УДК 539.3

Анализ краевых задач теории малых упругопластических деформаций, учитывающей гидростатическое напряжение и вид девиатора напряжений

А. Ю. Чирков

Институт проблем прочности им. Г. С. Писаренко НАН Украины, Киев, Украина

Рассмотрены варианты деформационной теории пластичности, учитывающей влияние гидростатического напряжения и вида девиатора напряжений на механические свойства среды для случая пропорционального нагружения. Основное внимание уделяется обобщенной постановке и исследованию разрешимости нелинейной краевой задачи. Установлены условия, обеспечивающие существование, единственность и непрерывную зависимость обобщенного решения от приложенных нагрузок.

Ключевые слова: теория пластичности, гидростатическое напряжение, девиаторы напряжений и деформаций, вид девиаторов напряжений и деформаций, параметр Лоде, пропорциональное нагружение, краевая задача.

Обобщенная постановка краевой задачи. Пусть исследуемое тело занимает область $\Omega \subset R^3$ и имеет регулярную границу. Вектор-функции, описывающие перемещения точек тела u, будем рассматривать как элементы функционального множества U. Множество допустимых тензор-функций для напряжений σ и деформаций ε обозначим через X. Полагаем, что U и X – гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot;\cdot)_U$ и $(\cdot;\cdot)_X$ соответственно. Обозначим через U^* – пространство, сопряженное к U, т.е. пространство линейных непрерывных функционалов, определенных на U. Тогда обобщенная краевая задача теории малых упругопластических деформаций может быть сформулирована в виде нелинейного операторного уравнения

$$A(u)=\rho \quad \text{в} \quad U^*, \qquad u\in U, \tag{1}$$

где A: $U \to U^*$ – нелинейный оператор теории пластичности; $\rho \in U^*$ – линейный функционал, ассоциируемый с работой приложенных к телу нагрузок. Однако дать аналитическое выражение оператора A невозможно, существует лишь способ его определения с помощью отображения:

$$A(u)\colon v\in U \to (\sigma(u), \varepsilon(v))_X = (D(Bu)Bu, Bv)_X = \langle A(u), v\rangle, \tag{2}$$

где $\langle\cdot;\cdot\rangle$ – отношение двойственности на $U^*\times U$; B – непрерывный линейный дифференциальный оператор, действующий из пространства U в X; D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями.

Если оператор A обладает свойствами сильной монотонности и липшиц-непрерывности, т.е. существуют два вещественных положительных числа m и M такие, что

$$\begin{aligned} &\langle A(v)-A(w),\, v-w\rangle \geq m\|v-w\|_U^2, \quad \forall\, v,w\in U;\\ &\|A(v)-A(w)\|_{U^*} \leq M\,\|v-w\|_U, \quad \forall\, v,w\in U, \end{aligned} \tag{3}$$

то решение уравнения (1) существует и единственно, а также непрерывно зависит от правой части, а именно от приложенных нагрузок [1, 2].

Пусть отображение A: $U\to U^*$ – дифференцируемо по Фреше в каждой точке $v\in U$, т.е. существует такой линейный оператор $A'(v)\colon U\to U^*$, что

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|A(v+h)-A(v)-A'(v)h\|_{U^*}}{\|h\|_U}=0, \qquad \forall\, h\in U, \tag{4}$$

где $A'(v)h=dA(v;h)$ – дифференциал Фреше оператора $v\to A(v)$ в точке v на приращении $h\in U$; $A'(v)$ – производная Фреше оператора A в точке $v\in U$.

Замечание 1. Если A: $U\to U^*$ – непрерывно дифференцируемое отображение и оператор $A'(v)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} &\exists\, m>0\colon \langle A'(v)h,\, h\rangle \geq m\|h\|_U^2, \quad \forall\, v,h\in U;\\ &\exists\, M>0\colon \|A'(v)h\|_{U^*}\leq M\|h\|_U, \quad \forall\, v,h\in U, \end{aligned} \tag{5}$$

то существует не более одного решения уравнения (1) при любом $\rho\in U^*$.

