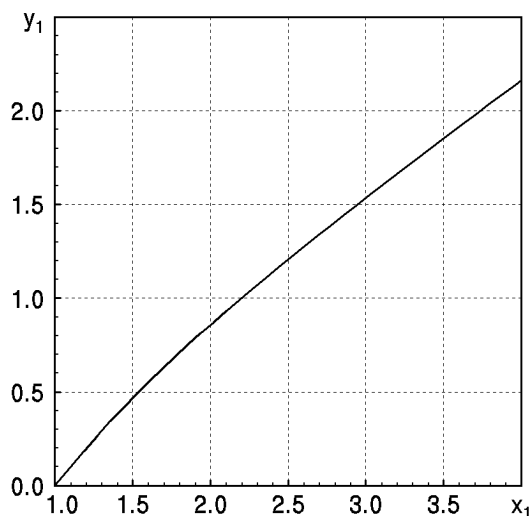


Рис. 3. Координаты первого вихря в вихревой паре при стационарном движении за круговой областью

ляет расстояние r_1 , при котором достигается стационарное движение. На рис. 2 представлена зависимость координаты x_1 вихревой пары от отношения (по модулю) скорости потока и интенсивности точечного вихря, $|2\pi U_0/\Gamma_1|$. С увеличением скорости набегающего потока при фиксированном Γ_1 продольная координата x_1 стационарного состояния системы вихрей увеличивается. В то же время, с увеличением интенсивности вихрей при неизменной скорости набегающего потока U_0 стационарное движение наблюдается на меньших расстояниях от вихревой пары до круговой области. С увеличением расстояния r_1 в стационарном положении вихрей увеличивается расстояние между вихрями в вихревой паре. Рис. 3 показывает связь между координатами первого вихря при стационарном движении вихревой пары в течении за круговой областью, которые не зависят от значений интенсивности вихрей (первое уравнение в (14)).

Если в каждый из вихрей в стационарном положении ввести малое пространственное возмущение (ξ_1, η_1) для первого вихря и (ξ_2, η_2) для второго вихря соответственно, то уравнения, описывающие развитие этих возмущений во времени, можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{2U_0}{r_1^9} \cdot \frac{d\xi_1}{dt} &= A\xi_1 + B\eta_1 + C\xi_2 - D\eta_2, \\ \frac{2U_0}{r_1^9} \cdot \frac{d\eta_1}{dt} &= E\xi_1 + F\eta_1 + G\xi_2 + H\eta_2, \\ \frac{2U_0}{r_1^9} \cdot \frac{d\xi_2}{dt} &= C\xi_1 + D\eta_1 + A\xi_2 - B\eta_2, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{2U_0}{r_1^9} \cdot \frac{d\eta_2}{dt} = -G\xi_1 + H\eta_1 - E\xi_2 + F\eta_2,$$

где

$$\begin{aligned} A &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_1} = 2Rx_1a^4(3r_1^2 - 2a^2), \\ B &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_1} = 2r_1^8 + 4r_1^6a^2 + r_1^4a^4 - 5r_1^2a^6 + 2a^8, \\ C &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial x_2} = -2r_1^5x_1a^2, \\ D &= \frac{\partial \dot{x}_1}{\partial y_2} = -r_1^4(2r_1^4 + r_1^2a^2 + a^4), \\ E &= \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_1} = 2r_1^8 - 3r_1^4a^4 - 5r_1^2a^6 + 2a^8, \\ G &= \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_1} = -r_1^2(3r_1^2a^4 - 2a^6), \\ F &= \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial x_2} = -A, \quad H = \frac{\partial \dot{y}_1}{\partial y_2} = C. \end{aligned} \quad (16)$$

Анализ устойчивости стационарного движения вихревой пары сводится к определению корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} A - \lambda & B & C & -D \\ E & F - \lambda & G & H \\ C & D & A - \lambda & -B \\ -G & H & -E & F - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (17)$$

которое после раскрытия определителя с учетом последних равенств (16) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda^4 - 2[A^2 + C^2 + DG + BE]\lambda^2 + \\ + [(A + C)^2 + (B + D)(E + G)] \times \\ \times [(A - C)^2 + (B - D)(E - G)] = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Анализ выражения (18) показывает, что при произвольном значении скорости набегающего потока в диапазоне $r_1 > a$ существуют два действительных корня (положительный и отрицательный) и два комплексно-сопряженных корня. При приближении вихрей к поверхности твердого тела абсолютные значения корней характеристического уравнения увеличиваются. Другими словами, по мере приближения вихрей к поверхности цилиндра стационарная конфигурация вихревой пары становится более неустойчивой.

Последнее утверждение имеет простую физическую интерпретацию. Известно [12], что при потенциальном обтекании круговой области точка с координатами $(a, 0)$, равно как $(-a, 0)$, является гиперболической точкой течения. По мере приближения вихревой пары в стационарном состоянии к твердой поверхности интенсивности вихрей (по модулю) уменьшаются. В результате влияние

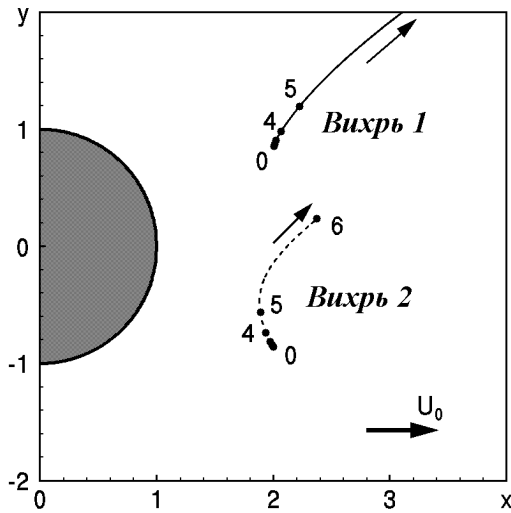


Рис. 4. Траектории движения вихрей после внесения малого возмущения в координату x первого вихря

гиперболической точки течения на вихревую пару увеличивается, а устойчивость вихрей на малые возмущения уменьшается.

