

УДК 551.511.001: 551.593

# ДИНАМІКА СТАЦІОНАРНОГО РУХУ ВИХРОДЖЕРЕЛА У СТРАТИФІКОВАНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

О. Г. СТЕЦЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Одержано 12.08.2006

Розглянута задача визначення гідродинамічних сил реакції довільного стійко стратифікованого ідеального середовища на стаціонарний рух плоского точкового вихроджерела. Одержані загальні вирази для складових гідродинамічної сили. Розроблено альтернативний метод визначення додаткової поздовжньої складової сили – хвильового опору, який ґрунтується на використанні рівняння енергії збуреного руху середовища. В якості ілюстрації представлені відповідні лінійні задачі для безмежних двохшарового та лінійно стратифікованого середовищ.

Рассмотрена задача определения гидродинамических сил реакции произвольной устойчиво стратифицированной среды на стационарное движение плоского точечного вихреисточника. Получены общие выражения для составляющих гидродинамической силы. Разработан альтернативный метод определения дополнительной продольной составляющей гидродинамической силы – волнового сопротивления, который основан на использовании уравнения энергии возмущенного движения среды. В качестве иллюстрации представлены соответствующие линейные задачи для бесконечных двухслойной и линейно стратифицированных сред.

The present study is devoted to a problem of determination of hydrodynamic forces resulting from a response of a randomly and stably stratified ideal medium to the vortex-source. General formulae for components of hydrodynamic force have been derived. An alternative method for determination of a additional longitudinal component of the force, wave resistance, has been developed, such method being based on the use of the equation of the energy of the disturbed motion of the medium. To illustrate the findings, corresponding linear problems for infinite two-layered and linear stratified media have been presented.

## ВСТУП

Задачі про вимушений рух плоского точкового вихроджерела є визначальними в гідродинаміці руху плоских тіл, зокрема, крилових профілів, у лінійній постановці. Їх результати є базовими в постановках відповідних задач для довільного плоского профіля, обтікання якого можна замінити обтіканням системи певним чином розподілених вихроджерел. В силу цього такі задачі викликають як науковий, так і прикладний інтерес. Достатньо повний огляд робіт представленого напрямку досліджень виконано в [1]. Враховуючи важливість використання суден на підводних крилах, глісуючих суден, а також використання крил в якості засобів маневрування для підводних об'єктів, особливе місце в даній проблемі займає дослідження впливу на гідродинамічні характеристики таких тіл наявності границь розділення середовищ. Такими є вільна поверхня рідини, тверда стінка або поверхня різкої зміни густини середовища (стрибок густини). Саме такі схеми границь є предметом дослідження більшості виконаних робіт [2].

Наявність стрибка густини в рідині, обумовленого, наприклад, різким градієнтом температури або солоності, відповідає одній з найпростіших схем стратифікованого середовища. В загальному випадку стійко стратифіковані середовища мають неперервний розподіл густини вздовж вер-

тикальної координати. В окремих випадках реальний профіль розподілу густини рідини можна апроксимувати, використовуючи схему шаруватої стратифікації, коли має місце один або декілька стрибків густини на границі шарів, всередині кожного з яких густина рідини стала.

Наявність стратифікації середовища за густиною через механізм гравітації впливає як на кінематичну картину обтікання вихроджерела, так і на його динамічні характеристики – вертикальну підйомну силу  $Z$  та горизонтальну складову  $X$ , які визначаються як густиною середовища в околі вихроджерела, так і наявністю стратифікації. Частина горизонтальної складової  $X$ , яка визначається стратифікацією (надалі вона позначатиметься як хвильова складова  $\Delta X_w$ ), обумовлена генерацією при русі вихроджерела внутрішніх хвиль. Тому  $\Delta X_w$  є інтегральною характеристикою енергетики поля внутрішніх хвиль за рухомим збуренням.

Початок досліджень стаціонарного руху вихорів та вихроджерел у стратифікованих середовищах відноситься до фундаментальних робіт М.Є.Кочина [3, 4], в яких розглянуто лінійні задачі про рух вихроджерела біля границі розділення напівнескінчених однорідних середовищ різної густини (в [3] верхній шар мав нульову густину). Надалі практично у всіх роботах стосовно гідродинаміки руху точкових особливостей розглядалися лінійні задачі лише для шарових схем стратифі-

кації. Так, в [5, 6] розв'язана задача про рух вихроджерела під вільною поверхнею важкої рідини скінченої глибини, а в [7, 8] – про рух вихора біля границі розділення двох шарів, верхній з яких має вільну поверхню. В роботі [9] задача про рух вихроджерела узагальнена на випадок довільної скінченої кількості шарів рідини, кожен з яких має ще і свою швидкість набігаючого потоку.

Середовища з неперервним розподілом стратифікації стали предметом розгляду для даного класу задач у роботах [10, 11]. В [10] використано інтегральні представлення поздовжньої складової збуреної швидкості для диполя, орієнтованого в напрямку руху вихора, та цієї ж складової, генерованої вихором в однорідному середовищі, і граничний перехід від вихрового обтікання для стратифікованого середовища до потенціального обтікання вихора однорідним потоком, який би задовольнив розв'язок для диполя в околі центра вихора та далеко від нього. Це дозволило одержати розв'язок задачі для безмежного середовища з лінійною стратифікацією при використанні спрощеного варіанту рівнянь руху в наближенні Бусинеска. Загальна постановка лінійної задачі про стаціонарний рух точкового вихора виконана в роботі [11]. Запропонований там підхід дозволяє ставити відповідні задачі для будь-якого стійкого профілю стратифікації, включно з наявністю вільної поверхні, дна та скінченої кількості стрибків густини. Розглянуті раніше схеми шаруватої стратифікації є частинними випадками загальної постановки.

Визначення гідродинамічної сили, що діє на рухоме вихроджерело, є важливою складовою проблемами гідродинаміки крила. У випадку однорідного середовища та в лінійних задачах для шаруватої стратифікації ця сила при стаціонарному русі визначається формулою Чаплигіна [12]

$$Z + iX = -\frac{\rho_c}{2} \oint_c \left( \frac{d\chi}{dz} \right)^2 dz, \quad (1)$$

де  $\chi = \phi + \psi$  – комплексний потенціал;  $\phi$  – потенціальна функція;  $\psi$  – функція течії;  $\bar{z} = x + iz$  – комплексна змінна;  $x$  і  $z$  – відповідно горизонтальна і вертикальна координати;  $\rho_c$  – густина середовища в шарі, де рухається вихроджерело. Для довільної стратифікації з неперервним розподілом густини введення комплексного потенціалу неможливе, тому для визначення гідродинамічної сили необхідно знати в фізичних координатах розподіл поля тиску і швидкості в потоці як результат розв'язку відповідної гідродинамічної задачі. Для необмеженого лінійно стратифікованого середови-

ща в [13] одержано розв'язок для гідродинамічної сили, що діє на рухомий вихор.

