

Итерационные алгоритмы решения краевых задач теории малых упругопластических деформаций на основе смешанного метода конечных элементов

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Сформулирована смешанная проекционно-сеточная схема решения нелинейных краевых задач теории малых упругопластических деформаций относительно перемещений, деформаций и напряжений. Рассмотрены итерационные алгоритмы решения нелинейных уравнений смешанного метода. Представлены численные результаты решения двух модельных задач. Проведено сопоставление данных, полученных на основе классического и смешанного методов конечных элементов.

Ключевые слова: теория пластичности, метод конечных элементов, смешанная схема, аппроксимация, устойчивость, сходимости, точность, итерационные методы.

Обобщенная постановка краевой задачи. Пусть рассматриваемое тело занимает область $\Omega \subset R^3$ и имеет регулярную границу. Вектор-функции, описывающие перемещения точек тела u , будем рассматривать как элементы функционального множества U . Множество допустимых тензор-функций для напряжений σ и деформаций ε обозначим через X . Полагаем, что U и X – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot; \cdot)_U$ и $(\cdot; \cdot)_X$ соответственно. Обозначим через U^* – пространство, сопряженное к U , т.е. пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на U . Тогда обобщенная краевая задача теории малых упругопластических деформаций может быть сформулирована в виде нелинейного операторного уравнения

$$A(u) = \rho \quad \text{в } U^*, \quad u \in U, \quad (1)$$

где $A: U \rightarrow U^*$ – нелинейный оператор теории пластичности; $\rho \in U^*$ – линейный функционал, ассоциируемый с работой приложенных к телу нагрузок на возможных перемещениях $v \in U$. Оператор A определяется с помощью отображения

$$A(u): v \in U \rightarrow (\sigma(u), \varepsilon(v))_X = (D(Bu)Bu, Bv)_X = \langle A(u), v \rangle. \quad (2)$$

Здесь $\langle \cdot; \cdot \rangle$ – отношение двойственности на $U^* \times U$; B – непрерывный линейный дифференциальный оператор, действующий из пространства U в X , т.е. оператор вычисления малых деформаций по заданным перемещениям; D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями:

$$\eta, \mu \in X \rightarrow D(\bar{\varepsilon}(\eta))\mu = k_0\mu_S + 2G(\bar{\varepsilon}(\eta))\mu_D, \quad (3)$$

где k_0 – модуль объемной деформации; $G(\bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})/3\bar{\varepsilon}$ – секущий модуль сдвига; $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$ – интенсивности девиаторов напряжений и деформаций; μ_S, μ_D – шаровая и девиаторная составляющие произвольного тензора деформаций $\mu \in X$. При этом постулируется гипотеза о единой не зависящий от вида девиатора напряжений функциональной зависимости между интенсивностями напряжений и деформаций, которая характеризует диаграмму деформирования материала $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$ [1, 2].

Если функция $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$, описывающая кривую деформирования материала, удовлетворяет условиям

$$0 < g(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{3} \frac{d\bar{\sigma}}{d\bar{\varepsilon}} \leq \frac{\bar{\sigma}}{3\bar{\varepsilon}} = G(\bar{\varepsilon}) \leq G_0 < \infty, \quad (4)$$

то оператор $A: U \rightarrow U^*$ является непрерывно дифференцируемым по Фреше и производная $A'(v): U \rightarrow U^*$ положительно определена и ограничена при всех $v \in U$. При этом существуют два вещественных положительных числа m, M такие, что

$$\begin{aligned} \langle A(v) - A(w), v - w \rangle &\geq m \|v - w\|_U^2, \quad \forall v, w \in U; \\ \|A(v) - A(w)\|_{U^*} &\leq M \|v - w\|_U, \quad \forall v, w \in U. \end{aligned} \quad (5)$$

Неравенства (5) обеспечивают существование и единственность решения операторного уравнения (1), а также непрерывную зависимость решения от правой части, а именно от приложенных нагрузок [3, 4].

Представив обобщенную краевую задачу системой уравнений

$$\begin{cases} (\varepsilon, \eta)_X = (Bu, \eta)_X, & \forall \eta \in X; \\ (\sigma, \chi)_X = (D(\varepsilon)\varepsilon, \chi)_X, & \forall \chi \in X; \\ (\sigma, Bv)_X = \rho(v), & \forall v \in U, \end{cases} \quad (6)$$

получим обобщенную постановку краевой задачи деформационной теории пластичности относительно перемещений, деформаций и напряжений [5, 6].

Пусть задано семейство аппроксимирующих пространств $U_h \times X_h \times X_h$, удовлетворяющее включению $U_h \times X_h \times X_h \subset U \times X \times X$, где h – определяющий параметр семейства конечномерных подпространств, стремящийся в пределе к нулю. Тогда по аналогии с уравнениями (6) определим конечномерную задачу следующим образом.

Найти тройку $(u_h, \varepsilon_h, \sigma_h) \in U_h \times X_h \times X_h$ такую, что

$$\begin{cases} [\varepsilon_h, \eta_h]_X = (Bu_h, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\sigma_h, \chi_h]_X = [D(\varepsilon_h)\varepsilon_h, \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (\sigma_h, Bv_h)_X = \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h. \end{cases} \quad (7)$$

Обозначение $[\cdot;]_X$ следует понимать так, что для вычисления скалярного произведения $(\cdot; \cdot)_X$ применяется численное интегрирование, причем

$$\begin{aligned} [\eta_h, \bar{\tau}_h]_X &= (\eta_h, \bar{\tau}_h)_X, \quad \forall \eta_h \in X_h, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h; \\ [\bar{\eta}_h, \bar{\tau}_h]_X &= (\bar{\eta}_h, \bar{\tau}_h)_X, \quad \forall \bar{\eta}_h, \bar{\tau}_h \in Y_h. \end{aligned} \quad (8)$$

Система уравнений (7) определяет смешанную проекционно-сеточную постановку краевой задачи теории пластичности относительно перемещений, деформаций и напряжений [6].