Наличие пары действительных корней свидетельствует о том, что стационарное движение вихревой пары в течении за цилиндром является неустойчивым. Внесение в пространственное положение малых возмущений приводит к их развитию во времени. Наличие комплексно-сопряженных корней свидетельствует, что траектории вихрей развиваются во времени по спирали. На рис. 4 показаны траектории движения двух точечных вихрей при $U_0 = 0.5$ для стационарных начальных условий: $x_1 = x_2 = 2.0$, $y_1 = -y_2 = 0.859$. Этим начальным условиям соответствуют значения $r_1 = r_2 = 2.177$, $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = -5.154$. Затем в координату y_1 первого вихря было введено возмущение $\eta_1 = 10^{-4}$. В результате симметрия в течении нарушается и вихревая пара с течением времени распадается. Стрелками на рисунке показано направление движения вихрей, кружочками обозначены положения вихрей через эквидистантные промежутки времени, $\Delta t = 5.0$. Кружочки для каждого из вихрей пронумерованы: цифрой ноль обозначено начальное положение.

Рассмотрим устойчивость вихревой пары на симметричные возмущения, $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ и $\eta_1 = -\eta_2 = \eta$. В этом случае уравнения, описывающие развитие возмущений во времени, принимают следующий вид:

$$\frac{2U_0}{r_1^9} \cdot \frac{d\xi}{dt} = L\xi + M\eta,$$

$$\frac{2U_0}{r_1^9} \cdot \frac{d\eta}{dt} = N\xi + P\eta, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} L &= 2Rx_1a^2(3r_1^2a^2 - 2a^4 - r_1^4), \\ M &= 3r_1^6a^2 - 5r_1^2a^6 + 2a^8, \\ N &= -5r_1^2a^6 - 2r_1^4a^4 - 3r_1^6a^2 + 2a^8, \\ P &= -L. \end{aligned} \quad (20)$$

Анализ устойчивости стационарного движения вихревой пары сводится к определению корней характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} L - \lambda & M \\ N & -L - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (21)$$

которое после подстановки (20) принимает вид

$$\begin{aligned} \lambda^2 &= 2r_1^4a^4(-3r_1^8 - 11r_1^6a^2 + \\ &+ 13r_1^4a^4 + 3r_1^2a^6 - 2a^8), \end{aligned} \quad (22)$$

и в диапазоне $r_1 > a$ имеет всегда пару комплексно-сопряженных корней, $\lambda^2 < 0$. Это значит, что введение в начальное положение пары симметричных возмущений не приводит к разрушению пространственного положения вихревой пары. Вихри движутся около положения равновесия, движение является устойчивым на симметричные возмущения.

3. АДВЕКЦИЯ ПАССИВНОЙ ЖИДКОСТИ

Сначала рассмотрим особенности процесса перемешивания, вызванного обтеканием цилиндра потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости при отсутствии вихрей.

Одним из основных методов изучения процессов перемешивания является анализ деформации выделенного объема пассивной жидкости, ограниченную замкнутой линией. С течением времени каждый жидкий элемент (маркер) на границе движется по собственной траектории. Последовательное соединение маркеров времени позволяет сформировать положение границы контура к следующему заданному моменту времени. Если в начальный момент положение двух близлежащих маркеров на контуре задается близким, то с течением времени эти маркеры могут удалиться на достаточно большие расстояния. Это значит, что в процессе перемешивания эта часть жидкого контура подвергнута значительному растяжению. Последовательное соединение маркеров при формировании границы в большинстве случаев ока-

зывается затруднительным. Часто, для предварительного анализа процесса адвекции пассивного контура, используется построение двумерных карт $p_1(x, y)$ локального растяжения [23] для фиксированного момента времени t :

$$l(\tau) = \frac{L(t + \tau)}{L(t)} = C_0 \exp(p_1 \tau), \quad (23)$$

где C_0 – некоторая константа.

Анализ пространственного распределения функции $p_1(x, y)$ позволяет провести качественную оценку интенсивности перемешивания жидкости в различных областях течения². Каждой точке двумерной карты $p_1(x, y)$ соответствует (в первом приближении) значение экспоненциального растяжения произвольного контура или его части, помещенной в близлежащую область к этой точке, в течение следующего короткого (в масштабах задачи) интервала времени τ . Важно то, что в большинстве случаев построение карт локальных растяжений может быть выполнено аналитически, без привлечения сложных вычислений.

Для потенциального обтекания идеальной жидкостью кругового цилиндра значение экспоненциального растяжения в цилиндрической системе координат, связанной с центром кругового сечения цилиндра, имеет следующий вид:

$$p_1(r) = \frac{2U_0 a^2}{r^3}, \quad \text{при } r \geq a. \quad (24)$$

Следовательно, наибольшему растяжению подвергаются те участки контура, которые ближе всего расположены к цилиндру. С увеличением расстояния от цилиндра растяжение контуров падает.

Если в рассматриваемое течение жидкости поместить точечный вихрь, распределение локального растяжения существенно меняется. На рис. 5 показано распределение $p_1(x, y)$ для течения со скоростью набегающего потока $U_0 = 0.5$ и двух точечных вихрей (вихревая пара), расположенных симметрично относительно оси Ox со следующими начальными условиями:

$$x_1^0 = x_2^0 = 1.5, \quad y_1^0 = y_2^0 = 0.5, \quad \Gamma_1 = \Gamma_2 = 1.0.$$

Изолинии нанесены с шагом $\Delta p_1 = 0.5$. На рисунке видно, что в течении за цилиндром, а также

²Строго говоря, построение карт локального растяжения $p_1(x, y)$ может быть проведено только для областей интенсивного (хаотического) перемешивания, при котором растяжение контура не зависит от его пространственной ориентации. Для регулярных течений растяжение зависит от ориентации отрезка контура в окрестности точки (x, y) и поэтому применение метода является не совсем корректным [23].

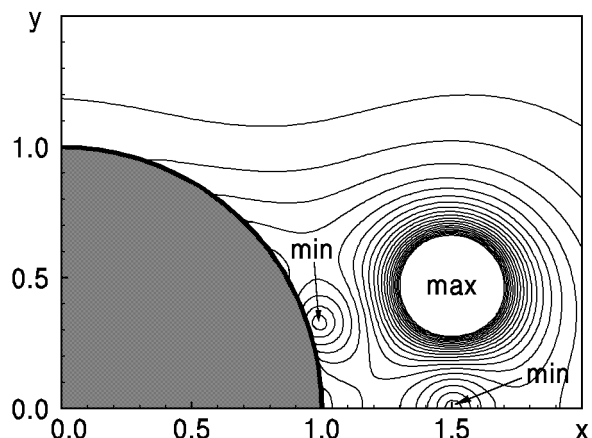


Рис. 5. Карта локальных растяжений контуров при обтекании потоком идеальной жидкости кругового цилиндра в поле скорости двух точечных вихрей

между вихрями появляется область минимального растяжения контуров. В целом, можно заключить, что присутствие вихревой пары в течении около кругового цилиндра должно существенно усиливать процесс перемешивания пассивной жидкости. Наибольшему растяжению подвергаются те контуры, которые расположены ближе к точечным вихрям.