У даній роботі одержано лінійне рівняння для функції течії, яке описує збурення довільного стійко стратифікованого середовища, викликане вимушеним рухом точкового вихроджерела. Як і рівняння для випадку руху точкового вихора [11], воно в явній формі містить характеристики вихроджерела, що дозволяє для його розв'язання використовувати методи інтегральних перетворень. Одержані загальні вирази для складових гідродинамічної сили, яка діє на вихроджерело. В якості ілюстрації розглянуто випадки руху вихроджерела біля границі розділення двох напівнескінчених шарів рідини різної густини та його рух в необмеженому лінійно стратифікованому середовищі. Перша з цих задач розглянута в якості тестової для порівняння з її розв'язком, одержаним методом [12].

## 1. МАТЕМАТИЧНЕ ФОРМУЛЮВАННЯ ЗАДАЧІ

Розглянемо рівномірний горизонтальний рух плоского точкового вихроджерела ( $\Gamma$  і  $Q$  – відповідно інтенсивність вихора і потужність джерела маси) зі швидкістю  $U$  у стійко стратифікованому середовищі. Вісь вихроджерела перпендикулярна до напрямку руху і до напрямку дії гравітаційних сил.

У роботі [13] показано, що в лінійних задачах збурений рух середовища, обумовлений стаціонарним рухом вихора інтенсивності  $\Gamma$ , еквівалентний руху середовища, обумовленому рухом вертикального силового джерела потужності  $\rho_0 U \Gamma$  ( $\rho_0$  – густина середовища на горизонті руху джерела). Тоді в системі координат  $xoz$ , яка рухається разом з вихроджерелом, причому додатній напрям горизонтальної вісі  $x$  направлено в сторону, протилежну напрямку вектора швидкості руху, а вісь  $z$  направлена вгору, лінеаризовані рівняння, які описують стаціонарний рух стратифікованого середовища в наближенні Бусинеска, представляються у вигляді:

$$\rho_0(z)U \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2)$$

$$\rho_0(z)U \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial z} + g\rho = \rho_0 U \Gamma \delta(x - x_0) \delta(z - z_0), \quad (3)$$

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{d\rho_0}{dz} w = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = Q \delta(x - x_0) \delta(z - z_0). \quad (5)$$

Тут  $u, w, p$  і  $\rho$  – відповідно збурені горизонтальна і вертикальна складові швидкості, тиск і густина;  $\rho_0(z)$  – незбурений профіль розподілу густини середовища;  $g$  – прискорення сили тяжіння;  $x_0, z_0$  – координати центру вихроджерела;  $\delta(x - x_0), \delta(z - z_0)$  – дельта-функції Дірака.

Введення функції течії

$$\Psi = Uz + \psi(x, z)$$

такої, що

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

систему рівнянь (2)–(5) зводить до одного рівняння відносно  $\psi(x, z)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi - \frac{N^2}{g} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} + \frac{N^2}{U^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = \\ = Q \frac{N^2}{U^2} \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) - \\ - \Gamma \delta'(x - x_0) \delta(z - z_0) - Q \delta(x - x_0) \delta'(z - z_0), \end{aligned} \quad (6)$$

де (') означає похідну по відповідній координаті;

$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$  – двовимірний оператор Лапласа;  $N(z)$  – частота Брента-Вяйсяля, яка знаходиться як

$$N(z) = \left( -\frac{g}{\rho_0} \frac{d\rho_0}{dz} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Величина  $\Delta \psi$  визначає завихореність  $\zeta(x, z)$  і, як видно з рівняння (6), рух рідини є вихровим в усій області середовища, на відміну від однорідної рідини, де  $\Delta \psi = 0$  скрізь, крім центра вихроджерела.

Якщо покласти  $Q = 0$ , то з (6) випливає рівняння

$$\Delta \psi + \frac{N^2}{g} \frac{\partial \psi}{\partial z} + \frac{N^2}{U^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\Gamma \delta(x - x_0) \delta(z - z_0). \quad (7)$$

В роботі [11] показано, що рівняння (7) описує стаціонарний рух плоского точкового вихора інтенсивністю  $\Gamma$ . Таким чином, одержане рівняння (6) описує рух точкового вихроджерела.

Спрощений варіант наближення Бусинеска, коли в інерційних складових рівнянь Ейлера не враховується змінність густини середовища по координаті  $z$ , дає таке рівняння відносно  $\psi$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi + \frac{N^2}{U^2} \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\Gamma \delta'(x - x_0) \delta(z - z_0) - \\ - Q \delta(x - x_0) \delta'(z - z_0). \end{aligned} \quad (8)$$

Лінеаризовані граничні умови для  $\psi$  визначаються із виконання кінематичних і динамічних умов на границях середовища:

– на вільній поверхні – непокидання її власними частинками і рівність нулю збуреного тиску;

– на поверхні стрибка густини – неперервність зміщень і тиску;

– на горизонтальному дні – рівність нулю вертикальної складової швидкості.

В термінах функції течії вони мають вигляд:

на вільній поверхні

$$U \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (9)$$

$$U^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} - g \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad (10)$$

де  $\eta$  – амплітуда поверхневої хвилі;

на границі стрибка густини  $i$ -того і  $i+1$ -го шарів

$$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x}, \quad (11)$$

$$U^2 \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x \partial z} - g \frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \kappa \left( U^2 \frac{\partial^2 \psi_{i+1}}{\partial x \partial z} - g \frac{\partial \psi_{i+1}}{\partial x} \right), \quad (12)$$

де

$$\kappa_i = \frac{\rho_{i+1}(z_i - 0)}{\rho_i(z_i + 0)};$$

на дні

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0. \quad (13)$$

До цих умов додаються умови на нескінченості:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} - \text{обмежені при } x \rightarrow \infty, \\ \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty. \end{aligned} \quad (14)$$

Останнє співвідношення відповідає відсутності збурень в нескінченості перед рухомих вихроджерелом.

Для безмежного середовища для всіх  $x$  повинні виконуватись також умови

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \rightarrow 0 \text{ при } z \rightarrow \pm \infty. \quad (15)$$

Всі задачі про рух вихроджерела у багатошаровому середовищі описуються в рамках представленої загальної постановки, якщо в кожному із шарів покласти  $N = 0$ .

Сформульована лінійна задача дозволяє описати стаціонарний рух точкового вихроджерела у довільному стійко стратифікованому середовищі. Неважко бачити, що на основі рівнянь (6) або (8), використовуючи апарат теорії функцій Гріна та метод інтегральних перетворень, можна розв'язати задачу про стаціонарний рух довільної системи вихроджерел.

## 2. ГІДРОДИНАМІЧНА СИЛА, ЩО ДІЄ НА ВИХРОДЖЕРЕЛО

Гідродинамічну силу реакції (горизонтальна  $X$ -та вертикальна  $Z$ -складові) середовища на стаціонарний рух вихроджерела можна визначити, застосувавши до рідкого об'єму, який знаходиться всередині довільного контура  $c$ , що охоплює вихроджерело, теорему про зміну кількості руху. У вибраній системі координат, що рухається разом з вихроджерелом, застосування цієї теореми в проєкціях на осі координат дає вирази для  $X$  і  $Z$  через інтеграли по контуру  $c$  [14]:

$$X = - \oint_c p \cos \theta ds - \oint_c m(U + u) ds, \quad (16)$$

$$Z = - \oint_c p \sin \theta ds - \oint_c m w ds, \quad (17)$$

де  $\theta$  – кут між нормаллю до елемента контура  $ds$  та віссю  $x$ ;  $m = [\rho_0(z) + \rho(x, z)][(U + u) \cos \theta + w \sin \theta]$  – маса рідини, яка протікає через відрізок контура  $ds$  за одиницю часу. Вирази (16), (17) рівні по модулю і протилежні за знаком складовим сили, з якою вихроджерело діє на навколишнє середовище [14].