Действительно, существование и единственность обобщенного решения следуют из свойств сильной монотонности и липшиц-непрерывности оператора A, которые устанавливаются на основании неравенств (5). Поскольку A: $U\to U^*$ – непрерывно дифференцируемое отображение, то с использованием формулы конечных приращений получим

$$\begin{gathered} \langle A(v)-A(w), v-w\rangle=\int_0^1\langle A'(pv+(1-p)w)(v-w),\, v-w\rangle dp\geq m\|v-w\|_U^2,\\ \forall\, v,w\in U;\\ \|A(v)-A(w)\|_{U^*}=\int_0^1\|A'(pv+(1-p)w)(v-w)\|_{U^*}\,dp\leq M\|v-w\|_U,\\ \forall\, v,w\in U, \end{gathered} \tag{6}$$

откуда следует, что A – сильномонотонный и липшиц-непрерывный оператор, обладающий сильномонотонным и липшиц-непрерывным обратным оператором $A^{-1}\colon U^*\to U$.

Определим нелинейный оператор Φ: $X\to X$ с помощью отображения

$$\Phi\colon \eta\in X\to \Phi(\eta)=D(\eta)\eta. \tag{7}$$

Если предположить, что $\eta \to D(\eta)$ – непрерывно дифференцируемый по Фреше оператор, то в соответствии с правилами дифференцирования сложных отображений дифференциал $d\Phi(\eta;\mu)$ оператора Φ в точке $\eta \in X$ на приращении $\mu \in X$ имеет вид

$$d\Phi(\eta;\mu) = \Phi'(\eta)\mu = dD(\eta;\mu)\eta + D(\eta)\mu, \tag{8}$$

где $\Phi'(\eta)$ – производная Фреше оператора Φ в точке $\eta \in X$; $dD(\eta;\mu)$ – дифференциал Фреше отображения $\eta \to D(\eta)$ на приращении $\mu \in X$.

С учетом того что B – непрерывный линейный оператор, получим

$$A'(v)h = dA(v;\, h)\colon w \to (d\Phi(Bv;\, Bh),\, Bw)_X =$$

$$= (\Phi'(Bv)Bh,\, Bw)_X = \langle A'(v)h,\, w\rangle, \qquad \forall\, v,h,w \in U. \tag{9}$$

Лемма. Пусть отображение Φ: $X \to X$ – непрерывно дифференцируемо по Фреше и производная $\Phi'(\eta)$ положительно определена и ограничена при всех $\eta \in X$, т.е. существуют два вещественных положительных числа m, M такие, что

$$(\Phi'(\eta)\mu,\, \mu)_X \ge m\,||\mu||_X^2\,, \qquad \forall\, \eta,\mu \in X; \tag{10}$$

$$||\Phi'(\eta)\mu\,||_X \le M\,||\mu||_X\,, \qquad \forall\, \eta,\mu \in X. \tag{11}$$

Тогда определяемый из соотношения (2) оператор A: $U \to U^*$ является сильномонотонным и липшиц-непрерывным.

◀ Пусть $\eta = Bv$ и $\mu = Bw$ для любых $v,\, w \in U$. В соответствии с (9) и условием положительной определенности оператора $\Phi'(\eta)$ находим

$$\langle A'(v)w,w\rangle = (\Phi'(\eta)\mu,\, \mu)_X \ge m\,||\mu||_X^2 = m\,||w||_U^2\,, \qquad \forall\, v,w \in U. \tag{12}$$

Кроме того, по определению нормы в пространстве U^* имеем

$$||A'(v)w||_{U^*} = \sup_{h \in U} \frac{|\langle A'(v)w,\, h\rangle|}{||h||_U} = \sup_{h \in U} \frac{|(\Phi'(\eta)\mu,\, Bh)_X|}{||Bh||_X}, \qquad \forall\, v,w \in U, \tag{13}$$