Для проверки полученных результатов, проведем численное моделирование процесса перемешивания заранее выделенного объема пассивной жидкости при обтекании кругового цилиндра. Пусть цилиндр с радиусом поперечного сечения $a = 1.0$ зафиксирован в начале координат и на него набегаёт в положительном направлении оси Ox поток жидкости со скоростью $U_0 = 0.5$ на бесконечности. Выделим круговую область (подкрашенная область жидкости с неизменными параметрами по отношению к параметрам жидкости внешнего течения) пассивной жидкости радиуса $R_0 = 1.0$ с центром в точке $(-5.0, 0.0)$, рис. 6,а. Граница области на рисунке представлена 100 маркерами. Траектории движения каждого маркера определяются интегрированием во времени уравнений (3) и (4), или уравнениями (9) и (10), при этом каждый пассивный маркер интерпретируется как точечный вихрь нулевой интенсивности [10, 21].

При перемешивании отдельные части границы контура подвергаются достаточно сильному растяжению. Для вычисления нового положения границы в процессе интегрирования во времени задачи адвекции будем использовать метод кусочной сплайн-интерполяции [22], который позволяет находить координаты дополнительных маркеров

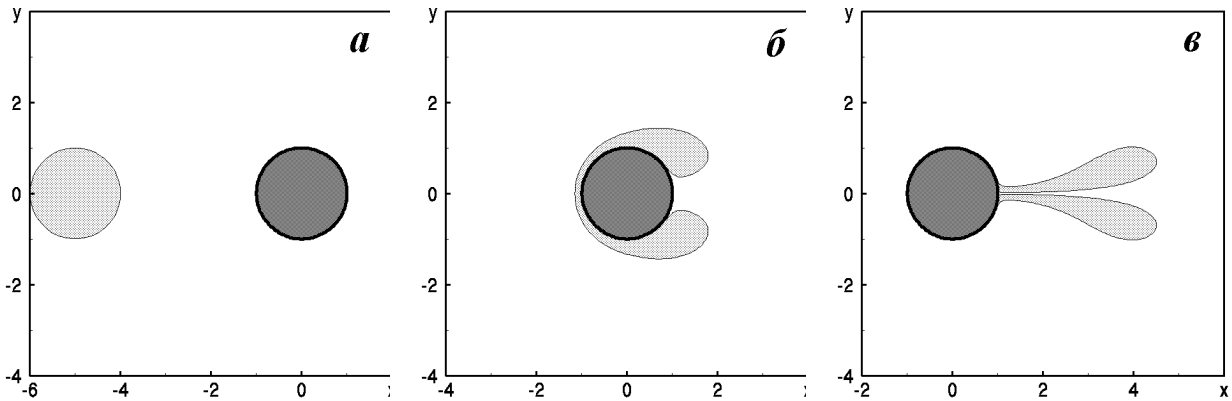


Рис. 6. Адвекция круговой области пассивной жидкости при потенциальном обтекании цилиндра для моментов времени: *a* – 0.0, *б* – 12.0, *в* – 18.0. Скорость набегающего потока $U_0 = 0.5$

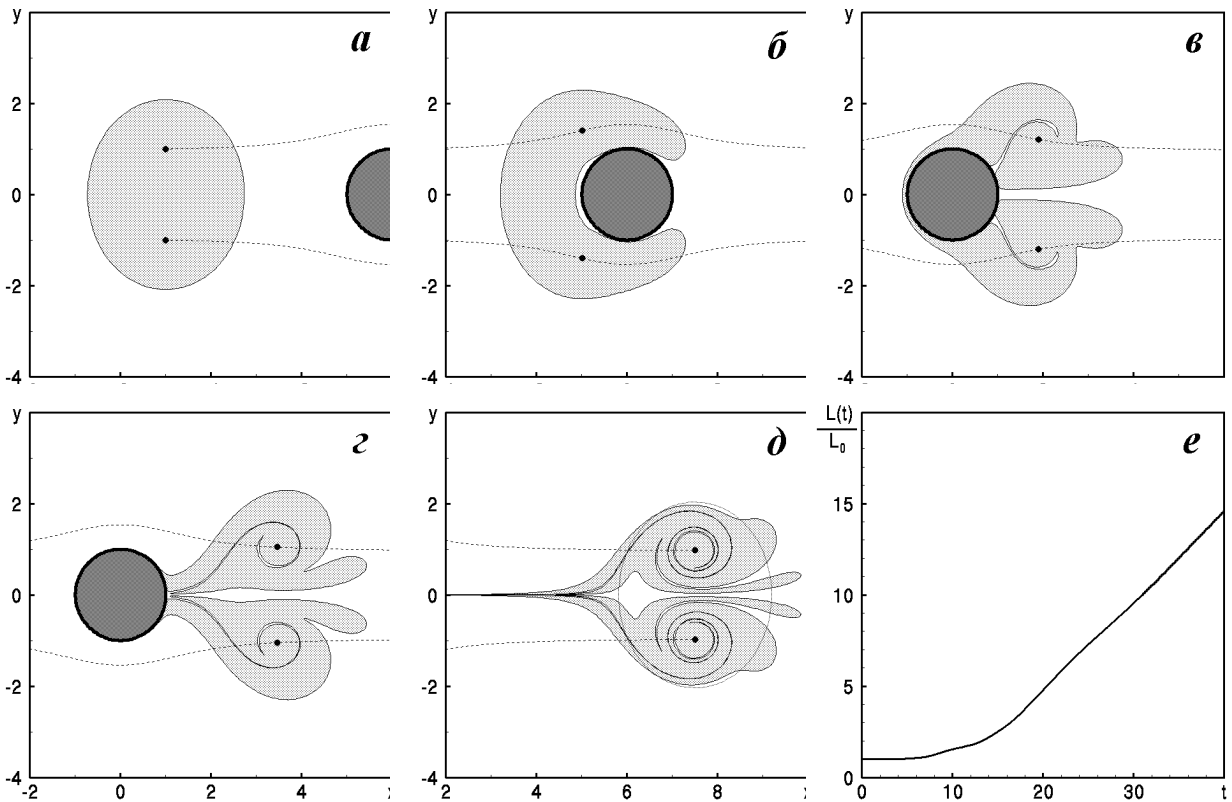


Рис. 7. Адвекция пассивной жидкости в поле скорости вихревой пары, взаимодействующей с круговым цилиндром, в потоке жидкости ($U_0 = 0.5$) для моментов времени: *a* – 0.0, *б* – 10.0, *в* – 16.0, *г* – 20.0, *д* – 30.0. *e* – изменение длины границы области с течением времени

в исследуемой границе при достаточно большом растяжении. При этом общее количество маркеров увеличивается, однако формирование границы исследуемой области значительно упрощается³.