У випадку однорідного ідеального середовища, густина якого  $\rho_c$ , величина збуреного тиску визначається через швидкість з інтегралу Бернуллі, справедливого вздовж лінії течії:

$$p = -\rho_c \left[ Uu + \frac{1}{2}(u^2 + w^2) \right].$$

Тоді вирази для  $X$  і  $Z$  набувають вигляду, який визначає ці величини через компоненти збуреної швидкості:

$$X = -\rho_c \left\{ U \oint_c (u \cos \theta + w \sin \theta) ds - \frac{1}{2} \oint_c [(u^2 - w^2) \cos \theta + uw \sin \theta] ds \right\},$$

$$Z = \rho_c \left\{ U \oint_c (u \sin \theta - w \cos \theta) ds + \frac{1}{2} \oint_c [(u^2 - w^2) \sin \theta - uw \cos \theta] ds \right\}.$$

Саме такі вирази для  $X$  і  $Z$  випливають з класичного результату Чаплигіна (1), якщо там покласти  $dz_* = dx + idz = -\sin \theta ds + i \cos \theta ds$  і при обході

контура  $c$  в напрямку проти годинникової стрілки виділити дійсну і уявну частини.

Для випадку шарової стратифікації наведені вирази для складових гідродинамічної сили можуть бути використані (за умови, що весь контур інтегрування знаходиться в межах того шару, в якому рухається вихроджерело) після заміни в них  $\rho_c$  на густину середовища в даному шарі. Слід відмітити, що наведені вирази для сили є універсальними як для лінійних, так і для нелінійних задач.

Для середовищ з неперервним розподілом густини  $\rho_0(z)$  для визначення  $X$  і  $Z$  необхідно застосувати підхід з використанням співвідношень (16), (17).

Можна показати, що в лінійних задачах збуреного руху стратифікованого середовища має місце аналог інтеграла Бернуллі. Для цього зручно використати рівняння кількості руху в наближенні Бусинеска у формі Громека-Ламба:

$$-\rho_0(z) \vec{V} \times \text{rot} \vec{V} + \vec{g} \left( \rho - \frac{\vec{V}^2}{2g} \frac{d\rho_0}{dz} \right) + \text{grad} \left[ p + \frac{1}{2} \rho_0(z) \vec{V}^2 \right] = 0, \quad (18)$$

де  $\vec{V} = (U + u, w)$ .

Для плоских задач після введення функції течії  $\psi(x, z)$  лінеаризована система рівнянь (4) та (18) зводиться до вигляду

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial z} = -g\rho + \left( \frac{1}{2} U^2 + Uu \right) \frac{d\rho_0}{dz} + U\rho_0(z) \Delta \psi, \quad (20)$$

$$U \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{d\rho_0}{dz} \frac{\partial \psi}{\partial x} = 0,$$

де  $\Pi = p + \frac{1}{2} \rho_0(z) [(U + u)^2 + w^2]$ . Тут вираз для  $\Pi$  не лінеаризований по швидкості; як можна показати, в залежності від вибору контура інтегрування в виразах (16), (17) може бути необхідність використання його в загальній формі.

Справді, в малому околі центра вихроджерела справедливим є представлення

$$u(x, z) = \frac{-\Gamma(z - z_0) + Q(x - x_0)}{2\pi[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]} + \tilde{u}(x, z), \quad (21)$$

$$w(x, z) = \frac{\Gamma(x - x_0) + Q(z - z_0)}{2\pi[(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2]} + \tilde{w}(x, z), \quad (22)$$

де перші складові відповідають розв'язку для однорідного безмежного середовища. В даному околі вони можуть бути як завгодно великими

(при  $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} \rightarrow 0$ ). Саме характер представлення (21), (22) для випадків, коли контур інтегрування в (16), (17) береться у вигляді кола нескінченно малого радіуса навколо центра вихроджерела, і спонукає у виразах для  $\Pi(x, z)$  залишати складові другого порядку по  $u$  і  $w$ .

З рівняння (4), використовуючи умову  $\rho \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ , в результаті інтегрування по  $x$  маємо:

$$\rho = \frac{1}{U} \frac{d\rho_0}{dz} \psi. \quad (23)$$

З іншого боку, відповідно до результату роботи [11], в лінійних задачах стратифікованої рідини для  $\psi(x, z)$  має місце рівняння руху (7) з нульовою правою частиною в усій області, окрім точки – центра вихроджерела. Тоді з рівняння (7) виходить:

$$\Delta\psi = \frac{N^2}{g} \frac{\partial\psi}{\partial z} - \frac{N^2}{U^2} \psi. \quad (24)$$

Підстановка (23), (24) у рівняння (20) дає

$$\frac{\partial\Pi}{\partial z} = \frac{1}{2} U^2 \frac{d\rho_0}{dz}. \quad (25)$$

Враховуючи, що  $\Pi \rightarrow \frac{1}{2} U^2 \rho_0$  при  $x \rightarrow -\infty$ , з (19) і (25) випливає, що в усій області збуреного середовища виконується співвідношення

$$\Pi(x, z) = \frac{1}{2} U^2 \rho_0(z),$$

що і є аналогом інтеграла Бернуллі для однорідного баротропного середовища. На відміну від класичного інтеграла Бернуллі, який має місце вздовж лінії течії, цей інтеграл виконується для довільних  $x$  при фіксованому  $z$ . З нього випливає такий зв'язок між збуреними тиском і швидкістю:

$$p = -\rho_0(z) \left[ Uu + \frac{1}{2} (u^2 + w^2) \right]. \quad (26)$$

На підставі (16), (17) та (26) мають місце такі загальні вирази для  $X$  і  $Z$ :

$$\begin{aligned} X &= -U \oint_c \rho_0(z) (u \cos \theta + w \sin \theta) ds - \\ &\quad - U \oint_c \rho (2u \cos \theta + w \sin \theta) ds - \\ &\quad - \oint_c \rho_0(z) \left[ \frac{1}{2} (u^2 - w^2) \cos \theta + uw \sin \theta \right] ds, \quad (27) \\ Z &= U \oint_c \rho_0(z) (u \sin \theta - w \cos \theta) ds - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &-U \oint_c \rho w \cos \theta ds + \\ &+ \oint_c \rho_0(z) \left[ \frac{1}{2} (u^2 - w^2) \sin \theta - uw \cos \theta \right] ds. \quad (28) \end{aligned}$$

Якщо контур інтегрування вибрати у вигляді кола нескінченно малого радіуса, то другі складові у (27), (28) прямують до нуля в силу того, що там  $\rho \rightarrow 0$ , при тому, що циркуляція швидкості по цьому контуру скінченна. Тоді складові  $X$  та  $Z$  визначаються з виразів (27) та (28), в яких відсутні другі складові.