Для формулировки условий устойчивости и сходимости решения дискретной задачи (7) введем в рассмотрение проектирующий оператор I_h , который ставит в соответствие каждому элементу из пространства Y_h его ортогональную проекцию в X_h . Оператор $I_h: Y_h \rightarrow X_h$, ассоциируемый со скалярным произведением $[\cdot;]_X$, определим из равенства

$$[\bar{\tau}_h - I_h \bar{\tau}_h, \eta_h]_X = 0, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \quad \forall \eta_h \in X_h. \quad (9)$$

Тогда элемент $I_h \bar{\tau}_h$ – суть ортогональная проекция $\bar{\tau}_h \in Y_h$ на пространство X_h , в котором введено скалярное произведение $[\cdot;]_X$, и, следовательно, для произвольного элемента $\bar{\tau}_h \in Y_h$ имеем

$$[\bar{\tau}_h - I_h \bar{\tau}_h]_X = \inf_{\eta_h \in X_h} [\bar{\tau}_h - \eta_h]_X. \quad (10)$$

С использованием ортопроектора $I_h: Y_h \rightarrow X_h$ систему уравнений (7) можно представить в форме одного нелинейного операторного уравнения относительно перемещений:

$$A_h(u_h) = \rho_h \quad \text{в } U_h^*, \quad u_h \in U_h, \quad (11)$$

где $A_h: U_h \rightarrow U_h^*$ – нелинейный оператор, определяемый с помощью отображения

$$\begin{aligned} A_h(u_h): v_h \in U_h &\rightarrow [\sigma_h(u_h), \varepsilon_h(v_h)]_X = \\ &= [D(I_h B u_h) I_h B u_h, I_h B v_h]_X = \langle A_h(u_h), v_h \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Условие устойчивости. Пусть для всякого h и любого $\bar{\tau}_h \in Y_h$ справедлива оценка

$$d \|\bar{\tau}_h\|_X \leq [I_h \bar{\tau}_h]_X, \quad \forall \bar{\tau}_h \in Y_h, \quad (13)$$

где d – постоянная, не зависящая от h . Тогда при любом h оператор $A_h: U_h \rightarrow U_h^*$ является сильномонотонным и липшиц-непрерывным, причем выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \langle A_h(v_h) - A_h(w_h), v_h - w_h \rangle &\geq md^2 \|v_h - w_h\|_U^2, & \forall v_h, w_h \in U_h; \\ \|A_h(v_h) - A_h(w_h)\|_{U^*} &\leq M \|v_h - w_h\|_U, & \forall v_h, w_h \in U_h. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, решение уравнения (7) существует и единственно, а также непрерывно зависит от правой части, т.е. от приложенных нагрузок $\rho \in U^*$ [6].

Итерационные алгоритмы решения нелинейных уравнений смешанного метода. Рассмотрим итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений (7), который можно трактовать как метод поправок:

$$\begin{cases} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_X = (Bu_h^k, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\sigma_h^k, \chi_h]_X = [D(\varepsilon_h^k)\varepsilon_h^k, \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ \langle \Lambda_h(u_h^k)\omega_h^k, v_h \rangle = (\sigma_h^k, Bv_h)_X - \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h; \\ u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha\omega_h^k, \end{cases} \quad (15)$$

где $\Lambda_h: U_h \rightarrow U_h^*$ – переобуславливающий оператор, в общем случае зависящий от $u_h^k \in U_h$; α – числовой параметр, вводимый для управления сходимостью процесса.

Сделаем несколько замечаний относительно свойств оператора Λ_h . Полагаем, что $v_h \rightarrow \Lambda_h(v_h)$ – симметричный коэрцитивный ограниченный оператор из U_h в U_h^* при всех $v_h \in U_h$, причем существуют два вещественных положительных числа γ_1, γ_2 такие, что

$$\gamma_1 \langle \Lambda_h(v_h)w_h, w_h \rangle \leq \langle A_h'(v_h)w_h, w_h \rangle \leq \gamma_2 \langle \Lambda_h(v_h)w_h, w_h \rangle, \quad (16)$$

$$\forall v_h, w_h \in U_h.$$

При рассмотрении сходимости последовательных приближений (15) представим итерационный процесс в форме одного операторного уравнения в U_h относительно перемещений. С этой целью запишем уравнение для поправки $\omega_h^k \in U_h$ в следующем виде:

$$\Lambda_h(u_h^k)\omega_h^k = A_h(u_h^k) - \rho_h \quad \text{в } U_h^*, \quad (17)$$

откуда с учетом свойств оператора Λ_h имеем

$$\omega_h^k = (\Lambda_h(u_h^k))^{-1}(A_h(u_h^k) - \rho_h). \quad (18)$$

Таким образом, получаем уравнение относительно перемещений:

$$u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha(\Lambda_h(u_h^k))^{-1}(A_h(u_h^k) - \rho_h). \quad (19)$$

В соответствии с (19) элемент $u_h \in U_h$ является неподвижной точкой оператора $\Gamma_\alpha: U_h \rightarrow U_h$, определяемого отображением

$$\Gamma_\alpha: v_h \in U_h \rightarrow \Gamma_\alpha(v_h) = v_h - \alpha(\Lambda_h(v_h))^{-1}(A_h(v_h) - \rho_h). \quad (20)$$