³Заметим, что существуют другие способы формирования границ выделенной области. Один из них [6] связан с

Точность вычислений определяется сохранением во времени площади выделенной области. При проведении численных экспериментов в настоящей

определением начальной координаты дополнительного маркера на исходном контуре и интегрированием уравнений движения до рассматриваемого момента времени.

работе изменение площади по отношению к начальному значению во всех случаях не превышало 1%.

На рис. 6, б показано положение выделенной области в момент времени $t = 12.0$. Видно, что подкрашенная пассивная жидкость симметрично обтекает цилиндр, при этом существенному растяжению подвергается та часть границы, которая расположена ближе всего к головной части цилиндра. С течением времени приповерхностный слой подкрашенной жидкости становится все тоньше, в то время как остальная часть выделенной области уносится набегающим потоком. Характерный случай, соответствующий моменту $t = 18.0$, показан на рис. 6, в. В дальнейшем образуется каплевидная структура за цилиндром, которая сохраняет свою форму. Интересно отметить, что вдали от цилиндра длина контура увеличивается с течением времени по линейному закону (в данном случае численный анализ дает $dL/dt \approx 2.0$, где $L(t)$ – длина границы исследуемой области), что свидетельствует о регулярности процесса перемешивания [2, 3].

Несколько сложнее происходит процесс перемешивания при взаимодействии двух одинаковых точечных вихрей в набегающем на цилиндр потоке жидкости. Известно [11, 21], что два одинаковых вихря (вихревая пара) при самоиндуцированном стационарном движении вовлекают в собственное движение часть близлежащей жидкости, образуя так называемое *вихревое облако*, или *атмосферу вихря*. Вихревое облако имеет форму, близкую к эллиптической с размерами полуосей порядка $1.73b$ и $2.09b$, где b – расстояние между вихрями.

Адвекция жидкости, которая движется совместно с вихревой парой, при взаимодействии вихрей с круговым цилиндром показана на рис. 7. Вихри имеют одинаковые по модулю интенсивности $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = -1.0$ и начальные координаты $x_1^0 = x_2^0 = -5.0$, $y_1^0 = -y_2^0 = 1.0$. Вихревая пара окружена невозмущенной вихревой атмосферой, рис. 7, а. Пунктирными линиями на рисунках нанесены траектории движения вихрей.

Начальная фаза перемешивания в качественном отношении напоминает случай потенциального обтекания (рис. 6). По мере приближения вихрей к поверхности наступают незначительные отличия, вызванные наведенным полем скорости приближающегося вихря. Взаимодействие вихрей с цилиндром приводит к захвату неподкрашенной жидкости из близлежащего к твердой поверхности слоя в атмосферу вихря (рис. 7, в). Это вызвано увеличением расстояния между вихрями в вихревой паре. После прохождения вихрями цилиндра

расстояние между ними уменьшается. В результате часть подкрашенной жидкости вытесняется во внешнюю область течения перед вихревой парой (рис. 7, г). Вдали от цилиндра, с наступлением стационарного движения вихревой пары, вихревое облако принимает спиралевидную структуру, которая является характерной для многих вихревых течений в реальном эксперименте [20, 21].

Как видно из рис. 7, е, длина контура выделенной области увеличивается с течением времени линейно, что свидетельствует о регулярности процесса перемешивания. Можно заключить, что взаимодействие набегающей вихревой пары с цилиндром не приводит к интенсивному перемешиванию жидкости в атмосфере вихревой пары.

Теперь рассмотрим особенности процесса перемешивания в поле стационарно движущейся вихревой пары в течения за цилиндром. Этот случай показан на рис. 8, ему соответствуют следующие начальные условия: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -2.454$, $x_1^0 = x_2^0 = 1.5$, $y_1^0 = -y_2^0 = 0.467$, $U_0 = 0.5$. В начальный момент выделим круговую область радиуса $R_0 = 1.0$ с центром в точке $(0.5, 0.0)$, рис. 8, а. Процесс перемешивания незначительно отличается от потенциального обтекания цилиндра (см. рис. 6). Разница состоит в том, что теперь жидкость обтекает одновременно цилиндр и стационарную атмосферу вихревой пары. На заключительной стадии наблюдаются две аналогичные каплевидные области, которые уносятся внешним потоком.

Из симметрии условия (13) следует, что стационарное положение вихревой пары имеет место также при движении вихревой пары перед цилиндром в набегающем потоке. Этот случай показан на рис. 9, ему соответствуют начальные условия: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -2.454$, $x_1^0 = x_2^0 = -1.5$, $y_1^0 = -y_2^0 = 0.467$, $U_0 = 0.5$. В начальный момент форма и положение выделенной области пассивной жидкости аналогичны рассмотренному ранее случаю.

Стационарная пара вихрей, как и в предыдущем случае, не позволяет жидкости проникнуть внутрь атмосферы вихря, поэтому перемешивание жидкости происходит по аналогичному сценарию. На рис. 10 показана зависимость изменения длины контура, охватывающего выделенную область жидкости, от времени. Сплошная линия соответствует случаю, когда вихревая пара находится за цилиндром, а штриховая линия – перед ним в набегающем из бесконечности потоке. Видно, что длина контура в обоих случаях увеличивается линейно с течением времени. Это свидетельствует об упорядоченности процесса перемешивания. Инте-