### 3. АЛЬТЕРНАТИВНИЙ МЕТОД ВИЗНАЧЕННЯ ХВИЛЬОВОГО ОПОРУ

Додаткову горизонтальну складову  $\Delta X_w$ , обумовлену генерацією внутрішніх хвиль (хвильовий опір) можна визначити в інший спосіб, якщо врахувати, що ця величина дорівнює величині енергії збуреного середовища, яка породжується рухомим вихроджерелом на одиниці шляху. Такий підхід застосовано раніше при визначенні хвильового опору, обумовленого рухомим джерелом маси [15].

Якщо помножити кожне з системи рівнянь (2)–(5) відповідно на  $u, w, -g\rho(d\rho_0/dz)^{-1}$  і  $p$  і потім додати їх ліві і праві частини, то результатом цього буде рівняння для енергії збуреного руху:

$$U \frac{\partial E}{\partial x} + \text{div}(p\vec{v}) = (\rho_0 U \Gamma w + Qp) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0), \quad (29)$$

де  $E = \frac{1}{2} \rho_0(z) (u^2 + w^2) - \frac{1}{2} g \rho^2 (d\rho_0/dz)^{-1}$  – енергія збуреного руху елементарного об'єму;  $\vec{v} = (u, w)$ . Для стійко стратифікованого середовища  $d\rho_0/dz$  скрізь від'ємне, отже,  $E$  завжди додатня величина.

Інтегрування рівняння (29) по довільному циліндричному об'єму  $\tau$  одиничної довжини, який містить вихроджерело, з врахуванням відомої рівності [16]

$$\int_{\tau} \text{div}(p\vec{v}) d\tau = \int_{\sigma} p_n \vec{n} d\sigma,$$

де  $p_n = \vec{n}p$ , а  $\vec{n}$  – зовнішня нормаль до поверхні  $\sigma$  виділеного об'єму, дає співвідношення

$$\begin{aligned} &U \int_{\tau} \frac{\partial E}{\partial x} d\tau + \int_{\sigma} p_n \vec{n} d\sigma = \\ &= \rho_{00} U \Gamma \int_{\tau} w \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) d\tau + \end{aligned}$$

$$+Q \int_{\tau} p \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) d\tau.$$

Але при стаціонарному русі  $\frac{\partial E}{\partial x} = 0$ . Тоді у відповідності до рівняння збереження енергії потік енергії через оточуючу вихроджерело поверхню дорівнює витратам енергії в одиницю часу, а витрати енергії на одиницю шляху визначають хвильовий опір. Отже

$$\Delta X_w = \int_{\tau} \left( \rho_{00} \Gamma w + \frac{Qp}{U} \right) \delta(x - x_0) \delta(z - z_0) d\tau. \quad (30)$$

У розглянутій двовимірній задачі інтегрування по об'єму зводиться до інтегрування по площі області, яка оточує вихроджерело. Важливо відмітити, що тиск  $p$  у рівнянні (30) представлений у лінійному наближенні, що впливає з постановки задачі.

#### 4. ПРИКЛАДИ ВИЗНАЧЕННЯ ГІДРОДИНАМІЧНИХ СИЛ

##### 4.1. Рух вихроджерела біля границі розділу середовищ різної густини

Ця класична задача розв'язана в [4], а в роботі [17] найбільш повно досліджена динаміка реакції середовища на вихроджерело, що рухається як нижче, так і вище границі розділу середовищ. Для ілюстрації ефективності запропонованого тут підходу до розв'язання розглянутого класу задач ця задача розглянута в якості тестової.

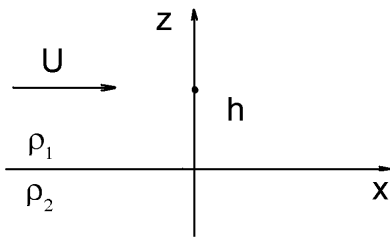


Рис. 1. Схема руху вихроджерела біля стрибка густини

Нехай вихроджерело знаходиться вище границі розділу середовищ на віддалі  $h$  від нижнього шару і на нього набігає потік зі швидкістю  $U$ . Схема руху набігаючого потоку та вибрана система координат з початком, що знаходиться на границі розділу і віссю  $z$ , що проходить через центр вихроджерела, наведено на рис. 1. Густина верхнього шару  $\rho_1$ , а

нижнього  $\rho_2$ , при цьому  $\kappa = \rho_2/\rho_1 \geq 1$ . Якщо позначити збурену функцію течії у верхньому шарі як  $\psi_1$ , а в нижньому – як  $\psi_2$ , то для їх знаходження необхідно розв'язати задачу

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi_1 = -\Gamma \delta'(x) \delta(z - h) - Q \delta(x) \delta'(z - h), \quad (31)$$

$$\Delta \psi_2 = 0 \quad (32)$$

з граничними умовами, що випливають з співвідношень (11), (12) при  $i = 1$  та (14)–(15).

Розв'язок задачі знаходиться у вигляді ( $i = 1, 2$ ) інтегрального перетворення Фур'є:

$$\psi_i = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \bar{\psi}_{i1} dk + \frac{Q}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \bar{\psi}_{i2} dk. \quad (33)$$

Для знаходження  $\bar{\psi}_{ij}(k, z)$  необхідно розв'язати систему рівнянь ( $j = 1, 2$ )

$$\bar{\psi}_{11}'' - k^2 \bar{\psi}_{11} = -\delta(z - h), \quad (34)$$

$$\bar{\psi}_{21}'' - k^2 \bar{\psi}_{21} = 0, \quad (35)$$

$$\bar{\psi}_{12}'' - k^2 \bar{\psi}_{12} = \frac{i}{k} \delta'(z - h), \quad (36)$$

$$\bar{\psi}_{22}'' - k^2 \bar{\psi}_{22} = 0 \quad (37)$$

з граничними умовами при  $z = 0$

$$\bar{\psi}_{i1} = \bar{\psi}_{i2}, \quad (38)$$

$$U^2 \bar{\psi}'_{i1} - g \bar{\psi}_{i1} = \kappa (U^2 \bar{\psi}'_{i2} - g \bar{\psi}_{i2}), \quad (39)$$

та на нескінченості

$$\bar{\psi}_{i1} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow +\infty, \quad (40)$$

$$\bar{\psi}_{i2} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad z \rightarrow -\infty. \quad (41)$$

Розв'язок даної задачі дає такі представлення для  $\bar{\psi}_{ij}$

$$\bar{\psi}_{11} = C_1 e^{-|k|z} + \bar{\psi}_{1*},$$

$$\bar{\psi}_{1*} = \frac{H(h - z)}{2|k|} \left[ e^{|k|(z-h)} - e^{-|k|(z-h)} \right],$$

$$\bar{\psi}_{21} = C_2 e^{|k|z},$$

$$\bar{\psi}_{12} = iC_1 \frac{|k|}{k} e^{-|k|z} + \bar{\psi}_{2*},$$

$$\bar{\psi}_{2*} = \frac{iH(h - z)}{2k} \left[ e^{|k|(z-h)} + e^{-|k|(z-h)} \right],$$

$$\bar{\psi}_{22} = C_3 e^{|k|z},$$

де  $H(h-z)$  – одинична функція Хевісайда;

$$C_1 = \frac{C_{11} + C_{12}}{2|k|[(\kappa + 1)U^2|k| - g(\kappa - 1)]};$$

$$C_{11} = g(\kappa - 1)(e^{|k|h} - e^{-|k|h});$$

$$C_{12} = -|k|U^2 [( \kappa + 1)e^{|k|h} - (\kappa - 1)e^{-|k|h}];$$

$$C_2 = C_1 - \frac{1}{2|k|} (e^{|k|h} - e^{-|k|h});$$

$$C_3 = i\frac{|k|}{k}C_1 - \frac{i}{2k} (e^{|k|h} + e^{-|k|h}).$$

Тоді з врахуванням парності  $\bar{\psi}_{i1}$  і, відповідно, непарності  $\bar{\psi}_{i2}$  по  $k$ , для  $\psi_i(x, z)$  мають місце представлення