Тогда процесс последовательных приближений (19) соответствует методу простых итераций

$$u_h^{k+1} = \Gamma_\alpha(u_h^k), \quad k = 0, 1, \dots \quad (21)$$

для решения операторного уравнения

$$u_h = \Gamma_\alpha(u_h). \quad (22)$$

Пусть отображение $\Gamma_\alpha: U_h \rightarrow U_h$ имеет неподвижную точку $u_h \in U_h$ и дифференцируемо в ней. Кроме того, существует норма $\|\cdot\|$, эквивалентная основной норме пространства U , для которой выполняется условие

$$\|\Gamma'_\alpha(u_h)\| \leq q(\alpha) < 1. \quad (23)$$

Тогда, согласно теореме Островского [7], для произвольного, но достаточно близкого к $u_h \in U_h$ начального приближения $u_h^0 \in U_h$ последовательность $\{u_h^k\} \in U_h$, построенная с помощью рекуррентного соотношения (21), сходится к точке $u_h \in U_h$, причем скорость сходимости последовательных приближений характеризуется неравенством:

$$\|u_h^k - u_h\| \leq q^k(\alpha) \|u_h^0 - u_h\|. \quad (24)$$

Теорема 1. Пусть $A_h: U_h \rightarrow U_h^*$ – непрерывно дифференцируемое отображение, $v_h \rightarrow \Lambda_h(v_h)$ – симметричный коэрцитивный ограниченный оператор из U_h в U_h^* при всех $v_h \in U_h$. Кроме того, для произвольных $v_h, w_h \in U_h$ выполняются неравенства (16). Тогда при любом $\alpha \in (0, 2/\gamma_2)$ оператор $\Gamma_\alpha: U_h \rightarrow U_h$, определяемый соотношением (20), удовлетворяет условиям теоремы Островского.

◀ Отметим, что существование неподвижной точки оператора $v_h \rightarrow \Gamma_\alpha(v_h)$ обеспечено в силу существования единственного решения операторного уравнения (11). Учитывая, что по условию теоремы $A_h: U_h \rightarrow U_h^*$ – непрерывно дифференцируемое отображение, в соответствии с правилами дифференцирования сложных отображений [8] дифференциал Фреше оператора $\Gamma_\alpha: U_h \rightarrow U_h$ в точке $v_h \in U_h$ на приращении $w_h \in U_h$ имеет вид

$$\begin{aligned} w_h \in U_h \rightarrow d\Gamma_\alpha(v_h, w_h) &= \Gamma'_\alpha(v_h)w_h = w_h - \alpha(\Lambda_h(v_h))^{-1}A'_h(v_h)w_h + \\ &+ \alpha(\Lambda_h(v_h))^{-1}(A'_h(v_h)w_h)(\Lambda_h(v_h))^{-1}(A_h(v_h) - \rho_h). \end{aligned} \quad (25)$$

Поскольку $u_h \in U_h$ – неподвижная точка оператора $\Gamma_\alpha: U_h \rightarrow U_h$, находим

$$v_h \in U_h \rightarrow \Gamma'_\alpha(u_h)v_h = v_h - \alpha(\Lambda_h(u_h))^{-1}A'_h(u_h)v_h, \quad (26)$$

где $A'_h(u_h)v_h$ – дифференциал Фреше оператора A_h в точке $u_h \in U_h$ на приращении $v_h \in U_h$.

Согласно условию теоремы, $v_h \rightarrow \Lambda_h(v_h)$ – симметричный коэрцитивный ограниченный оператор из U_h в U_h^* при всех $v_h \in U_h$ и, следовательно, его можно использовать для построения скалярного произведения $(\cdot; \cdot)_{\Lambda_h(u_h)}$ и нормы $\|\cdot\|_{\Lambda_h(u_h)}$ в пространстве U_h :

$$\begin{aligned} (v_h, w_h)_{\Lambda_h(u_h)} &= \langle \Lambda_h(u_h)v_h, w_h \rangle, \quad \forall v_h, w_h \in U_h; \\ \|v_h\|_{\Lambda_h(u_h)} &= (v_h, v_h)_{\Lambda_h(u_h)}^{1/2}, \quad \forall v_h \in U_h. \end{aligned} \quad (27)$$

На основании неравенств (13), (14) устанавливаем, что нормы $\|\cdot\|_U$ и $\|\cdot\|_{\Lambda_h(u_h)}$ эквивалентны в пространстве U_h , причем константы эквивалентности не зависят от параметра h .

Поскольку для произвольных $v_h, w_h \in U_h$ выполняется соотношение

$$(\Gamma'_\alpha(u_h)v_h, w_h)_{\Lambda_h(u_h)} = \langle \Lambda_h(u_h)v_h, w_h \rangle - \alpha \langle A'_h(u_h)v_h, w_h \rangle, \quad (28)$$

приходим к равенству

$$(\Gamma'_\alpha(u_h)v_h, w_h)_{\Lambda_h(u_h)} = (v_h, \Gamma'_\alpha(u_h)w_h)_{\Lambda_h(u_h)}, \quad \forall v_h, w_h \in U_h, \quad (29)$$

откуда следует, что $\Gamma'_\alpha(u_h)$ – самосопряженный оператор в U_h относительно скалярного произведения $(\cdot; \cdot)_{\Lambda_h(u_h)}$, и, значит, его норма определяется выражением

$$\|\Gamma'_\alpha(u_h)\|_{\Lambda_h(u_h)} = \sup_{v_h \in U_h} \frac{|(\Gamma'_\alpha(u_h)v_h, v_h)_{\Lambda_h(u_h)}|}{\|v_h\|_{\Lambda_h(u_h)}^2}. \quad (30)$$