откуда ввиду ограниченности оператора $\Phi'(\eta)$ получим

$$||A'(v)w||_{U^*} \le ||\Phi'(\eta)\mu||_X \le M||\mu||_X = M||w||_U\,, \qquad \forall\, v,w \in U. \tag{14}$$

С учетом (5) имеем неравенства (3) как следствие приведенных выше неравенств (12) и (14). ▶

Классические соотношения деформационной теории пластичности. Пусть $\sigma = (\sigma_{ij})$ $(1 \le i,\, j \le 3)$ – тензор напряжений, представленный в виде двух составляющих: $\sigma = \sigma_S + \sigma_D$, где σ_S – шаровой тензор; σ_D – девиатор напряжений. Тензор малых деформаций $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$ $(1 \le i,\, j \le 3)$ по аналогии с тензором напряжений допускает разложение вида: $\varepsilon = \varepsilon_S + \varepsilon_D$, где ε_S – шаровой тензор; ε_D – девиатор деформаций. В деформационной теории пластичности изотропных материалов [3, 4] принимается, что изменение объема является чисто упругим, девиатор напряжений σ_D в процессе деформирования – пропорционален девиатору деформаций ε_D в каждой точке рассматриваемого тела. Тогда

$$\sigma_S = k_0 \varepsilon_S; \qquad \sigma_D = 2G(\bar{\varepsilon})\varepsilon_D, \tag{15}$$

где k_0 – модуль объемной деформации; $G(\bar{\varepsilon}) = \bar{\sigma}(\bar{\varepsilon})/3\bar{\varepsilon}$ – секущий модуль сдвига; $\bar{\sigma}, \bar{\varepsilon}$ – интенсивности девиаторов напряжений и деформаций. При этом постулируется гипотеза о единой не зависящей от вида девиатора напряжений σ_D функциональной зависимости между интенсивностями напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\varepsilon}$, которая характеризует диаграмму деформирования материала:

$$\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}). \tag{16}$$

Таким образом, поведение материала описывается уравнением

$$\sigma = k_0 \varepsilon_S + 2G(\bar{\varepsilon})\varepsilon_D. \tag{17}$$

Что касается единственности решения краевой задачи, то функциональная зависимость (16) должна удовлетворять условиям:

$$0 < \frac{df(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}} \le 3G, \qquad G \le G_0 < \infty, \tag{18}$$

где G_0 – начальный модуль сдвига. Неравенства (18) допускают простую геометрическую интерпретацию. Для всех $\bar{\varepsilon}$ кроме, быть может, конечного числа изолированных точек касательный модуль

$$\bar{g}(\bar{\varepsilon}) = \frac{1}{3}\frac{df(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}} \tag{19}$$

строго положителен и не превышает секущий модуль $G(\bar{\varepsilon})$, который, в свою очередь, не превышает начальный модуль сдвига G_0.

Полагаем, что рассматриваемое тело может быть неоднородным, его упругие и пластические свойства могут зависеть от координат $x \in \Omega$. Функция $x \to f(x, \bar{\varepsilon})$ измерима и ограничена на Ω при всех $\bar{\varepsilon}$. Во всех точках области Ω кроме, быть может, множества меры нуль функция $\bar{\varepsilon} \to f(x, \bar{\varepsilon})$ непрерывна и имеет ограниченную производную $df(\bar{\varepsilon})/d\bar{\varepsilon}$.