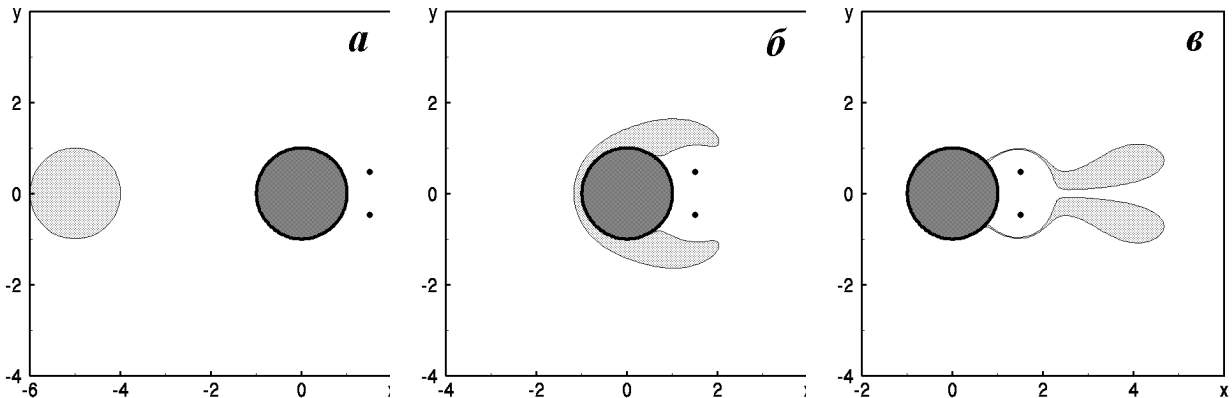


Рис. 8. Адвекция круговой области пассивной жидкости при потенциальном обтекании цилиндра со стационарной вихревой парой (за цилиндром) для моментов времени: *a* – 0.0, *б* – 12.0, *в* – 18.0. Скорость набегающего потока $U_0 = 0.5$

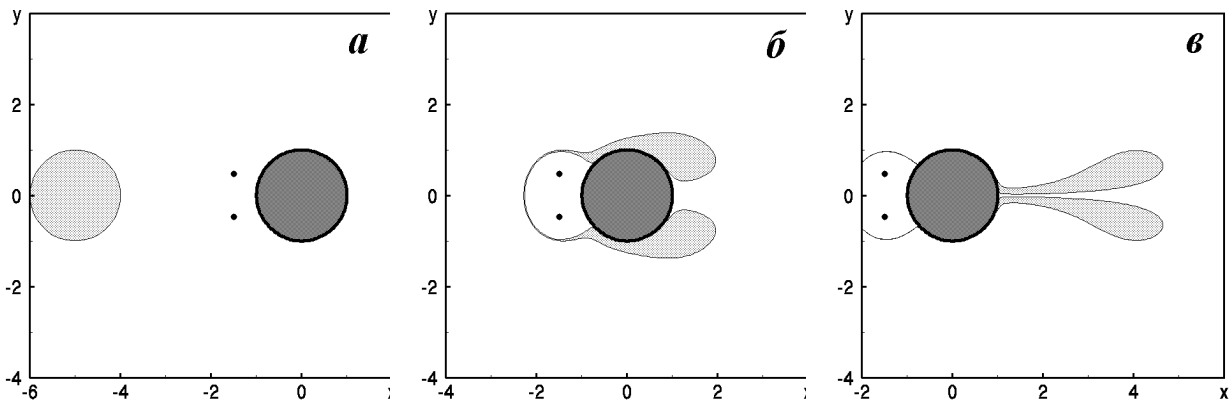


Рис. 9. Адвекция круговой области пассивной жидкости при потенциальном обтекании цилиндра со стационарной вихревой парой (перед цилиндром) для моментов времени: *a* – 0.0, *б* – 12.0, *в* – 18.0. Скорость набегающего потока $U_0 = 0.5$

ресно отметить, что в количественном отношении вихревая пара за цилиндром сильнее растягивает исходный контур.

В случае периодического движения вихревой пары около положения равновесия в набегающем на цилиндр потоке идеальной жидкости интенсивность перемешивания пассивной жидкости значительно усиливается. На рис. 11 рассматривается наиболее характерный случай со следующими начальными условиями: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -2.0$, $x_1^0 = x_2^0 = 1.5$, $y_1^0 = -y_2^0 = 0.6$, $U_0 = 0.5$. Как и ранее, в начальный момент выделим круговую область радиуса $R_0 = 1.0$ с центром в точке $(0.5, 0.0)$, рис. 11, *a*. В силу симметрии начальных условий вихри движутся периодически около положения равновесия, траектория их движения показана на рисунках пунктирными линиями.

Начальная фаза обтекания цилиндра в целом

аналогична потенциальному обтеканию, поскольку вихри расположены за цилиндром и их влияние на деформацию подкрашенной области еще остается незначительным (рис. 11, *б*). С течением времени окрашенная жидкость приближается к вихревой паре и начинает обтекать атмосферу вихрей по аналогии с рис. 8, *б*. В процессе периодического движения расстояние между вихрями меняется периодически. Как следствие, атмосфера вихря меняет свои размеры и часть окрашенной жидкости вовлекается в вихревое облако, (рис. 11, *в*). При этом формируется характерная спиралевидная структура вихревого облака.

В те моменты времени, когда расстояние между вихрями в вихревой паре уменьшается, размеры вихревого облака уменьшаются. В результате часть близлежащей к вихрям жидкости, которая ранее принадлежала вихревому облаку, выталки-