1. Для  $\psi_1(x, z)$  в області  $z > 0$   
а) в області  $z > h$

$$\psi_1(x, z) = -\frac{\kappa - 1}{2\pi}\psi_{11} + \frac{1}{2\pi}\psi_{12}, \quad (42)$$

$$\psi_{11} = \text{Re} \int_0^\infty \frac{(\Gamma - iQ)(U^2k - g)e^{-k(z+h)+ikx}}{k[(\kappa + 1)U^2k - g(\kappa - 1)]} dk,$$

$$\psi_{12} = \text{Re} \int_0^\infty \frac{\Gamma + iQ}{k} e^{-k(z-h)+ikx} dk,$$

б) в області  $0 \leq z < h$

$$\psi_1(x, z) = \psi_{11} + \frac{1}{2\pi}\psi_{13}, \quad (43)$$

$$\psi_{13} = \text{Re} \int_0^\infty \frac{\Gamma - iQ}{k} e^{k(z-h)+ikx} dk.$$

2. Для  $\psi_2(x, z)$  в області  $z < 0$

$$\psi_2(x, z) = -\frac{U^2}{\pi} \text{Re} \int_0^\infty \frac{(\Gamma - iQ)e^{k(z-h)+ikx}}{[(\kappa + 1)U^2k - g(\kappa - 1)]} dk. \quad (44)$$

Розв'язок (42)–(44) не задовольняє умові затухання (14). Щоб її виконати, необхідно визначити асимптотику розв'язку (42)–(44) при  $x \rightarrow -\infty$  і відповідно відняти їх від цих розв'язків. Відмічену асимптотику складають незатухаючі внутрішні хвилі, які, як видно з підінтегральних виразів  $\psi_i$ , відповідають наявності там простого полюса  $k_{\text{п}}$  в комплексній  $k$ -площині, де

$$k_{\text{п}} = \frac{g(\kappa - 1)}{U^2(\kappa + 1)}. \quad (45)$$

Обхід знизу полюсів (45) при інтегруванні у  $k$ -площині в виразах (42)–(44) дає в області  $x < 0$  при  $x \rightarrow -\infty$ :

$$\psi_1 \rightarrow -\text{Re} \left[ \frac{i}{\kappa + 1} e^{-k_{\text{п}}(z+h)} (\Gamma - iQ) e^{i\kappa_{\text{п}}x} \right],$$

$$\psi_2 \rightarrow -\text{Re} \left[ \frac{i}{\kappa + 1} e^{-k_{\text{п}}(z-h)} (\Gamma - iQ) e^{i\kappa_{\text{п}}x} \right].$$

Віднімаючи ці складові від  $\psi_1(x, z)$  і  $\psi_2(x, z)$  для всіх  $x$  та враховуючи наявність відомих інтегральних представлень [18]

$$\int_0^\infty e^{-bk} \sin(ak) dk = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^\infty e^{-bk} \cos(ak) dk = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

для компонент збуреної швидкості можна отримати такий фізичний розв'язок:

а) у верхньому шарі в єдиній формі

$$u_1 = u_0 + \frac{k_{\text{п}}A_1}{\kappa + 1} e^{-k_{\text{п}}(z+h)} + \frac{\kappa - 1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{A_2(U^2k - g)e^{-k(z+h)}}{(\kappa + 1)U^2k - g(\kappa - 1)} dk, \quad (46)$$

$$w_1 = w_0 + \frac{k_{\text{п}}A_2}{\kappa + 1} e^{-k_{\text{п}}(z+h)} -$$

$$-\frac{\kappa - 1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{A_1(U^2k - g)e^{-k(z+h)}}{(\kappa + 1)U^2k - g(\kappa - 1)} dk, \quad (47)$$

де

$$u_0 = \frac{-\Gamma(z-h) + Qx}{2\pi [x^2 + (z-h)^2]},$$

$$w_0 = \frac{\Gamma x + Q(z-h)}{2\pi [x^2 + (z-h)^2]},$$

$$A_1 = \Gamma \sin(kx) - Q \cos(kx),$$

$$A_2 = \Gamma \cos(kx) + Q \sin(kx)$$

відповідають розв'язку задачі для руху вихрових джерел у безмежному однорідному середовищі;

б) у нижньому шарі

$$u_2 = -\frac{k_{\text{п}}A_1}{\kappa + 1} e^{k_{\text{п}}(z-h)} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{U^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_2 k e^{k(z-h)}}{(\kappa+1)U^2 k - g(\kappa-1)} dk, \\
 & w_2 = -\frac{k_{\Pi} A_2}{\kappa+1} e^{k_{\Pi}(z-h)} + \\
 & + \frac{U^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{A_1 k e^{k(z-h)}}{(\kappa+1)U^2 k - g(\kappa-1)} dk.
 \end{aligned}$$

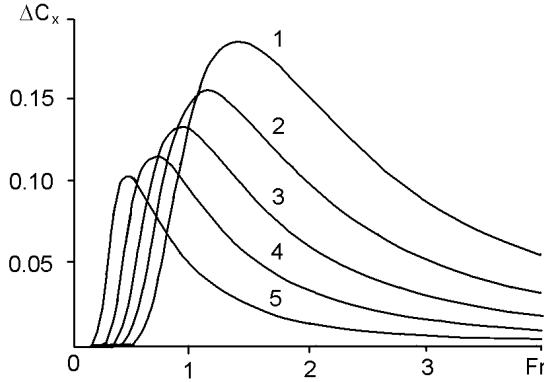


Рис. 2. Залежність хвильового опору від числа Фруда [17]

Для обчислення складових гідродинамічної сили, що діє з боку середовища на вихроджерело, в якості контура інтегрування навколо вихроджерела в (46), (47) використовується коло нескінченно малого радіуса, центр якого співпадає з центром вихроджерела. На такому контурі  $\rho \rightarrow 0$  і другі складові в (27), (28) прямують до нуля. Враховуючи, що має місце представлення

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{\infty} \frac{(kU^2 - g)e^{-2kh}}{(\kappa-1)^2 k - g(\kappa-1)} dk = \frac{1}{2h(\kappa+1)} - \\
 & - \frac{2g}{\kappa+1} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2kh}}{(\kappa-1)U^2 k - g(\kappa-1)} dk,
 \end{aligned}$$