Определим нелинейный оператор A: $U \to U^*$ с помощью отображения

$$A(u): v \in U \to (\sigma(u), \varepsilon(v))_X = (D(\bar{\varepsilon}(u))Bu, Bv)_X = \langle A(u), v \rangle, \tag{20}$$

где D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями. Оператор D: $X \to X$ определяется соотношением

$$\eta,\ \mu \in X \to D(\bar{\varepsilon}(\eta))\mu = k_0 \mu_S + 2G(\bar{\varepsilon}(\eta))\mu_D, \tag{21}$$

где μ_S, μ_D – шаровая и девиаторная составляющие произвольного тензора деформаций $\mu \in X$.

Элементы μ_S, μ_D обладают такими свойствами:

$$\begin{cases} (\mu_S, \mu_D) = (\mu_D, \mu_S) = 0; \\ ||\mu_S||^2 = (\mu_S, \mu_S) = (\mu_S, \mu) = (\mu, \mu_S); \\ ||\mu_D||^2 = (\mu_D, \mu_D) = (\mu_D, \mu) = (\mu, \mu_D); \\ ||\mu||^2 = ||\mu_S||^2 + ||\mu_D||^2, \end{cases} \tag{22}$$

где $(\cdot;\cdot)$ – скалярное произведение, определенное сверткой тензора $\mu \in X$.

Функционал $\bar{\varepsilon}$ зададим с помощью выражения

$$\eta \in X \to \bar{\varepsilon}(\eta) = \sqrt{\frac{2}{3}}\,||\eta_D||. \tag{23}$$

Теорема 1. Если функция $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$, описывающая кривую деформирования материала, удовлетворяет условиям (18), то оператор $\eta \to \Phi'(\eta)$ является положительно определенным и ограниченным при всех $\eta \in X$.

◀ Сделанные выше предположения о свойствах функции $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon})$ обеспечивают дифференцируемость по Фреше оператора $\eta \to D(\eta)$. Согласно (21) и правилам дифференцирования сложных отображений, имеем

$$dD(\eta;\ \mu)\chi = 2\frac{dG(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}}\, d\bar{\varepsilon}(\eta;\ \mu)\chi_D, \qquad \forall\, \eta,\mu,\chi \in X, \tag{24}$$

где $d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu)$ – дифференциал отображения $\eta \in X \to \bar{\varepsilon}(\eta)$ на приращении $\mu \in X$. С использованием соотношения (23) находим

$$d\bar{\varepsilon}(\eta;\ \mu) = (\bar{\varepsilon}'(\eta),\ \mu) = \frac{2}{3}\frac{(\eta_D, \mu_D)}{\bar{\varepsilon}(\eta)} = \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_D||}, \qquad \forall\, \eta,\mu \in X, \tag{25}$$

и, следовательно, выражение для $dD(\eta;\ \mu)\chi$ можно представить в виде

$$dD(\eta;\ \mu)\chi = 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{dG(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}}\frac{(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_D||}\chi_D, \qquad \forall\, \eta,\mu,\chi \in X. \tag{26}$$

Тогда с учетом равенства

$$\frac{dG(\bar{\varepsilon})}{d\bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{g} - G}{\bar{\varepsilon}} \tag{27}$$

на основании формул (8), (26) и (27) получим

$$\Phi'(\eta)\mu = 2(\bar{g} - G)\frac{(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_D||^2}\eta_D + D(\eta)\mu, \qquad \forall \eta, \mu \in X. \tag{28}$$

Исходя из последнего равенства для любых $\eta, \mu, \chi \in X$ имеем

$$(\Phi'(\eta)\mu, \chi) = 2(\bar{g} - G)\frac{(\eta_D, \mu_D)(\eta_D, \chi_D)}{||\eta_D||^2} + k_0(\mu_S, \chi_S) + 2G(\mu_D, \chi_D), \tag{29}$$

откуда следует

$$(\Phi'(\eta)\mu, \chi) = (\Phi'(\eta)\chi, \mu), \qquad \forall \eta, \mu, \chi \in X, \tag{30}$$

т.е. $\Phi'(\eta)$ – самосопряженный оператор при всех $\eta \in X$.