С использованием соотношений (27), (28) и (30) получаем

$$\|\Gamma'_\alpha(u_h)\|_{\Lambda_h(u_h)} = \sup_{v_h \in U_h} \left| 1 - \alpha \frac{\langle A'_h(u_h)v_h, v_h \rangle}{\langle \Lambda_h(u_h)v_h, v_h \rangle} \right|, \quad (31)$$

откуда с учетом неравенств (16) имеем

$$\|\Gamma'_\alpha(u_h)\|_{\Lambda_h(u_h)} \leq q(\alpha) = \max(|1 - \alpha\gamma_1|, |1 - \alpha\gamma_2|). \quad (32)$$

Таким образом, условие $q(\alpha) < 1$ будет выполняться только в том случае, если $\alpha \in (0, 2/\gamma_2)$. При этом справедлива оценка

$$\|u_h^k - u_h\|_U \leq \frac{1}{d} \sqrt{\frac{M \gamma_2}{m \gamma_1}} q^k(\alpha) \|u_h^0 - u_h\|_U. \quad (33)$$

Замечание 1. Оптимизация скорости сходимости итерационного процесса (15) сводится к решению экстремальной задачи:

$$q(\alpha_{opt}) = \min_{\alpha \in (0, 2/\gamma_2)} q(\alpha). \quad (34)$$

Оптимальное значение α_{opt} , минимизирующее $q(\alpha)$, является решением уравнения

$$1 - \alpha_{opt} \gamma_1 = \alpha_{opt} \gamma_2 - 1 \quad (35)$$

и вычисляется по формуле

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\gamma_1 + \gamma_2}. \quad (36)$$

При этом справедлива оптимальная оценка, характеризующая максимальную скорость сходимости итерационного процесса:

$$\|\Gamma'_{\alpha_{opt}}(u_h)\|_{\Lambda_h(u_h)} \leq q(\alpha_{opt}) = \frac{\gamma_2 - \gamma_1}{\gamma_2 + \gamma_1} < 1. \quad (37)$$

Рассмотрим некоторые варианты построения переобуславливающего оператора $\Lambda_h: U_h \rightarrow U_h^*$.

Замечание 2. Если оператор Λ_h определить по соотношению

$$w_h \rightarrow \langle \Lambda_h(u_h^k) v_h, w_h \rangle = [D(I_h B u_h^k) I_h B v_h, I_h B w_h]_X, \quad \forall v_h, w_h \in U_h, \quad (38)$$

то приходим к методу переменных параметров упругости [9] для решения нелинейных уравнений смешанного метода:

$$\begin{cases} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_X = (B u_h^k, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\sigma_h^k, \chi_h]_X = [D(\varepsilon_h^k) \varepsilon_h^k, \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ [D(\varepsilon_h^k) I_h B \omega_h^k, I_h B v_h]_X = (\sigma_h^k, B v_h)_X - \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h; \\ u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha \omega_h^k. \end{cases} \quad (39)$$

Постоянные γ_1, γ_2 задаются выражениями

$$\gamma_1 = \text{vrai min}_{x \in \Omega} \min_{\bar{\varepsilon}} \frac{\bar{g}(x, \bar{\varepsilon})}{G(x, \bar{\varepsilon})} > 0; \quad \gamma_2 = 1, \quad (40)$$

и, следовательно, получаем условие $\alpha \in (0,2)$, при котором $q(\alpha) < 1$, т.е. имеет место сходимость итерационного процесса (39).

Замечание 3. Более простой, по сравнению с (38), оператор $\Lambda_h: U_h \rightarrow U_h^*$ можно получить с помощью соотношения

$$w_h \rightarrow \langle \Lambda_h(u_h^k)v_h, w_h \rangle = [D(Bu_h^k)Bv_h, Bw_h]_X, \quad \forall v_h, w_h \in U_h. \quad (41)$$

что приводит к матрице переменной (секущей) жесткости для классических схем метода перемещений при решении упругопластической задачи.

С использованием оператора (41) итерационный процесс решения системы уравнений (7) строится в следующем виде:

$$\begin{cases} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_X = (Bu_h^k, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\sigma_h^k, \chi_h]_X = [D(\varepsilon_h^k)\varepsilon_h^k, \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (D(\varepsilon_h^k)B\omega_h^k, Bv_h)_X = (\sigma_h^k, Bv_h)_X - \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h; \\ u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha\omega_h^k. \end{cases} \quad (42)$$

Постоянные γ_1, γ_2 определяются выражениями

$$\gamma_1 = d \operatorname{vrai} \min_{x \in \Omega} \min_{\bar{\varepsilon}} \frac{\bar{g}(x, \bar{\varepsilon})}{G(x, \bar{\varepsilon})} > 0; \quad \gamma_2 = 1, \quad (43)$$

и, значит, условие $\alpha \in (0,2)$ обеспечивает сходимость итерационного процесса (42).

Рассмотрим итерационный процесс решения системы нелинейных уравнений (6), который можно трактовать как метод упругих решений [2]. В этом случае оператор $\Lambda_h: U_h \rightarrow U_h^*$ не зависит от текущего приближения $u_h^k \in U_h$, и процесс последовательных линейных приближений строится в виде итерационной процедуры:

$$\begin{cases} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_X = (Bu_h^k, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\sigma_h^k, \chi_h]_X = [D(\varepsilon_h^k)\varepsilon_h^k, \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ \langle \Lambda_h \omega_h^k, v_h \rangle = (\sigma_h^k, Bv_h)_X - \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h; \\ u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha\omega_h^k. \end{cases} \quad (44)$$

