УДК 539.3

# О решении пространственной температурной задачи теории упругости в перемещениях

**Н. М. Бородачев, В. В. Астанин**

Национальный авиационный университет, Киев, Украина

*Предлагается новый метод решения пространственной задачи термоупругости в перемещениях. Полученное общее решение можно использовать при решении краевых задач термоупругости как для полупространства, так и для упругого слоя. Детально рассмотрена вторая граничная задача для полупространства и приведен числовой расчет.*

***Ключевые слова***: теория термоупругости в перемещениях, краевая задача, вектор перемещений, тензор напряжений, гармонические функции.

**Введение**. Ранее [1] была получена новая форма решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях, позволяющая сравнительно просто решать краевые задачи. Настоящая работа представляет собой развитие и обобщение данного решения на термоупругие задачи. Вопросы, связанные с построением общих решений пространственной задачи термоупругости и исследованием конкретных задач, изучались в [2–10].

**Постановка задачи**. Рассмотрим однородный изотропный материал, занимающий полупространство или слой конечной толщины.

Пространственная задача термоупругости в перемещениях сводится к решению дифференциального уравнения равновесия

$$\frac{1}{1-2\nu}\nabla(\nabla\cdot\mathbf{u})+\nabla^2\mathbf{u}=2\frac{1+\nu}{1-2\nu}\nabla(\alpha\theta) \tag{1}$$

и уравнения теплопроводности

$$\nabla^2\theta=0, \tag{2}$$

где $\mathbf{u}$ – вектор перемещений; $\nu$ – коэффициент Пуассона; $\nabla$ – набла-оператор; $\nabla^2$ – оператор Лапласа; $\alpha$ – коэффициент линейного расширения; $\theta$ – температура, отсчитываемая от температуры естественного состояния.

Полагаем, что объемные силы отсутствуют, а режим температуры является стационарным без тепловых источников.

К уравнениям (1) и (2) необходимо добавить еще граничные условия. Сформулируем граничные условия применительно к случаю упругого полупространства $x_3\geq 0$. (Здесь и далее используется прямоугольная система координат $x_1$, $x_2$, $x_3$.)

В случае первой граничной задачи (кинематической) на границе полупространства задаются перемещения

$$\mathbf{u}(x_1,x_2,x_3)\big|_{x_3=0}=\mathbf{u}^*(x_1,x_2), \tag{3}$$

в случае второй (статической) – напряжения

$$\sigma_{3i}=\begin{cases}-f_i(x_1,x_2), & (x_1,x_2)\in\Omega_i;\\ 0, & (x_1,x_2)\notin\Omega_i,\end{cases} \tag{4}$$

где $\sigma_{ki}$ – компоненты тензора напряжений ($k, i=1,2,3$); $\Omega_i$ – области нагружения в плоскости $x_3=0$.

Температурные граничные условия следующие:

$$\theta(x_1,x_2,x_3)\Big|_{x_3=0}=\theta_0(x_1,x_2). \tag{5}$$

Известные способы интегрирования уравнения (1) базируются в основном на представлении Папковича–Нейбера [11], в котором вектор перемещений выражается через гармонический вектор и гармонический скаляр. Однако структура решения данного представления такова, что сложно удовлетворять граничным условиям общего вида (3) или (4).

Ниже приводится другая форма решения уравнения (1), что позволяет без особых затруднений удовлетворять граничным условиям (3) или (4).

**Общее решение задачи термоупругости**. Частное решение уравнения (1) отыскиваем в виде

$$\mathbf{u}_0=\nabla g, \tag{6}$$

где $g$ – некоторая скалярная функция.