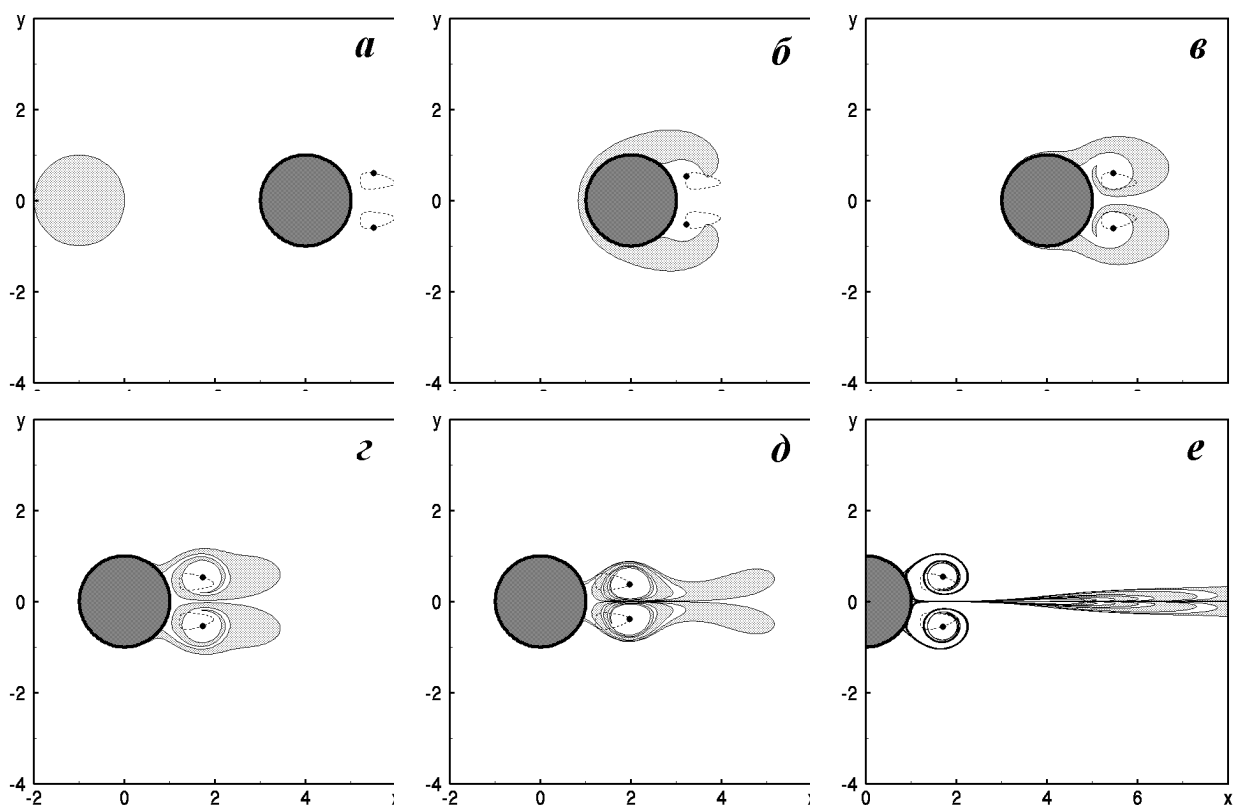


Рис. 11. Адвекция пассивной жидкости в поле скорости двух одинаковых вихрей за круговой областью, обтекаемой жидкостью ($U_0 = 0.5$) для моментов времени: а – 0.0, б – 6.0, в – 7.0, г – 8.0, д – 10.0, е – 12.0

вається во зовнішнє течіння. Характерний момент показаний на рис. 11, г. При цьому починають формуватися дві каплеподібні структури, які також спостерігалися при обтіканні циліндра як в відсутності вихрей (рис. 6), так і в присутності стаціонарно рухомих вихревої пари (рис. 8). В подальшому періодическіе “виганкивання” жидкости вихрями формують в сліді за циліндром характерні каплеподібні структури через рівні інтервали часу. Характерно, що перша пара каплеподібних структур складається з окрашеної жидкости, в той час як наступні складаються як з окрашеної, так і з неокрашеної жидкости. Можна зробити висновок, що періодическіе рух вихревої пари призводить до більш інтенсивного режиму перемішування жидкости.

Якщо стаціонарно рухома вихреву пару розмістити перед циліндром в набегаючому потоці жидкости, то деформація початкового контуру досліджуваної області пасивної жидкости настає раніше. На рис. 12 показано характерний випадок, якому відповідають наступні початкові умови: $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -2.0$, $x_1^0 = x_2^0 = -1.5$, $y_1^0 = -y_2^0 = 0.6$, $U_0 = 0.5$. Деформований стан

початкової області в момент часу $t = 4.0$ показано на рис. 12, б. Жидкость біля вихрей інтенсивно обертається і втягує в своє русло частину окрашеної і неокрашеної жидкости з області, прилеглої до циліндра. К моменту часу $t = 6.0$ атмосфера вихря набуває спіральної структури (рис. 12, в). При цьому частина окрашеної жидкости, яка знаходиться достатньо далеко від вихрей, поступово обтікає циліндр і відноситься зовнішнім потоком. В подальшому (рис. 12, д), в силу періодического руху вихревої пари, періодическіе змінюється атмосфера вихрей. В той момент, коли вихри зближуються, частина спіральної структури вихревої області виганкивається до зовнішнього потоку. З течінням часу ця перемішана область жидкости відноситься течінням за циліндр (рис. 12, е).

На рис. 13 показано відносні зміни довжини контуру по відношенню до початкової довжини контуру в початковий момент часу, з течінням часу для випадків періодического руху вихревої пари. Зміна довжини контуру при періодическому руслі вихрей за циліндром показано сплошної лінією, коли вихрева пара рухається