Полагаем, что Λ_h – симметричный коэрцитивный ограниченный оператор из U_h в U_h^* , причем существуют два вещественных положительных числа γ_{01}, γ_{02} такие, что справедливы неравенства

$$\gamma_{01} \langle \Lambda_h w_h, w_h \rangle \leq \langle A'_h(v_h)w_h, w_h \rangle \leq \gamma_{02} \langle \Lambda_h w_h, w_h \rangle, \quad \forall v_h, w_h \in U_h. \quad (45)$$

Тогда оператор $\Lambda_h: U_h \rightarrow U_h^*$ обладает ограниченным коэрцитивным обратным оператором $\Lambda_h^{-1}: U_h^* \rightarrow U_h$, и, следовательно, выражение для поправки $\omega_h^k \in U_h$ можно представить в виде

$$\omega_h^k = \Lambda_h^{-1}(A_h(u_h^k) - \rho_h) \quad \text{в } U_h. \quad (46)$$

Таким образом, приходим к уравнению в U_h относительно перемещений:

$$u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha \Lambda_h^{-1}(A_h(u_h^k) - \rho_h). \quad (47)$$

Для указанного метода удастся доказать сходимость глобально, т.е. не зависимо от выбора начального приближения $u_h^0 \in U_h$.

Теорема 2. Пусть $A_h: U_h \rightarrow U_h^*$ – непрерывно дифференцируемое отображение, Λ_h – линейный симметричный коэрцитивный ограниченный оператор из U_h в U_h^* . Кроме того, для произвольных $v_h, w_h \in U_h$ выполняются неравенства (44). Тогда при $\alpha \in (0, 2/\gamma_{02})$ итерационный процесс (44) сходится при любом начальном приближении $u_h^0 \in U_h$.

◀ Перейдем в (47) к уравнению ошибок $u_h^k - u_h \in U_h$ итерационного процесса:

$$u_h^{k+1} - u_h = u_h^k - u_h - \alpha \Lambda_h^{-1}(A_h(u_h^k) - A_h(u_h)), \quad (48)$$

откуда в соответствии с формулой конечных приращений следует

$$\|u_h^{k+1} - u_h\| \leq \sup_{v_h \in U_h} \|T'_\alpha(v_h)\| \|u_h^k - u_h\|, \quad (49)$$

где $T'_\alpha(v_h)$ – значение производной оператора

$$T_\alpha: v_h \in U_h \rightarrow T_\alpha(v_h) = v_h - \alpha \Lambda_h^{-1} A_h(v_h) \quad (50)$$

в точке $v_h \in U_h$.

Оператор $T'_\alpha(v_h)$ действует в пространстве U_h и определяется выражением

$$T'_\alpha: w_h \in U_h \rightarrow T'_\alpha(v_h)w_h = w_h - \alpha \Lambda_h^{-1} A'_h(v_h)w_h, \quad \forall v_h \in U_h. \quad (51)$$

По условию теоремы, Λ_h – симметричный коэрцитивный ограниченный оператор из U_h в U_h^* и, следовательно, его можно использовать для построения скалярного произведения $(\cdot; \cdot)_{\Lambda_h}$ и нормы $\|\cdot\|_{\Lambda_h}$ в пространстве U_h :

$$(v_h, w_h)_{\Lambda_h} = \langle \Lambda_h v_h, w_h \rangle, \quad \|v_h\|_{\Lambda_h} = (v_h, v_h)_{\Lambda_h}^{1/2}, \quad \forall v_h, w_h \in U_h. \quad (52)$$

Учитывая, что для произвольных $v_h, w_h, z_h \in U_h$ выполняется соотношение

$$(T'_\alpha(v_h)w_h, z_h)_{\Lambda_h} = \langle \Lambda_h w_h, z_h \rangle - \alpha \langle A'_h(v_h)w_h, z_h \rangle, \quad (53)$$

приходим к равенству

$$(T'_\alpha(v_h)w_h, z_h)_{\Lambda_h} = (w_h, T'_\alpha(v_h)z_h)_{\Lambda_h}, \quad \forall w_h, z_h \in U_h, \quad (54)$$

откуда следует, что $T'_\alpha(v_h)$ – самосопряженный оператор в U_h относительно метрики $(\cdot; \cdot)_{\Lambda_h}$, и, значит, его норма определяется выражением

$$\|T'_\alpha(v_h)\|_{\Lambda_h} = \sup_{w_h \in U_h} \frac{|(T'_\alpha(v_h)w_h, w_h)_{\Lambda_h}|}{\|w_h\|_{\Lambda_h}^2}, \quad \forall v_h \in U_h. \quad (55)$$

С использованием соотношений (52), (53) и (55) получаем

$$\|T'_\alpha(v_h)\|_{\Lambda_h} = \sup_{w_h \in U_h} \left| 1 - \alpha \frac{\langle A'_h(v_h)w_h, w_h \rangle}{\langle \Lambda_h w_h, w_h \rangle} \right|, \quad (56)$$

откуда с учетом неравенств (45) находим

$$\|T'_\alpha(v_h)\|_{\Lambda_h} \leq q(\alpha) = \max(|1 - \alpha\gamma_{01}|, |1 - \alpha\gamma_{02}|). \quad (57)$$

Таким образом, условие $q(\alpha) < 1$ будет выполняться только в том случае, если $\alpha \in (0, 2/\gamma_{02})$. При этом для произвольного начального приближения $u_h^0 \in U_h$ имеем оценку

$$\|u_h^k - u_h\|_U \leq \frac{1}{d} \sqrt{\frac{M \gamma_{02}}{m \gamma_{01}}} q^k(\alpha) \|u_h^0 - u_h\|_U. \quad (58)$$