Подставляя выражение (6) в (1), получаем, что функция $g$ должна удовлетворять уравнению Пуассона

$$\nabla^2 g=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta.$$

Положим $g=x_3B_0$, где $B_0$ – гармоническая функция. Тогда

$$\nabla^2(g)=\nabla^2(x_3B_0)=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta=2\frac{\partial B_0}{\partial x_3}.$$

Следовательно,

$$2\frac{\partial B_0}{\partial x_3}=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\theta=\frac{1+\nu}{1-\nu}\alpha\frac{\partial\Phi}{\partial x_3}, \qquad \theta=\frac{\partial\Phi}{\partial x_3},$$

откуда находим

$$g=x_3B_0=\frac{1+\nu}{2(1-\nu)}\alpha x_3\Phi.$$

Таким образом, частное решение дифференциального уравнения (1) имеет вид

$$\mathbf{u}_0 = \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)} \nabla(x_3 \Phi). \tag{7}$$

Прибавляя частное решение (7) к общему решению уравнения (1) [1] (без учета температурных слагаемых), получаем общее решение пространственной задачи термоупругости в перемещениях:

$$\mathbf{u} = \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \nabla\varphi + \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)} \nabla(x_3 \Phi). \tag{8}$$

Здесь

$$\nabla^2 \mathbf{B} = 0; \qquad \nabla^2(\varphi) = 0; \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_3} = \frac{2(1-\nu)}{3-4\nu} (\nabla \cdot \mathbf{B}), \tag{9}$$

где $\mathbf{B}$ – гармонический вектор; $\varphi$ – гармонический скаляр.

В компонентах декартовой системы координат решение (8) имеет вид

$$\begin{cases} u_1 = B_1 - \dfrac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1} + \beta x_3 \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_1}; \\ u_2 = B_2 - \dfrac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2} + \beta x_3 \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_2}; \\ u_3 = B_3 - \dfrac{1}{2(1-2\nu)} x_3 \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} + \beta \left( x_3 \dfrac{\partial\Phi}{\partial x_3} + \Phi \right), \end{cases} \tag{10}$$

где

$$\beta = \frac{(1+\nu)\alpha}{2(1-\nu)}. \tag{11}$$

Компоненты $B_1$, $B_2$, $B_3$ гармонического вектора $\mathbf{B}$ могут быть найдены с использованием граничных условий.

Чтобы перейти к напряжениям, необходимо воспользоваться обобщенным законом Гука с учетом температурных слагаемых:

$$\hat{T} = 2\mu \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \hat{E}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \hat{\varepsilon} - \frac{1+\nu}{1-2\nu} \alpha\theta\hat{E} \right], \tag{12}$$

где $\hat{T}$, $\hat{\varepsilon}$ – тензоры напряжений и деформаций; $\mu$ – модуль сдвига; $\hat{E}$ – единичный тензор.

Полученное решение (8) справедливо как для упругого полупространства, так и для упругого слоя. Выражения для компонент $B_1$, $B_2$ и $B_3$ будут отличаться.

Для того чтобы найти указанные компоненты, необходимо задать граничные условия. С этой целью следует конкретизировать вид упругого тела и выбрать тип граничных условий. В качестве упругого тела примем упругое полупространство и будем решать статическую задачу, когда на границе тела заданы напряжения.

**Вторая граничная задача**. В этом случае граничные условия при $x_3 = 0$ определяются выражением (4). Пусть условие (5) примет вид

$$\theta = \begin{cases} \theta(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega_0; \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_0, \end{cases} \tag{13}$$

где $\Omega_0$ – область (в плоскости $x_3 = 0$), в которой поддерживается ненулевая температура.

На основании соотношения (12) имеем

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \mu\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_1}\right); \\ \sigma_{32} = \mu\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_3} + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_2}\right); \\ \sigma_{33} = 2\mu\left[\dfrac{\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} - \dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\theta\right]. \end{cases} \tag{14}$$

Введем в рассмотрение функции $N_i$ $(i = 1, 2, 3)$, гармонические в полупространстве $x_3 > 0$:

$$N_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega_i} f_i(y_1, y_2) \ln(x_3 + r) dy_1 dy_2, \tag{15}$$

где

$$r = [(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + x_3^2]^{1/2}.$$

При $x_3 = 0$ имеем

$$\lim_{x_3 \to +0} \frac{\partial^2 N_i}{\partial x_3^2} = \begin{cases} -f_i(x_1, x_2), & (x_1, x_2) \in \Omega_i; \\ 0, & (x_1, x_2) \notin \Omega_1. \end{cases} \tag{16}$$