Таким образом, для произвольных $\eta, \mu \in X$ находим

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) = 2(\bar{g} - G)\frac{(\eta_D, \mu_D)^2}{||\eta_D||^2} + k_0||\mu_S||^2 + 2G||\mu_D||^2. \tag{31}$$

В соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца получим

$$|(\eta_D, \mu_D)| \le ||\eta_D|| \, ||\mu_D||, \qquad \forall \eta_D, \mu_D \in X. \tag{32}$$

Кроме того, согласно условиям (18) выполняется неравенство

$$\bar{g} - G \le 0. \tag{33}$$

Тогда из равенства (31) следует

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) \ge k_0||\mu_S||^2 + 2\bar{g}||\mu_D||^2 \ge 2\bar{g}||\mu||^2, \qquad \forall \eta, \mu \in X, \tag{34}$$

что приводит к неравенству (10) с постоянной $m = 2\,\mathrm{vrai}\min\limits_{x \in \Omega}\min\limits_{\bar{\varepsilon}}\bar{g}(x, \bar{\varepsilon}) > 0.$

Для доказательства неравенства (11) заметим, что при фиксированном $\eta \in X$ оператор $\Phi'(\eta)$ самосопряжен и положителен и, следовательно, его норма определяется выражением

$$||\Phi'(\eta)||_X = \sup_{\mu \in X}\frac{(\Phi'(\eta)\mu, \mu)_X}{||\mu||_X^2}, \qquad \forall \eta \in X. \tag{35}$$

В соответствии с (31)–(33) имеем

$$(\Phi'(\eta)\mu,\mu)\le k_0\|\mu_S\|^2+2G\|\mu_D\|^2\le k_0\|\mu\|^2,\qquad \forall\eta,\mu\in X, \tag{36}$$

что приводит к неравенству (11) с постоянной $M=\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega}k_0(x)<\infty$. ▶

Учет гидростатического напряжения в задачах деформационной теории пластичности. Влияние шарового тензора напряжений на сопротивление материалов деформированию обнаружено Лоде, Бриджменом и другими авторами при испытаниях углеродистых и специальных сталей, чугуна, бронзы, меди, магния, латуни, стекла, полимеров, грунтов и т.п. Анализ экспериментальных данных свидетельствует о расхождении обобщенных кривых деформирования $\bar\sigma-\bar\varepsilon$ и изменении объема при неупругом деформировании материала. Систематический обзор экспериментальных исследований влияния гидростатического напряжения на процесс деформирования конструкционных материалов содержится, например, в [5].

Расхождение обобщенных кривых деформирования, построенных по результатам опытов на растяжение–сжатие, влияние величины гидростатического давления и другие аналогичные эффекты, если они проявляются для данного материала, обычно учитывают путем введения в функциональную зависимость $\bar\sigma-\bar\varepsilon$ среднего нормального напряжения σ_0 либо средней деформации ε_0. В свою очередь, в соотношения $\sigma_0-\varepsilon_0$ в качестве одного из аргументов вводят $\bar\sigma$ или $\bar\varepsilon$. В этом случае функциональные зависимости между инвариантами можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon_0=\chi(\sigma_0,\bar\sigma);\qquad \bar\varepsilon=\psi(\sigma_0,\bar\sigma), \tag{37}$$

где $\chi=\chi(\sigma_0,\bar\sigma)$, $\psi=\psi(\sigma_0,\bar\sigma)$ – универсальные функции, не зависящие от вида девиатора напряжений и определяемые по данным экспериментов на кручение тонкостенных трубок или на растяжение–сжатие цилиндрических образцов в камере с давлением.