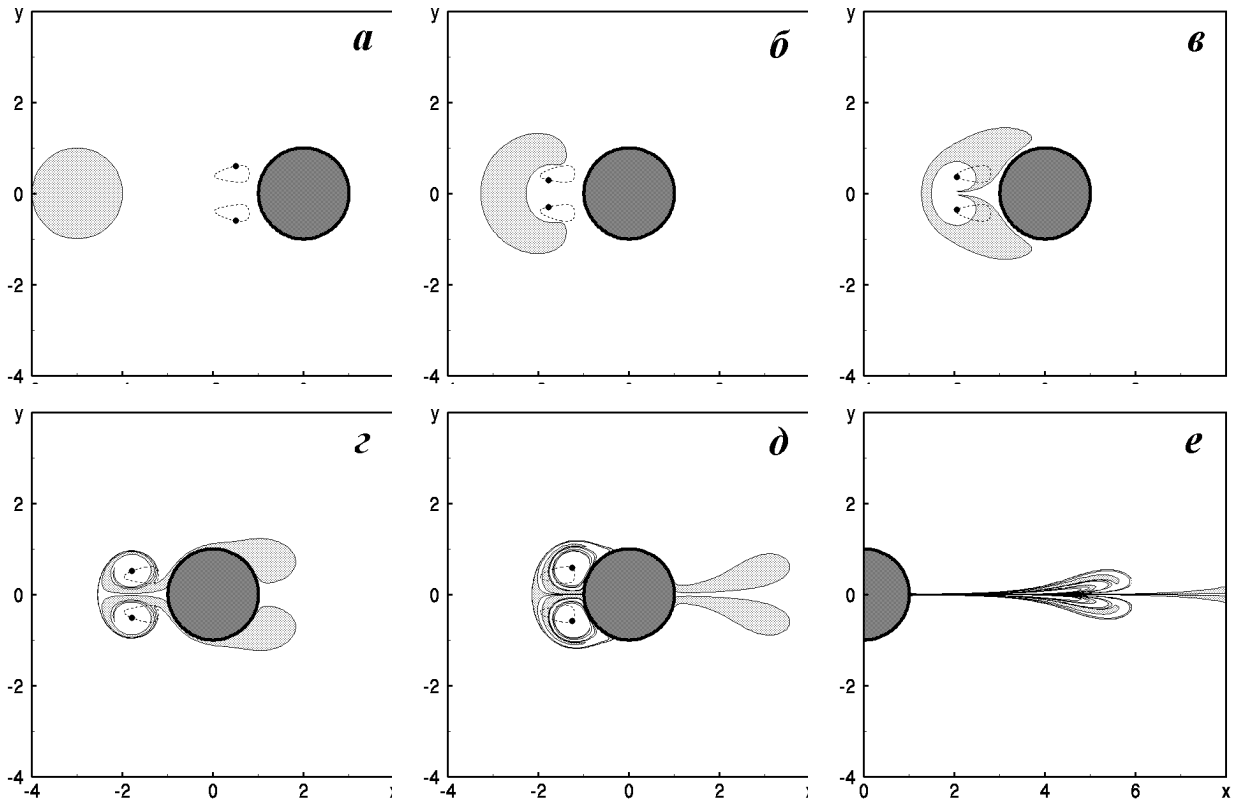


Рис. 12. Адвекция пассивной жидкости в поле скорости двух одинаковых вихрей перед круговой областью, обтекаемой жидкостью ($U_0 = 0.5$) для моментов времени: а – 0.0, б – 4.0, в – 5.0, г – 6.0, д – 8.0. е – 15.0

ся перед цилиндром – пунктирной линией. Видно, что более интенсивное перемешивание наблюдается при движении вихрей перед цилиндром. Сравнение с предыдущими случаями перемешивания позволяет заключить, что начальные возмущения от периодически движущейся вихревой пары около кругового цилиндра значительно усиливаются, однако вклад в процесс перемешивания вихревой пары и кругового цилиндра являются существенно разными. Если вихри расположены за цилиндром, начальное обтекание подкрашенной области цилиндра не приводит к существенному перемешиванию жидкости, жидкость перемешивает вихревая пара. Интересно отметить, что длина контура, охватывающего подкрашенную жидкость, увеличивается с течением времени по экспоненциальному закону. Критерии перемешивания, основанные на анализе изменения длины контура во времени [2, 10], свидетельствуют о том, что при периодическом движении вихревой пары около цилиндра наблюдается интенсивное, хаотическое перемешивание жидкостей.

ОБСУЖДЕНИЕ И ВЫВОДЫ

В настоящей статье рассмотрена задача о перемешивании пассивной примеси в набегающем двухмерном потоке идеальной несжимаемой жидкости на круговой цилиндр в перпендикулярном направлении в присутствии и отсутствии двух точечных вихрей. Изучение процесса перемешивания на примере идеальной несжимаемой жидкости позволяет выявить основные закономерности процесса адвекции пассивной жидкости, прилагая существенно меньшие усилия по сравнению с анализом течений вязкой жидкости. Более того, в некоторых случаях, важных с практической точки зрения, модель идеальной несжимаемой жидкости является приемлемой. Иногда, при изучении явления перемешивания слабвязких жидкостей в химических технологиях, при анализе процесса распространения примесей в экологических проблемах, влиянием вязкости, равно как и влиянием диффузии на начальных стадиях перемешивания, можно пренебречь.

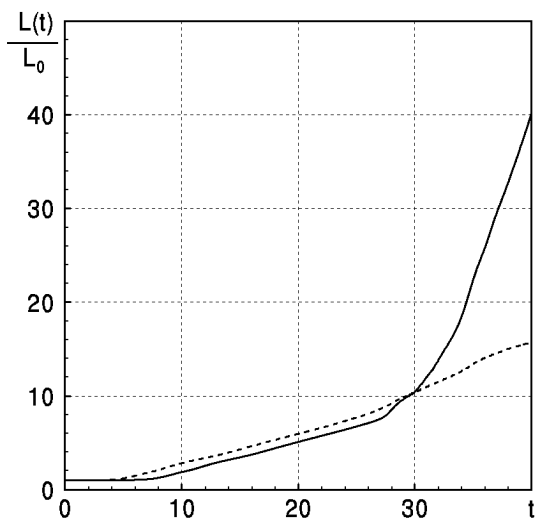


Рис. 10. Скорость изменения длины контура, ограничивающего область пассивной жидкости, с течением времени. Сплошная линия соответствует случаю расположения вихрей за цилиндром, пунктирная линия – перед цилиндром

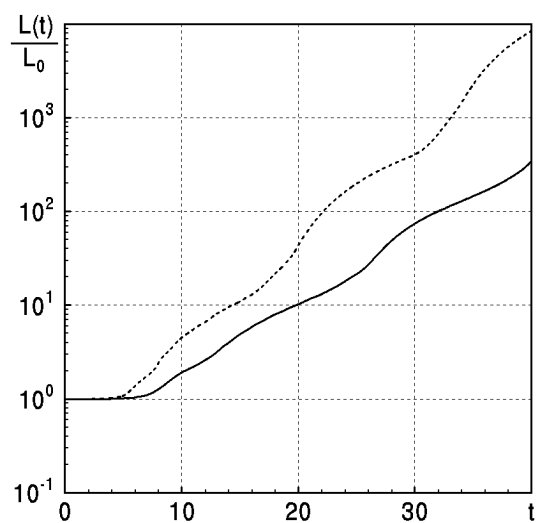


Рис. 13. Скорость изменения длины контура, ограничивающего область пассивной жидкости, с течением времени. Сплошная линия соответствует нестационарному движению вихрей за цилиндром, пунктирная линия – перед цилиндром

При обтекании жидкости кругового цилиндра существует режим стационарного движения вихревой пары. Исследования показывают, что стационарное движение двух вихрей в идеальной жидкости около кругового цилиндра оказывается неустойчивым к малым возмущениям в пространственном положении вихрей. Неустойчивость движения вихревой пары является, очевидно, основным механизмом отрыва вихрей при обтекании

кругового цилиндра вязкой жидкостью. Однако стационарное движение вихревой пары остается устойчивым на симметричные возмущения. Устойчивое движение вихревой пары в течении за цилиндром хорошо видно в экспериментах (см., например, [20]).