С помощью выражений (4), (14)–(16) получим систему алгебраических уравнений

$$\mu\left[\left(\frac{\partial B_1}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_1}\right) - \frac{1}{2(1-2\nu)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_1} + 2\beta\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}\right] = \frac{\partial^2 N_1}{\partial x_3^2};$$

$$\mu\left[\left(\frac{\partial B_2}{\partial x_3} + \frac{\partial B_3}{\partial x_2}\right) - \frac{1}{2(1-2\nu)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_2} + 2\beta\frac{\partial \Phi}{\partial x_2}\right] = \frac{\partial^2 N_2}{\partial x_3^2};$$

$$2\mu\left(\frac{\partial B_3}{\partial x_3} - \frac{1}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}\right) = \frac{\partial^2 N_3}{\partial x_3^2}.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$
\begin{cases}
B_1 = \dfrac{1}{2\mu}\left(2\dfrac{\partial N_1}{\partial x_3} - \dfrac{\partial N_3}{\partial x_1}\right) + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_1} - 2\beta\dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}; \\
B_2 = \dfrac{1}{2\mu}\left(2\dfrac{\partial N_2}{\partial x_3} - \dfrac{\partial N_3}{\partial x_2}\right) + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial \Psi}{\partial x_2} - 2\beta\dfrac{\partial \xi}{\partial x_2}; \\
B_3 = \dfrac{1}{2\mu}\dfrac{\partial N_3}{\partial x_3} + \dfrac{1}{2}\varphi;
\end{cases}
\tag{17}
$$

$$
\varphi = \frac{\partial \Psi}{\partial x_3}; \qquad \Phi = \frac{\partial \xi}{\partial x_3}; \qquad \theta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \tag{18}
$$

На основании формул (17) имеем

$$
\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_1}{\partial x_1} + \frac{\partial B_2}{\partial x_2} + \frac{\partial B_3}{\partial x_3} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial}{\partial x_3}(\nabla \cdot \mathbf{N}) + \frac{1-4\nu}{2(1-2\nu)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + 2\beta\frac{\partial \Phi}{\partial x_3}.
$$

С другой стороны, из соотношения (9) получим

$$
\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{3-4\nu}{2(1-2\nu)}\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}.
$$

Следовательно,

$$
\varphi = \frac{1-2\nu}{\mu}(\nabla \cdot \mathbf{N}) + 2\beta(1-2\nu)\Phi, \tag{19}
$$

где $\mathbf{N} = (N_1, N_2, N_3)$.

Формулы (10), (17)–(19) дают общее решение второй граничной задачи термоупругости для полупространства.

Зная компоненты $u_1$, $u_2$, $u_3$ вектора перемещений $\mathbf{u}$, можно по известным формулам определить компоненты тензора напряжений. Так, компоненты $\sigma_{31}$, $\sigma_{32}$, $\sigma_{33}$ можно найти с помощью соотношений (14). Для остальных компонент тензора напряжений на основании (12) имеем

$$
\begin{cases}
\sigma_{11} = 2\mu\left[\dfrac{\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} - \dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\theta\right]; \\
\sigma_{22} = 2\mu\left[\dfrac{\nu}{1-2\nu}(\nabla \cdot \mathbf{u}) + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} - \dfrac{1+\nu}{1-2\nu}\alpha\theta\right]; \\
\sigma_{12} = \sigma_{21} = \mu\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_2} + \dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}\right).
\end{cases}
\tag{20}
$$

 *ISSN 0556-171X. Проблемы прочности, 2005, № 3*

С целью упрощения вычислений по формулам (14) и (20) определим величину $(\nabla \cdot \mathbf{u})$. На основании (8) запишем

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{B} - \frac{1}{2(1-2\nu)} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + 2\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}$$

или в окончательном виде –

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + 2\beta \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} + 2\beta\theta. \tag{21}$$

Для использования полученных выше результатов необходимо располагать решением уравнения теплопроводности (2). Это решение, удовлетворяющее граничному условию (13), можно представить в таком виде:

$$\Phi(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2\pi} \iint_{\Omega_0} \frac{1}{r} \theta_0(y_1, y_2) dy_1 dy_2, \qquad \theta = \frac{\partial \Phi}{\partial x_3}. \tag{22}$$