використання у (27), (28) виразів (46), (47) при  $x \rightarrow 0, z \rightarrow 0$  дає такі результати для  $X$  і  $Z$ :

$$X = -\rho_1 U Q + \Delta X_w, \quad (48)$$

$$Z = -\rho_1 U \Gamma + \Delta Z_w, \quad (49)$$

де

$$\Delta X_w = \frac{\rho_1 k_{\Pi}}{\kappa+1} (\Gamma^2 + Q^2) e^{-2k_{\Pi} h}, \quad (50)$$

$$\Delta Z_w = -\frac{\rho_1 (\kappa-1)}{\pi(\kappa+1)} (\Gamma^2 + Q^2) B_{z1},$$

$$B_{z1} = \frac{1}{4h} - \frac{g}{U^2(\kappa+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2kh}}{k - k_{\Pi}} dk.$$

Складові  $\Delta X_w$  і  $\Delta Z_w$  характеризують вплив стратифікації ( $\kappa \neq 1$ ), яка обумовлює додаткову поздовжню складову  $\Delta X_w$  (хвильовий опір) та зміну підйомної сили на величину  $\Delta Z_w$ . Результати (48), (49) повністю співпадають з відповідними результатами роботи [17], в якій ця задача розв'язувалась методом [12].

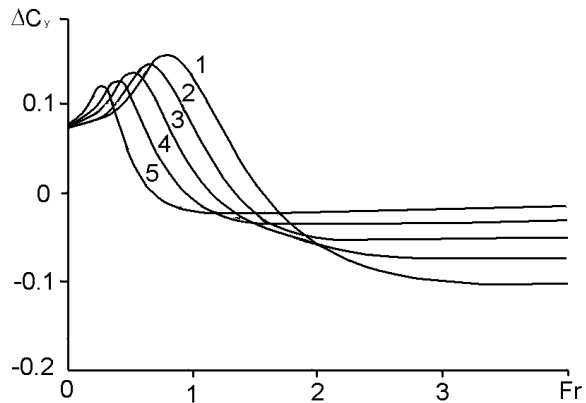


Рис. 3. Залежність додаткової підйомної сили від числа Фруда [17]

Якщо вихроджерело рухається в нижньому шарі на віддалі  $h$  від границі розділу, то аналогічним шляхом знаходиться розв'язок для поля швидкості і відповідно вираховуються гідродинамічні сили, в результаті чого для  $X$  і  $Z$  мають місце вирази [17]:

$$X = -\rho_2 U Q + \Delta X_w, \quad (51)$$

$$Z = -\rho_2 U \Gamma + \Delta Z_w, \quad (52)$$

$$\Delta X_w = \frac{\rho_1 \kappa k_{\Pi}}{\kappa+1} (\Gamma^2 + Q^2) e^{-2k_{\Pi} h}, \quad (53)$$

$$\Delta Z_w = -\frac{\rho_2 \kappa (\kappa-1)}{\pi(\kappa+1)} (\Gamma^2 + Q^2) B_{z2},$$

$$B_{z2} = \frac{1}{4h} + \frac{g}{U^2(\kappa+1)} \int_0^{\infty} \frac{e^{-2kh}}{k - k_{\Pi}} dk.$$

Перші складові виразів для  $X$  і  $Z$  відповідають розв'язку при русі вихроджерела у безмежному однорідному середовищі. Величини  $\Delta X_w$  і  $\Delta Z_w$  характеризуються безрозмірними параметрами  $\kappa$



і числом Фруда  $Fr = U/\sqrt{gh}$ . Для випадку руху вихроджерела нижче лінії розділу середовищ на рис. 2 і 3 наведені залежності величин

$$\Delta C_x = \frac{\Delta X_w h}{\rho_2(\Gamma^2 + Q^2)}; \quad \Delta C_z = \frac{\Delta Z_w h}{\rho_2(\Gamma^2 + Q^2)}$$

від  $Fr$  для різних значень  $\kappa$  [17]. На них криві 1 – 5 відповідають наступним значенням  $\kappa$ :  $\infty, 5, 2.5, 5/3, 1.25$ . Як видно, зі зростанням величини  $\kappa$  як  $\Delta C_x$ , так і  $\Delta C_z$  помітно змінюються. При цьому максимуми хвильового опору і зміни підйомної сили зміщуються в бік менших значень  $Fr$ . Отже, зміна величини  $\kappa$  може істотно вплинути на гідродинамічні характеристики вихроджерела.

#### 4.2. Рух вихроджерела в безмежному лінійно стратифікованому середовищі

Розглядається випадок спрощеного варіанту наближення Бусинеска, коли в рівняннях (2), (3) змінність  $\rho_0(z)$  враховується лише в члені з плавучістю. В цьому випадку для  $\psi(x, z)$  використовується рівняння (7). У випадку лінійного профілю стратифікації

$$\rho_0(z) = \rho_{00}(1 - \beta z)$$

частота Брента-Вайсяля  $N^2 = \beta g = \text{const}$ . Позначаючи  $\alpha = N/U$ , з (8) має місце рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi + \alpha^2 \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\Gamma \delta'(x - x_0) \delta(z - z_0) - Q \delta(x - x_0) \delta'(z - z_0), \quad (54)$$

яке розв'язується з граничними умовами (14), (15). Його розв'язок шукається у вигляді Фур'є-представлення

$$\psi(x, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} dk_1 \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} \bar{\psi}(k_1, k_2) dk_2. \quad (55)$$

З (54), (55) для функції-образу  $\bar{\psi}(k_1, k_2)$  отримується вираз

$$\bar{\psi} = \frac{k_1 \Gamma + k_2 Q}{k_1(k_1^2 + k_2^2 - \alpha^2)} = \bar{\psi}_1 + \bar{\psi}_2, \quad (56)$$

де перша складова відповідає задачі про рух вихора, а друга – задачі про рух джерела.

В силу лінійності задачі  $\psi(x, z)$  можна представити у вигляді суми

$$\psi(x, z) = \psi_\Gamma(x, z) + \psi_Q(x, z).$$

Складова  $\psi_\Gamma(x, z)$  відповідає збуренням від руху точкового вихора. Ров'язок для неї відомий [10, 11]

$$\psi_\Gamma(x, z) = \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\cos(kz)}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} e^{-|x|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk - \frac{\Gamma H(x)}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(x\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \cos(kz) dk, \quad (57)$$

де  $H(x)$  – одинична функція Хевісайда.

Подібно до розв'язку для  $\psi_\Gamma(x, z)$  в [11] знаходиться розв'язок для  $\psi_Q(x, z)$ . Підінтегральна функція  $\bar{\psi}_Q$  має вигляд

$$\bar{\psi}_Q = \frac{k_2 Q}{k_1(k_1^2 + k_2^2 - \alpha^2)}$$

з простими полюсами в комплексній  $k_2$ -площині

$$k_{21} = \sqrt{\alpha^2 - k_1^2}, \quad k_{22} = -\sqrt{\alpha^2 - k_1^2},$$

причому при  $|k_1| \leq \alpha$  ці полюси розташовані на дійсній осі  $k_2$ -площини, а при  $|k_1| \geq \alpha$  – відповідно на уявній осі.