Потенциальное обтекание не сопровождается сильными режимами перемешивания. При этом длина контура, охватывающего подкрашенную область жидкости, растягивается линейно с течением времени, что соответствует регулярному режиму перемешивания [2, 3, 21]. При стационарном режиме обтекания цилиндра в присутствии стационарно двигающейся вихревой пары процесс перемешивания жидкости остается регулярным. Поскольку объем близлежащей к вихрям жидкости, которая формирует атмосферу вихря, с течением времени не меняется, то подкрашенная жидкость не покидает вихревое облако, и не проникает в него. Внешний поток жидкости лишь обтекает стационарную “структуру”, состоящую из твердого цилиндра и жидкой атмосферы вихря.

Однако периодическое движение вихревой пары приводит к интенсивному перемешиванию. В этом случае размеры вихревого облака меняются, причем периодически. В тот момент, когда расстояние между вихрями в паре увеличивается, размеры вихревого облака увеличиваются, и часть жидкости из внешнего течения проникает внутрь вихревого облака. И наоборот, при уменьшении расстояния между вихрями часть близлежащей к вихрям жидкости вытесняется во внешнее течение. Поскольку около вихрей жидкость участвует во вращательном движении, то состоящая из подкрашенной и неподкрашенной и попавшая под влияние вихревой пары она интенсивно закручивается, формируя характерную для вихревой пары спиралевидную структуру вихревого облака.

При обтекании жидкостью вихревой пары около неподвижного цилиндра имеются два последовательных источника перемешивания. Первым из них является цилиндр, который в большинстве рассмотренных случаев не приводит к интенсивному перемешиванию пассивной жидкости. Вторым источником перемешивания служит вихревая пара. При периодическом движении вихревая пара интенсивно размешивает близлежащую жидкость. Интересно отметить, что если вихревая пара располагается после цилиндра, то жидкость сначала подвергается незначительному перемешиванию, а потом, когда исследуемый объем жидкости достигает области вихрей, влияние вихревой пары приводит к существенной интенсификации процесса перемешивания. Исследова-

ния показывают, что наиболее интенсивный режим перемешивания наблюдается в случае, при котором сначала вихри подвергают перемешиванию выделенную область пассивной жидкости, а затем цилиндр “домешивает” результат адвекции вихревой пары.

1. Tubes, sheets and singularities in fluid dynamics / ed. by Bayer K., and Moffatt H.K., Proceeding of the NATO ARW held in Zakopane, Poland, 2-7 September 2001.– London: Kluwer Acad. Publ., 2002.– 384 p.
2. Ottino J.M. The Kinematics of Mixing: Stretching, Chaos and Transport.– Cambridge: Cambridge University Press, 1989.– 683 p.
3. Aref H. Chaotic advection of fluid particle // Phil. Trans. R. Soc. London.– 1990.– **333**.– P. 273–288.
4. Гуржий А.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Режимы хаотического перемешивания жидкости в круге парой точечных вихрей / под ред. Борисова А.В. и др. в кн. “Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей”.– Москва, Ижевск, АНО ИКИ.– 2002.– С. 441–467.
5. Заславский Г.М. Введение в нелинейную физику: от маятника до турбулентности и хаоса.– М.: Мир, 1988.– 388 с.
6. Краснопольская Т.С., Мелешко В.В. Ламинарное смешивание жидкостей. Часть 1. Методологические аспекты исследования. // Прикладная гидромеханика.– 2004.– 4.– С. 45–58.
7. Muzzio F.J., Liu M. Chemical reactions in chaotic flows // Chem. Eng. J.– 1996.– **64**.– P. 117–127.
8. Tang X.Z., Boozer A.H. Design criteria of a chemical reactor based on a chaotic flow // Chaos.– 1999.– **9**, N.1.– P. 183–194.
9. Konopka P., Steinhorst H.-M., Groob J.-U., Gunther G., Muller R., Elkins J.W., Jost H.-J., Richard E., Schmidt U., Toon G., McKenna D.S. Mixing and ozone loss in the 1999-2000 Arctic vortex: Simulations with the three-dimensional Chemical Lagrangian Model of the Stratosphere (CLaMS) // J. Geophys. Res.– 2004.– **109**.– P. 2315–2330.
10. Meleshko V.V., Konstantinov M.Yu., Gurzhi A.A., Konovalyuk T.P. Advection of a vortex pair atmosphere in a velocity field of point vortices // Phys. Fluids.– 1992.– **A4**.– P. 2779–2797.
11. Lamb H. Hydrodynamics.– Cambridge: Cambridge University Press, 6th ed., 1967.– 677 p.
12. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, 1987.– 840 с.
13. Malyuga V.S., Meleshko V.V., Speetjens M.F.M., Clercx H.J.H., van Heijst G.J.F. Mixing in the Stokes flow in a cylindrical container // Proc. Roy. Soc. London.– 2002.– **458**.– P. 1867–1885.
14. Meleshko V.V., Peters G.W.M. Periodic Points for Two-Dimensional Stokes Flow // Phys. Lett.– 1996.– **216**.– P. 87–96.
15. Howland R.S.J. Vortex motion behind a circular cylinder // J. Royal Aeron Soc.– 1925.– **29**, N.171.– P. 189–195.
16. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики.– М.: Гостехиздат, 1950.– 345 с.
17. Kilin J.B., Novikov E.A. First integral in the problem of motion of a circular cylinder and a point vortex in unbounded ideal fluid // Reg. & Chaot. Dynam.– 2001.– **6**, N.2.– P. 233–234.
18. Ramodanov S.M. Motion of a circular cylinder and a vortex in an ideal fluid // Reg. & Chaot. Dynam.– 2001.– **6**, N.1.– P. 33–38.
19. Борисов А.В., Мамаев И.С. Интегрируемость задачи о движении цилиндра и вихря в идеальной жидкости / под ред. Борисова А.В. и др. в кн. “Фундаментальные и прикладные проблемы теории вихрей”.– Москва, Ижевск, АНО ИКИ.– 2002.– С. 321–326.
20. Ван-Дайк М. Альбом течения жидкости и газа / пер. с англ.– М.: Мир, 1986.– 180 с.
21. Мелешко В.В., Константинов М.Ю. Динамика вихревых структур.– Киев: Наук. думка, 1993.– 283 р.
22. Гуржий О.А., Мелешко В.В., ван Хейст Г.Я.Ф. Метод кусковой сплайн-интерполяции в задачі про адвекцію пасивної домішки у відомому полі швидкості // Доп. АН України.– 1996.– N.8.– С. 48–54.
23. Гуржий А.А., Перхосейни Х. Локальные карты растяжений: приложение для задачи об адвекции в произвольном поле скорости // Прикладная гидромеханика.– 2000.– 1.– С. 28–43.