Замечание 4. По аналогии с замечанием 1 получаем оптимальное значение α_{opt} , минимизирующее $q(\alpha)$:

$$\alpha_{opt} = \frac{2}{\gamma_{01} + \gamma_{02}}, \quad (59)$$

причем

$$\sup_{v_h \in U_h} \|T'_{\alpha_{opt}}(v_h)\|_{\Lambda_h} \leq q(\alpha_{opt}) = \frac{\gamma_{02} - \gamma_{01}}{\gamma_{02} + \gamma_{01}} < 1. \quad (60)$$

Замечание 5. Пусть D_0 – линейный оператор, соответствующий матрице модулей упругости материала. Тогда, если оператор $\Lambda_h: U_h \rightarrow U_h^*$ определить с помощью соотношения

$$w_h \rightarrow \langle \Lambda_h v_h, w_h \rangle = [D_0 I_h B v_h, I_h B w_h]_X, \quad \forall v_h, w_h \in U_h, \quad (61)$$

то приходим к методу упругих решений для уравнений (7):

$$\begin{cases} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_X = (B u_h^k, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\sigma_h^k, \chi_h]_X = [D(\varepsilon_h^k) \varepsilon_h^k, \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ [D_0 I_h B \omega_h^k, I_h B v_h]_X = (\sigma_h^k, B v_h)_X - \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h; \\ u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha \omega_h^k. \end{cases} \quad (62)$$

Постоянные γ_{01} , γ_{02} задаются выражениями

$$\gamma_{01} = \text{vrai min}_{x \in \Omega} \min_{\bar{\varepsilon}} \frac{\bar{g}(x, \bar{\varepsilon})}{G_0(x)} > 0; \quad \gamma_{02} = 1, \quad (63)$$

и, следовательно, условие $\alpha \in (0, 2)$ обеспечивает сходимость итерационного процесса (62) при любом начальном приближении $u_h^0 \in U_h$.

Замечание 6. Более простой по сравнению с (61) оператор $\Lambda_h: U_h \rightarrow U_h^*$ можно получить с помощью соотношения

$$w_h \rightarrow \langle \Lambda_h v_h, w_h \rangle = (D_0 B v_h, B w_h)_X, \quad \forall v_h, w_h \in U_h, \quad (64)$$

что приводит к матрице жесткости при решении линейной (чисто упругой) задачи.

С использованием оператора (64) итерационный процесс решения системы уравнений (7) строится в виде

$$\begin{cases} [\varepsilon_h^k, \eta_h]_X = (B u_h^k, \eta_h)_X, & \forall \eta_h \in X_h; \\ [\sigma_h^k, \chi_h]_X = [D(\varepsilon_h^k) \varepsilon_h^k, \chi_h]_X, & \forall \chi_h \in X_h; \\ (D_0 B \omega_h^k, B v_h)_X + (\sigma_h^k, B v_h)_X - \rho(v_h), & \forall v_h \in U_h; \\ u_h^{k+1} = u_h^k - \alpha \omega_h^k. \end{cases} \quad (65)$$

Постоянные γ_{01} , γ_{02} определяются по выражениям

$$\gamma_{01} = d \text{vrai min}_{x \in \Omega} \min_{\bar{\varepsilon}} \frac{\bar{g}(x, \bar{\varepsilon})}{G_0(x)} > 0; \quad \gamma_{02} = 1, \quad (66)$$

откуда следует условие $\alpha \in (0, 2)$, при котором имеет место сходимость итерационного процесса (65) для любого $u_h^0 \in U_h$.

Замечание 7. Согласно формулам (40), (43) и (63), (66) постоянные γ_1 , γ_2 и γ_{01} , γ_{02} не зависят от параметра h . Следовательно, количество требуемых итераций для последовательных приближений (39), (42) и (62),

(65) также не зависит от параметра h , и в этом смысле выбор переобуславливающего оператора Λ_h на основании соотношений (38), (41) и (61), (64) является оптимальным.

Замечание 8. Скорость сходимости последовательных приближений можно повысить благодаря переходу к многослойным схемам. Если в уравнениях (62), (65) для построения элемента $u_h^{k+1} \in U_h$ использовать линейную комбинацию вида

$$u_h^{k+1} = (1 + \beta)(u_h^k - \alpha \omega_h^k) - \beta u_h^{k-1}, \quad 0 \leq \beta < 1, \quad (67)$$

то приходим к трехслойному итерационному алгоритму. Эффективность применения трехслойной схемы обычно наблюдается при решении упруго-пластических задач с развитыми зонами пластических деформаций, в которых достигается существенное уменьшение количества требуемых итераций по сравнению с таковыми в двухслойной схеме.

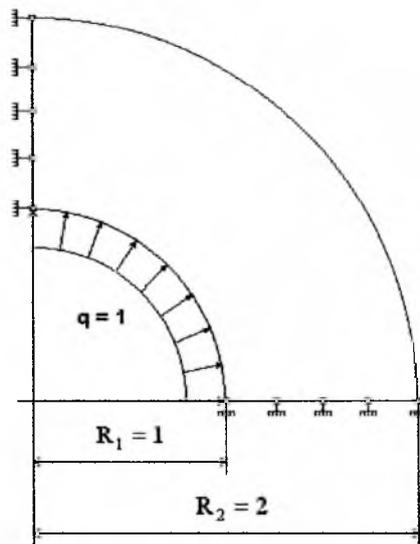
Замечание 9. Если для решения уравнения относительно поправки $\omega_h^k \in U_h$ использовать итерационный метод, то приходим к двухступенчатому итерационному алгоритму [7, 10]. Внешние итерации строятся по методу переменных параметров упругости или упругих решений, а в качестве внутренних итераций применяется метод сопряженных градиентов [11] с нулевым начальным приближением. Нет необходимости решать уравнение для поправки с высокой степенью точности. Существует оптимальное число, характеризующее точность нахождения поправки, при котором минимизируются общие вычислительные затраты двухступенчатого алгоритма. Численная реализация описанного подхода к решению нелинейных уравнений смешанного метода (7) свидетельствует об эффективности его применения для хорошо обусловленных задач с ограниченными зонами пластических деформаций.