Рассмотрим частный случай, когда в граничном условии (4) касательные напряжения $\sigma_{31}$ и $\sigma_{32}$ равны нулю. При этом $N_1 = 0,\ N_2 = 0.$

Следовательно,

$$\varphi = \frac{1-2\nu}{\mu} \frac{\partial N_3}{\partial x_3} + 2(1-2\nu)\beta\Phi, \tag{23}$$

и формулы (17) принимают более простой вид

$$\begin{cases} B_1 = -\dfrac{1}{2\mu} \dfrac{\partial N_3}{\partial x_1} + \dfrac{\nu}{1-2\nu} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_1} - 2\beta \dfrac{\partial \xi}{\partial x_1}; \\ B_2 = -\dfrac{1}{2\mu} \dfrac{\partial N_3}{\partial x_2} + \dfrac{\nu}{1-2\nu} \dfrac{\partial \Psi}{\partial x_2} - 2\beta \dfrac{\partial \xi}{\partial x_2}; \\ B_3 = \dfrac{1}{2\mu} \dfrac{\partial N_3}{\partial x_3} + \dfrac{1}{2}\varphi. \end{cases} \tag{24}$$

**Применение полученных результатов**. Полученное решение термоупругой задачи можно использовать, во-первых, для определения компонент вектора перемещения и тензора напряжений в любой точке упругого полупространства, когда на границе заданы напряжения и температура, и, во-вторых, для сведения смешанных задач термоупругости (в частности, контактных задач) к интегральным уравнениям.

Рассмотрим кратко первое из указанных направлений. Сначала покажем, как можно определить напряжения в полупространстве при $x_3 > 0$. С учетом соотношения (21) формулы для вычисления нормальных напряжений в (14) и (20) принимают следующий вид:

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} - 2\beta\theta\right); \\ \sigma_{22} = 2\mu\left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} - 2\beta\theta\right); \\ \sigma_{33} = 2\mu\left(\dfrac{\partial u_3}{\partial x_3} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} - 2\beta\theta\right). \end{cases} \qquad (25)$$

Формулы для определения касательных напряжений в (14) и (20) остаются без изменений. Подставляя в (25) выражения для $u_1$, $u_2$, $u_3$ (10), получаем

$$\begin{cases} \sigma_{11} = 2\mu\left(\dfrac{\partial B_1}{\partial x_1} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} - 2\beta\theta - \dfrac{x_3}{2(1-2\nu)}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \beta x_3\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_1^2}\right); \\ \sigma_{22} = 2\mu\left(\dfrac{\partial B_2}{\partial x_2} + \dfrac{\nu}{1-2\nu}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} - 2\beta\theta - \dfrac{x_3}{2(1-2\nu)}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \beta x_3\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_2^2}\right); \\ \sigma_{33} = 2\mu\left(\dfrac{\partial B_3}{\partial x_3} - \dfrac{1}{2}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3} - \dfrac{x_3}{2(1-2\nu)}\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} + \beta x_3\dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x_3^2}\right). \end{cases} \qquad (26)$$

Ограничимся рассмотрением случая, когда $N_1 = 0$, $N_2 = 0$. Функции $\varphi$ и $B_1$, $B_2$, $B_3$ определяются по формулам соответственно (23) и (24).

Подставив выражения (23) и (24) в формулы (26), получим

$$\begin{cases} \sigma_{11} = -\dfrac{\partial^2 N_3}{\partial x_1^2} - 2\nu\dfrac{\partial^2 N_3}{\partial x_2^2} - x_3\dfrac{\partial^3 N_3}{\partial x_1^2\partial x_3} + 2(1+\nu)\alpha\mu\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x_2^2}; \\ \sigma_{22} = -\dfrac{\partial^2 N_3}{\partial x_2^2} - 2\nu\dfrac{\partial^2 N_3}{\partial x_1^2} - x_3\dfrac{\partial^3 N_3}{\partial x_2^2\partial x_3} + 2(1+\nu)\alpha\mu\dfrac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2}; \\ \sigma_{33} = \dfrac{\partial^2 N_3}{\partial x_3^2} - x_3\dfrac{\partial^3 N_3}{\partial x_3^3}. \end{cases} \qquad (27)$$