Застосування апарату теорії лишків стосовно  $\bar{\psi}_Q$ , яка задовольняє умовам леми Жордана, приводить до такого розв'язку для  $\psi_Q(x, z)$ , який задовольняє необхідним граничним умовам:

$$\psi_Q(x, z) = -\frac{QS(z)}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} e^{-|z|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk - \frac{QH(x)S(z)}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{\sin(kx) \cos(z\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{k} dk, \quad (58)$$

де  $S(z)$  – знакова функція  $z$ .

На підставі розв'язків (57), (58) поле швидкості, викликане рухом вихроджерела, описується наступними виразами:

$$u(x, z) = u_\Gamma + u_Q, \quad (59)$$

$$u_\Gamma = \frac{\Gamma H(x)}{\pi} \int_0^{\alpha} \frac{k \sin(x\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{\sqrt{\alpha^2 - k^2}} \sin(kz) dk - \frac{\Gamma}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{k \sin(kz)}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} e^{-|x|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk, \\ u_Q = \frac{Q}{\pi} [H(x)S(z)u_{Q1} + u_{Q2}],$$

$$u_{Q1} = \int_0^{\alpha} \frac{\sqrt{\alpha^2 - k^2} \sin(kx) \sin(z\sqrt{\alpha^2 - k^2})}{k} dk,$$

$$u_{Q2} = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \alpha^2} \sin(kx)}{k} e^{-|z|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk,$$

$$w(x, z) = w_{\Gamma} + w_{Q}, \quad (60)$$

$$w_{\Gamma} = \frac{\Gamma H(x)}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos(x\sqrt{\alpha^2 - k^2}) \cos(kz) dk +$$

$$+ \frac{\Gamma S(x)}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \cos(kz) e^{-|x|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk,$$

$$w_Q = \frac{QH(x)S(z)}{\pi} \int_0^{\alpha} \cos(kx) \cos(z\sqrt{\alpha^2 - k^2}) dk +$$

$$+ \frac{QS(xz)}{2\pi} \int_{\alpha}^{\infty} \cos(kx) e^{-|z|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk.$$

Для визначення складових гідродинамічної сили  $X$  і  $Z$ , що діють на вихроджерело, як і в попередньому випадку, в якості контура інтегрування вибирається коло нескінченно малого радіуса з центром, що співпадає з центром вихроджерела. В околі цього центра (при  $x, z \rightarrow 0$ ) можна отримати оцінки інтегралів у виразах (59), (60).

Якщо в інтегралі

$$J_1 = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{k \sin(kz)}{\sqrt{k^2 - \alpha^2}} e^{-|x|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk$$

зробити заміну змінної  $k_1 = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ , то він набуває вигляду

$$J_1 = \int_{\alpha}^{\infty} \sin(z\sqrt{k_1^2 + \alpha^2}) e^{-|x|k_1} dk_1.$$

Якщо ввести велике значення  $k_* \gg \alpha$ , то

$$J_1 = \int_0^{k_*} \sin(z\sqrt{k_1^2 + \alpha^2}) e^{-|x|k_1} dk_1 +$$

$$+ \int_0^{\infty} \sin(k_1 z) e^{-|x|k_1} dk_1 - \int_0^{k_*} \sin(k_1 z) e^{-|x|k_1} dk_1.$$

При  $x, z \rightarrow 0$  (при цьому  $x \neq 0, z \neq 0$ ) перша і третя складові в правій частині виразу  $J_1$  як завжди малі, а друга складова визначається в [18].

Відповідно до цього в околі центра вихроджерела з точністю до нескінченно малих:

$$J_1 = \frac{z}{x^2 + z^2}.$$

Аналогічно можна показати, що в малому околі центра вихроджерела:

$$J_2 = \int_{\alpha}^{\infty} \frac{\sqrt{k^2 - \alpha^2} \sin(kx)}{k} e^{-|z|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk = \frac{x}{x^2 + z^2},$$

$$J_3 = \int_{\alpha}^{\infty} \cos(kz) e^{-|x|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk = \frac{x}{x^2 + z^2} - \alpha,$$

$$J_4 = \int_{\alpha}^{\infty} \cos(kx) e^{-|z|\sqrt{k^2 - \alpha^2}} dk = \frac{z}{x^2 + z^2} - \alpha,$$

$$J_5 = \int_{\alpha}^{\infty} \cos(kz) \cos(x\sqrt{\alpha^2 - k^2}) dk = \alpha,$$

$$J_6 = \int_{\alpha}^{\infty} \cos(kx) \cos(z\sqrt{\alpha^2 - k^2}) dk = \alpha.$$

Інші складові у виразах (59), (60) є нескінченно малими. В результаті для  $u(x, z)$  і  $w(x, z)$  в околі центра вихроджерела мають місце представлення

$$u(x, z) = \frac{-\Gamma z + Qx}{2\pi(x^2 + z^2)}, \quad (61)$$

$$w(x, z) = \frac{\Gamma x + Qz}{2\pi(x^2 + z^2)} + \frac{\alpha}{2\pi} [\Gamma + QS(xz)]. \quad (62)$$

Підстановка  $u$  і  $w$  з виразів (60), (61) у (27), (28) для складових  $X$  і  $Z$  дає наступний результат:

$$X = -\rho_{00} U Q + \Delta X_w, \quad \Delta X_w = \frac{1}{2\pi} \rho_{00} \Gamma^2 \alpha, \quad (63)$$

$$Z = -\rho_{00} U \Gamma + \Delta Z_w, \quad \Delta Z_w = \frac{\rho_{00} \Gamma Q \alpha}{4\pi} \left( \frac{3}{2} - \frac{1}{\pi} \right). \quad (64)$$

Як видно з (63), (64), для лінійного профілю густини хвильовий опір визначається лише інтенсивністю вихора, а додаткова підйомна сила має місце лише при одночасній відмінності від нуля  $\Gamma$  і  $Q$ .

В реальних водних і повітряних середовищах величини  $\Delta X_w$  і  $\Delta Z_w$  дають незначний вклад у величини  $X$  і  $Z$  відповідно, оскільки величина  $N$  становить величину порядку  $10^{-2} - 10^{-5}$  і при  $U$  порядку метрів у секунду величина  $\alpha \sim 10^{-2} - 10^{-5} \text{ м}^{-1}$ . Так, якщо покласти для морської води  $\rho_{00} \approx 1003 \text{ кг/м}^3$ ,  $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , то для  $Q = \Gamma = 1 \text{ м}^2/\text{с}$ ,  $U = 1 \text{ м/с}$  величина  $\Delta X_w \approx 1.59 \text{ Н/м}$ ,

$\Delta Z_w \approx 0.94 \text{ Н/м}$ , а  $X = -1003 \text{ Н/м} + 1.59 \text{ Н/м} = -1001.41 \text{ Н/м}$  і  $Z = -1003 \text{ Н/м} + 0.94 \text{ Н/м} = -1002.06 \text{ Н/м}$ . Однак, в середовищах з сильною стратифікацією відносний вклад величин  $\Delta X_w$  і  $\Delta Z_w$  може помітно зрости, особливо для процесів з великими значеннями  $\Gamma$  і  $Q$  і малими значеннями швидкості руху.