Численный анализ. Построение смешанной аппроксимации и матричная формулировка уравнений смешанного метода для решения двумерных и осесимметричных задач теории малых упругопластических деформаций осуществлялись по аналогии с упругой задачей [12].

Результаты расчетов сопоставлялись с известными аналитическими решениями для несжимаемого материала [13] и численными решениями, полученными на основании классического метода конечных элементов (МКЭ). В приведенных ниже модельных задачах использовались безразмерные значения. Например, модуль упругости материала E полагали равным единице. Для диаграммы деформирования $\bar{\sigma} - \bar{\epsilon}$ принималась модель идеально упругопластического материала. При решении задач смешанным методом (МКЭ) учитывались граничные условия для нормальных и касательных напряжений на контуре. Для схем МКЭ значения напряжений в узлах сетки определялись путем усреднения. При построении треугольной сетки использовалось равномерное разбиение типа “крест”. Для решения системы нелинейных уравнений применялся метод упругих решений (65), (67).

Ниже приведены два примера, иллюстрирующие сходимость и точность численных решений, полученных на основе СМКЭ с использованием функции-колокола и кусочно-линейного восполнения деформаций и напряжений соответственно для плоской и осесимметричной задачи [12]. При сравнении результатов, полученных с помощью КМКЭ, приняты следующие обозначения: КМКЭ-1 – линейный треугольный элемент; КМКЭ-2 – билинейный четырехугольный элемент; КМКЭ-3 – квадратичный шестиузловой треугольный элемент.

Толстостенный полый цилиндр под действием внутреннего давления. Рассматривался полый цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления $q = 1$, с отношением радиусов $R_1/R_2 = 1/2$ (рисунок). Расчет выполнялся при условии плоского деформированного состояния для четверти сечения цилиндра. Предел текучести материала при одноосном растяжении принимался равным 1,5. Коэффициент Пуассона задавался 0,492. Оценивалась точность определения окружного и осевого напряжений, а также радиального перемещения на внутренней поверхности цилиндра. На внешней поверхности, где имеет место упругое распределение напряжений, решения, полученные на основе КМКЭ и СМКЭ, оказались близкими. Результаты сравнения представлены в табл. 1–3. Там же приведены разбиения по углу и радиусу цилиндра. Остаточные напряжения, определяемые в соответствии с теоремой Ильюшина о полной разгрузке, приведены в табл. 4, 5. Сравнение численных решений, полученных с использованием классического и смешанного МКЭ, свидетельствует о преимуществе последнего метода.



Полый цилиндр, находящийся под действием внутреннего давления.

Толстостенная сферическая оболочка под действием внутреннего давления. Задача решалась в осесимметричной постановке. При этом отношение радиусов $R_1/R_2 = 1/2$, внутреннее давление $q = 1$. Расчетная схема формально соответствует задаче о полном цилиндре, находящемся под дейст-

вием внутреннего давления (рисунок). Ввиду симметрии задачи рассматривалась четверть сечения сферы. Предел текучести материала при одноосном растяжении принимался равным 0,8. Коэффициент Пуассона задавался 0,494. Оценивалась точность вычисления окружных напряжений и радиальных перемещений на внутренней поверхности сферы. Сравнительные результаты расчетов представлены в табл. 6, 7. Там же приведены разбиения по углу и толщине оболочки. Из данных табл. 6, 7 видно, что смешанный метод дает более точные аппроксимации как напряжений, так и перемещений по сравнению с классическим МКЭ.

Т а б л и ц а 1

Результаты расчетов окружных напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления

Сетка	Внутренняя поверхность				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12×6	0,904	0,874	0,810	0,732	23,50	19,40	10,66	0
18×9	0,842	0,828	0,765	0,732	15,03	13,11	4,51	0
24×12	0,814	0,806	0,757	0,732	11,20	10,11	3,41	0
30×15	0,797	0,790	0,752	0,732	8,88	7,92	2,73	0
36×18	0,786	0,781	0,749	0,732	7,38	6,69	2,32	0
[13]	0,732							

Т а б л и ц а 2

Результаты расчетов осевых напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления

Сетка	Внутренняя поверхность				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12×6	0,046	0,016	-0,054	-0,133	134,58	112,03	59,40	0
18×9	-0,020	-0,034	-0,100	-0,133	84,96	74,43	24,81	0
24×12	-0,049	-0,058	-0,107	-0,133	63,16	56,39	19,55	0
30×15	-0,067	-0,073	-0,112	-0,133	49,62	45,11	15,79	0
36×18	-0,078	-0,083	-0,115	-0,133	41,35	37,59	13,53	0
[13]	-0,133							

Т а б л и ц а 3

Результаты расчетов радиальных перемещений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления

Сетка	Внутренняя поверхность				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12×6	2,387	2,378	2,397	2,412	1,12	1,49	0,70	0,08
18×9	2,405	2,395	2,408	2,415	0,37	0,79	0,25	-0,04
24×12	2,409	2,399	2,408	2,415	0,21	0,62	0,23	-0,04
30×15	2,410	2,406	2,411	2,414	0,17	0,33	0,12	0
36×18	2,411	2,407	2,411	2,414	0,12	0,29	0,11	0
[13]	2,414							

Т а б л и ц а 4

Результаты расчетов остаточных окружных напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления, при полной разгрузке