Затем, воспользовавшись соотношениями (15) и (22), имеем

$$\begin{aligned} N_3(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega_3} f_3(y_1, y_2)\ln(x_3 + r)dy_1dy_2; \\ \xi(x_1, x_2, x_3) &= -\frac{1}{2\pi}\iint_{\Omega_0} \theta_0(y_1, y_2)\ln(x_3 + r)dy_1dy_2. \end{aligned} \qquad (28)$$

Для того чтобы можно было использовать формулы (28) для решения конкретных задач, необходимо задать функции $f_3(x_1, x_2)$, $\theta_0(x_1, x_2)$ и вид, т.е. форму и размеры, областей $\Omega_3$ и $\Omega_0$. Подставив (28) в (27), получим в окончательном виде формулы для численных расчетов напряжений $\sigma_{11}$, $\sigma_{22}$, $\sigma_{33}$.

Из третьей формулы (27) следует, что напряжение $\sigma_{33}$ не зависит от температуры. Поэтому покажем, как получить числовые результаты для $\sigma_{11}$ и $\sigma_{22}$.

**Пример**. Пусть $f_3(x_1,x_2)=0$;

$$\theta_0(x_1,x_2)=A\left[\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)\left(1-\frac{x_2^2}{a^2}\right)\right]^{1/2},$$

а областью $\Omega_0$ является квадрат со сторонами $2a$, где $A$ – температура в центре квадрата.

В этом случае две первые формулы (27) принимают такой вид:

$$\sigma_{11}(x_1,x_2,x_3)=$$

$$=-A_0\int_{-a}^{a}dy_1\int_{-a}^{a}\frac{\left(1-\dfrac{y_1^2}{a^2}\right)^{1/2}\left(1-\dfrac{y_2^2}{a^2}\right)^{1/2}}{r^2(x_3+r)}\left[\frac{r^2-(x_2-y_2)^2}{r}-\frac{(x_2-y_2)^2}{x_3+r}\right]dy_2; \tag{29а}$$

$$\sigma_{22}(x_1,x_2,x_3)=$$

$$=-A_0\int_{-a}^{a}dy_1\int_{-a}^{a}\frac{\left(1-\dfrac{y_1^2}{a^2}\right)^{1/2}\left(1-\dfrac{y_2^2}{a^2}\right)^{1/2}}{r^2(x_3+r)}\left[\frac{r^2-(x_1-y_1)^2}{r}-\frac{(x_1-y_1)^2}{x_3+r}\right]dy_2, \tag{29б}$$

где $A_0=\dfrac{1}{\pi}(1+\nu)\alpha\mu A.$

По формулам (29) можно определить напряжения $\sigma_{11}$ и $\sigma_{22}$ в любой точке полупространства $x_3\geq 0$. Ограничимся нахождением этих напряжений на оси $Ox_3$, т.е. при $x_1=0$, $x_2=0$. В силу симметрии задачи относительно осей $Ox_1$ и $Ox_2$ напряжения $\sigma_{11}$ и $\sigma_{22}$ на оси $Ox_3$ будут одинаковыми. Поэтому достаточно вычислить напряжение $\sigma_{11}$:

$$\sigma_{11}(0,0,x_3)=-A_0\int_{-a}^{a}dy_1\int_{-a}^{a}\frac{\left(1-\dfrac{y_1^2}{a^2}\right)^{1/2}\left(1-\dfrac{y_2^2}{a^2}\right)^{1/2}}{r_0^2(x_3+r_0)}\left[\frac{y_1^2+x_3^2}{r_0}-\frac{y_2^2}{x_3+r_0}\right]dy_2, \tag{30}$$

где $r_0^2=y_1^2+y_2^2+x_3^2$.