Неважко переконатись, що використання розв'язків для  $w(x, t)$  і  $p(x, z) = \rho_{00} U u(x, z)$  в рівнянні (30) дозволяє одержати вирази для  $\Delta X$ , які співпадають з (50) і (63). Справді, з (30) випливає, що

$$\Delta X_w = \rho_{00} [\Gamma w(x_0, z_0) - Qu(x_0, z_0)] \quad (65)$$

для функцій  $u(x, z)$  і  $w(x, z)$ , які не мають особливості в точці  $x_0, z_0$ . Однак для точкового вихроджерела ця точка є особливою, оскільки тут компоненти швидкості мають представлення (21), (22). Цю особливість, однак, можна усунути. В полярній системі координат  $r, \theta$  такій, що  $x - x_0 = r \cos \theta$ ,  $z - z_0 = r \sin \theta$ , при використанні рівняння (30) з перерізом  $\tau$  у вигляді круга з радіусом  $r$ , має місце представлення ( $r_*$  як завжди мале, але  $> 0$ ):

$$J_{10} = \int_{\tau} \frac{(x - x_0)\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx dz = \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r}\right) \int_0^{2\pi} \cos \theta \delta(\cos \theta) \delta(\sin \theta) d\theta, \quad (66)$$

$$J_{20} = \int_{\tau} \frac{(z - z_0)\delta(x - x_0)\delta(z - z_0)}{(x - x_0)^2 + (z - z_0)^2} dx dz = \left(\frac{1}{r_*} - \frac{1}{r}\right) \int_0^{2\pi} \sin \theta \delta(\cos \theta) \delta(\sin \theta) d\theta. \quad (67)$$

Але, в силу відомих співвідношень для дельта-функцій [19]

$$\delta(\sin \theta) = \delta(\theta) + \delta(\theta - \pi),$$

$$\delta(\cos \theta) = \delta\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) + \delta\left(\theta - \frac{3\pi}{2}\right)$$

випливає, що при  $r \rightarrow 0$  (але  $r > r_*$ )

$$J_{10} = 0, \quad J_{20} = 0.$$

Отже, для визначення  $\Delta X_w$  при русі вихроджерела можна використовувати вираз (65) з врахуванням того, що вклад від  $J_{10}$  і  $J_{20}$  нульовий. Підстановка розв'язків для  $u_1(x, z)$  і  $w_1(x, z)$  з (46), (47) або  $u(x, z)$  і  $w(x, z)$  з (61), (62) у (65) з врахуванням (66), (67) дає результати для  $\Delta X_w$ , які співпадають, відповідно, з розв'язками (50) і (63).

## ЗАКЛЮЧЕННЯ

Результати роботи [11] дозволяють ставити задачу про збурене гідродинамічне поле, викликане стаціонарним рухом плоских точкових вихорів у стійко стратифікованому середовищі з довільним розподілом стратифікації. Виконані в даній роботі дослідження узагальнюють ці результати на випадок руху вихроджерела, що представляє прямий інтерес при вивченні руху плоских профілів (крил). При цьому розглянута одна з головних проблем вивчення такого руху – визначення гідродинамічних сил, що діють на такі тіла. Як випливає з виконаних досліджень, у лінійному наближенні для стаціонарного руху стратифікованого середовища має місце аналог інтеграла Бернуллі, який явно зв'яже величину збуреного тиску зі збуреною швидкістю тим самим виразом, що і для однорідного середовища з заміною в ньому сталої густини на локальне значення густини, відповідне незбуреному профілю. Цей результат дозволяє виразити величину гідродинамічної сили, що діє на вихроджерело, як і в однорідній рідині, через збурену швидкість середовища.

Розроблено ефективний альтернативний метод визначення додаткової горизонтальної складової гідродинамічного опору (хвильового опору, обумовленого стратифікацією), який простіший від методу, що використовує інтегрування вздовж контуру навколо вихроджерела. Ця складова є інтегральною характеристикою енергетики збурених внутрішніх хвиль за рухомим вихроджерелом.

Виконані дослідження дозволяють розглядати задачу визначення впливу стратифікації рідкого середовища на гідродинамічні характеристики рухомих плоских тіл. Наведені приклади показують, що цей вплив, в залежності від характеру стратифікації і режиму руху, може бути істотним.

1. Степаняц Ю.А., Стурова И.В., Теодорович Э. В. Линейная теория генерации поверхностных и внутренних волн // Итоги науки и техники, МЖГ, М.: ВИНТИ. – 1987. – 21. – С. 92-179.
2. Басин М.А., Шадрин.В.П. Гидро-аэродинамика крыла вблизи границы раздела сред.– Л.: Судостроение, 1980.– 304 с.
3. Кочин Н.Е. О волновом сопротивлении и подъемной силе погруженного в жидкость тела: Собр. соч.– М.– Л.: Из-во АН СССР, 1949.– Т.2.– 105-182 с.
4. Кочин Н.Е. О влиянии рельефа земли на волны на поверхности раздела двух масс жидкости разной плотности (статья 2).- Собр. соч.– М.: Из-во АН СССР, 1949.– Т. 1.– 467-477 с.
5. Тихонов А.Н. Плоская задача о движении крыла под свободной поверхностью тяжелой жидкости

- конечной глубины // Изв. АН СССР, ОТН.– 1940.– №4.– С. 57-78.
6. Хаскинд М.Д. О поступательном движении тел под свободной поверхностью тяжелой жидкости конечной глубины // ПММ.– 1945.– 9, Вып.1.– С. 67-78.
7. Войценья В.С. Плоская задача о поступательном движении тела под поверхностью раздела двух жидкостей // Тр.Новочеркасского политехн. ин-та.– 1959.– N 104.– С. 95-111.
8. Войценья В.С. О поступательном движении тела под поверхностью раздела двух жидкостей // Изв.вузов. Математика.– 1963.– N 2.– С. 20-30.
9. Горлов С.И. Решение линейных задач о равномерном движении вихреисточника в многослойной жидкости // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1995.– N 31.– С. 127-132.
10. Janowitz G.S. Line singularities in unbounded stratified fluid // J.Fluid Mech.– 1974.– 66, 3.– P. 455-464.
11. Стеценко О.Г. Лінійна задача про стаціонарний рух вихора у стратифікованому середовищі // ПГМ.– 2004.– 6(78), N 1.– С. 62-68.
12. Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика.– М.: Физматгиз, 1963, т.1.– 583 с.
13. Стеценко О.Г. Гідродинамічна сила, що діє на плоский вихор при його стаціонарному русі у стратифікованому середовищі // ДНАН України.– 2005.– N 18.– С. 56-62.
14. Повх И.Л. Техническая гидромеханика.– Л.: Машиностроение, 1969.– 524 с.
15. Городцов В.А., Теодорович Э.В. Плоская задача для внутренних волн, порождаемых движущимся сингулярным источником // МЖГ.– 1981.– 2.– С. 77-83.
16. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1979.– 736 с.
17. Горлов С.И. Линейная задача о движении вихреисточника вблизи границы раздела двух сред // ПМТФ.– 1997.– 38, N 2.– С. 68-72.
18. Прудников А.П., Брачков Ю.А., Маричев О.М. Интегралы и ряды.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1981.– 798 с.
19. Арсенин В.Я. Математическая физика. Основные уравнения и специальные функции.– М.: Наука, ГРФМЛ, 1966.– 367 с.