Сетка	Внутренняя поверхность				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12×6	-0,762	-0,941	-0,850	-0,896	18,48	-0,67	9,06	4,14
18×9	-0,828	-0,951	-0,914	-0,917	11,42	-1,74	2,21	1,89
24×12	-0,857	-0,951	-0,918	-0,924	8,31	-1,74	1,79	1,14
30×15	-0,874	-0,951	-0,920	-0,928	6,49	-1,74	1,57	0,72
36×18	-0,885	-0,949	-0,922	-0,930	5,32	-1,53	1,36	0,50
[13]	-0,9347							

Т а б л и ц а 5

Результаты расчетов остаточных осевых напряжений для задачи об упругопластическом состоянии полого цилиндра, находящегося под действием внутреннего давления, при полной разгрузке

Сетка	Внутренняя поверхность				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12×6	-0,405	-0,489	-0,394	-0,442	12,15	-6,07	14,53	4,12
18×9	-0,431	-0,488	-0,435	-0,452	6,51	-5,86	5,64	1,95
24×12	-0,440	-0,483	-0,439	-0,456	4,56	-4,77	4,77	1,08
30×15	-0,446	-0,480	-0,443	-0,458	3,25	-4,12	3,90	0,65
36×18	-0,449	-0,478	-0,445	-0,459	2,60	-3,69	3,47	0,43
[13]	-0,461							

Т а б л и ц а 6

Результаты расчетов окружных напряжений для задачи об упругопластическом состоянии толстостенной сферической оболочки, находящейся под действием внутреннего давления

Сетка	Внутренняя поверхность				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12×6	0,012	-0,098	-0,125	-0,196	106,00	51,00	37,50	2,00
18×9	-0,085	-0,132	-0,166	-0,198	57,0	34,00	17,00	1,00
24×12	-0,121	-0,149	-0,175	-0,198	39,0	25,50	12,50	1,00
30×15	-0,140	-0,158	-0,179	-0,199	30,0	21,00	10,50	0,50
36×18	-0,152	-0,165	-0,182	-0,199	24,0	17,50	9,00	0,50
42×21	-0,160	-0,170	-0,185	-0,199	20,00	15,00	7,50	0,50
[13]	-0,2							

Заключение. Приведенные выше тестовые примеры и опыт решения практических задач свидетельствуют об улучшенных аппроксимациях полей перемещений, деформаций и напряжений, полученных на основе смешанного метода. Существенное улучшение приближенного решения обычно

**Результаты расчетов радиальных перемещений для задачи
об упругопластическом состоянии толстостенной сферической оболочки,
находящейся под действием внутреннего давления**

Сетка	Внутренняя поверхность				Погрешность, %			
	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ	КМКЭ-1	КМКЭ-2	КМКЭ-3	СМКЭ
12×6	1,504	1,540	1,544	1,556	4,26	1,97	1,72	0,95
18×9	1,548	1,555	1,567	1,567	1,46	1,02	0,25	0,25
24×12	1,560	1,559	1,570	1,569	0,70	0,76	0,06	0,13
30×15	1,565	1,563	1,569	1,571	0,38	0,51	0,13	0
36×18	1,567	1,565	1,570	1,571	0,25	0,38	0,06	0
42×21	1,568	1,567	1,571	1,571	0,19	0,25	0	0
[13]	1,571							

наблюдается в задачах о концентрации напряжений с развитыми зонами пластических деформаций. Учет статических граничных условий на поверхности тела приводит к более точным результатам. Применение смешанной аппроксимации к решению задач механики разрушения позволяет получить более устойчивые решения для напряжений и деформаций по сравнению с обычным методом перемещений. Для задач с локальными зонами пластических деформаций, имеющих незначительный градиент напряжений, результаты расчетов на основе смешанного и классического подходов МКЭ близки к точным решениям. На редких сетках смешанный метод дает более точные результаты. Анализ численных решений позволяет говорить о преимуществе смешанного метода по сравнению с классическим МКЭ.

Резюме

Сформульовано змішану проєкційно-сіткову схему розв'язку нелінійних крайових задач теорії малих пружно-пластичних деформацій відносно переміщень, деформацій і напружень. Розглянуто ітераційні алгоритми розв'язку нелінійних рівнянь змішаного методу. Представлено числові результати розв'язку двох модельних задач. Проведено зіставлення результатів, що отримані на основі класичного і змішаного методів скінченних елементів.

1. *Ильюшин А. А.* К теории малых упругопластических деформаций // Прикл. математика и механика. – 1946. – **10**, № 3. – С. 347 – 356.
2. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 480 с.
3. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
4. *Гаевский Х., Греггер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
5. *Washizu K.* Variational Methods in Elasticity and Plasticity. – New York: Pergamon Press, 1975. – 412 p.

6. Чирков А. Ю. Смешанная проекционно-сеточная схема метода конечных элементов для решения краевых задач теории малых упругопластических деформаций // Пробл. прочности. – 2004. – № 6. – С. 59 – 86.
7. Ortega J. M. and Rheinboldt W. C. Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables. – New York; London: Academic Press, 1970.
8. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука, 1981. – 542 с.
9. Биргер И. А. Некоторые общие методы решения задач теории пластичности // Прикл. математика и механика. – 1951. – 15, № 6. – С. 765 – 770.
10. Дьяконов Е. Г. Минимизация вычислительной работы. – М.: Наука, 1989. – 272 с.
11. Hestens M. and Stiefel E. Methods of conjugate gradients for solving linear system // Nat. Bur. Std. J. Res. – 1952. – 49. – P. 409 – 436.
12. Чирков А. Ю. Построение смешанной аппроксимации к решению двумерных задач теории упругости методом конечных элементов // Пробл. прочности. – 2003. – № 6. – С. 93 – 126.
13. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести. – Киев: Наук. думка, 1981. – 492 с.

Поступила 21. 06. 2004