Интегралы, входящие в (30), невозможно вычислить в замкнутом виде. Для получения числовых результатов необходимо использовать ЭВМ. С этой целью в формуле (30) следует перейти к безразмерным переменным. Полагая

$$\nu_1 = \frac{y_1}{a}; \qquad \nu_2 = \frac{y_2}{a}; \qquad \varepsilon = \frac{x_3}{a}; \qquad R^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \varepsilon^2,$$

выражение (30) примет вид

$$\sigma_{11}(\varepsilon) = -A_0 \int_{-1}^{1} d\nu_1 \int_{-1}^{1} \frac{(1-\nu_1^2)^{1/2}(1-\nu_2^2)^{1/2}}{R^2(\varepsilon + R)} \left[ \frac{\nu_1^2 + \varepsilon^2}{R} - \frac{\nu_2^2}{\varepsilon + R} \right] d\nu_2, \qquad (31)$$

где

$$R^2 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \varepsilon^2; \qquad \sigma_{11}(\varepsilon) = \sigma_{11}\left(0, 0, \frac{x_3}{a}\right).$$

Двойной интеграл, входящий в (31), вычислялся на ЭВМ с помощью квадратурной формулы Гаусса (таблица).

**Изменение значений $-\sigma_{11}(\varepsilon)/A_0$ в зависимости от относительной глубины $\varepsilon$ рассматриваемой точки**

| $\varepsilon$ | $-\sigma_{11}(\varepsilon)/A_0$ | $\varepsilon$ | $-\sigma_{11}(\varepsilon)/A_0$ | $\varepsilon$ | $-\sigma_{11}(\varepsilon)/A_0$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,05 | 2,9130 | 0,50 | 1,4709 | 3,0 | 0,1267 |
| 0,10 | 2,6996 | 0,75 | 1,0283 | 5,0 | 0,0479 |
| 0,20 | 2,3167 | 1,00 | 0,7394 | 10,0 | 0,0122 |
| 0,30 | 1,9880 | 2,00 | 0,2613 | | |

Видно, что при нагревании ($A > 0$) напряжение $\sigma_{11}$ на оси $Ox_3$ будет отрицательным (сжимающим), при охлаждении ($A < 0$) – положительным. Приведенные данные свидетельствуют о том, что $\sigma_{11}$ быстро понижается с глубиной.

Аналогично можно определить все компоненты тензора напряжений в любой точке упругого полупространства, когда на границе заданы напряжения и температура.

**Заключение**. Получена новая форма общего решения задачи термоупругости в перемещениях, особенность которого состоит в сравнительно простом решении в общем виде краевых задач для упругого полупространства и слоя конечной толщины. Показано, как с помощью решения можно определить напряжения в любой точке (с доведением до числовых результатов).

## Резюме

Запропоновано новий метод розв'язку просторової задачі термопружності в переміщеннях. Отриманий загальний розв'язок можна використовувати при розв'язанні граничних задач термопружності як для пружного напівпросто-

ру, так і для пружного шару. Детально розглянуто другу граничну задачу для напівпростору. Наведено приклад, доведений до числових результатів.


1. *Бородачев Н. М., Астанин В. В.* Об одном методе решения пространственной задачи теории упругости в перемещениях // Пробл. прочности. – 2003. – № 3. – С. 62 – 69.
2. *Boley B. A. and Weiner J. A.* Theory of Thermal Stresses. – New York; London: John Wiley & Sons, 1960. – 517 p.
3. *Коваленко А. Д.* Основы термоупругости. – Киев: Наук. думка, 1970. – 307 с.
4. *Коренев Б. Г.* Задачи теории теплопроводности и термоупругости. – М.: Наука, 1980. – 400 с.
5. *Лурье А. И.* Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 939 с.
6. *Майзель В. М.* Температурная задача теории упругости. – Киев: Изд-во АН УССР, 1951. – 142 с.
7. *Melan E. and Parkus H.* Wärmespannungen infolge Stationärer Temperaturfelder. – Wien: Springer-Verlag, 1953. – 167 S.
8. *Nowacki W.* Thermoelasticity. – Oxford; Warszawa: Pergamon Press, 1962. – 364 p.
9. *Nowacki W.* Teoria Sprezystosci. – Warszawa: Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, 1970. – 872 s.
10. *Timoshenko S. P. and Goodier J. N.* Theory of Elasticity. – New York: McGraw-Hill, 1970. – 575 p.
11. *Папкович П. Ф.* Теория упругости. – М.: Оборонгиз, 1939. – 640 с.


Поступила 05. 04. 2004