Если предположить, что существуют функции $\varphi=\varphi(\varepsilon_0,\bar\varepsilon)$, $f=f(\varepsilon_0,\bar\varepsilon)$, обратные по отношению к указанным выше универсальным функциям, то альтернативные соотношения могут быть записаны в виде

$$\sigma_0=\varphi(\varepsilon_0,\bar\varepsilon);\qquad \bar\sigma=f(\varepsilon_0,\bar\varepsilon), \tag{38}$$

причем в области упругих деформаций

$$\varphi(\varepsilon_0,\cdot)=k_0\varepsilon_0;\qquad f(\cdot,\bar\varepsilon)=3G_0\bar\varepsilon, \tag{39}$$

где k_0, G_0 – начальные модули объемной деформации и сдвига соответственно.

Предположим, что в процессе деформирования девиатор напряжений σ_D пропорционален девиатору деформаций ε_D в каждой точке рассматриваемого тела. Тогда с учетом зависимостей (38) получим

$$\sigma_S = k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})\varepsilon_S; \qquad \sigma_D = 2G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})\varepsilon_D, \tag{40}$$

где

$$k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon}) = \frac{\varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\varepsilon_0}, \qquad G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon}) = \frac{f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{3\bar{\varepsilon}} \tag{41}$$

– секущие модули объемной деформации и сдвига соответственно. Отсюда следует, что поведение материала описывается уравнением

$$\sigma = k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})\varepsilon_S + 2G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})\varepsilon_D. \tag{42}$$

Уравнение (42), являющееся обобщением классических соотношений теории малых упругопластических деформаций, предложено в [6] для учета влияния шарового тензора напряжений на механические свойства среды.

Что касается единственности решения краевой задачи, то согласно [6] универсальные функции (38) должны удовлетворять условиям

$$0 < \frac{\partial\sigma_0}{\partial\varepsilon_0} \le k, \qquad k \le k_0 < \infty; \tag{43а}$$

$$0 < \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} \le 3G, \qquad G \le G_0 < \infty; \tag{43б}$$

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial\varepsilon_0}\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} > \frac{1}{12}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon_0} + 3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\bar{\varepsilon}}\right)^2. \tag{43в}$$

При выполнении условий (43) существует взаимно однозначное соответствие между первыми и вторыми инвариантами тензоров напряжений и деформаций, поскольку функции $\varepsilon_0 = \chi(\sigma_0,\bar{\sigma})$, $\bar{\varepsilon} = \psi(\sigma_0,\bar{\sigma})$ и $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})$, $\bar{\sigma} = f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})$ взаимно обратимы, и, значит, напряжения можно выразить через деформации, и наоборот.

Следует, однако, иметь в виду, что приведенная в [6] теорема единственности носит "локальный" характер, так как ее доказательство построено в предположении "близости" двух возможных состояний упругопластического тела. Другими словами, при выполнении условий типа (43) не могут существовать два решения задачи, отличающиеся на "малую" величину. Покажем, что условия (43) обеспечивают однозначную разрешимость краевой задачи глобально, т.е. независимо от "близости" двух возможных состояний упругопластического тела.

Существование и единственность обобщенного решения. Полагаем, что рассматриваемое тело может быть неоднородным, а его упругие и пластические свойства зависят от координат $x \in \Omega$. Функции $x \to \varphi(x,\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})$, $x \to f(x,\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})$ измеримы и ограничены на Ω при всех ε_0, $\bar{\varepsilon}$. Во всех точках области Ω кроме, быть может, множества меры нуль функции $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon} \to \varphi(x,\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})$, $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon} \to f(x,\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные.

Определим нелинейный оператор A: $U \to U^*$ с помощью отображения

$$A(u): v \in U \to (\sigma(u), \varepsilon(v))_X = (D(\varepsilon_0(u), \bar{\varepsilon}(u)) Bu, Bv)_X = \langle A(u), v \rangle, \qquad (44)$$

где D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями.

Оператор D: $X \to X$ определяется выражением

$$\eta, \mu \in X \to D(\varepsilon_0(\eta), \bar{\varepsilon}(\eta))\mu = k(\varepsilon_0(\eta), \bar{\varepsilon}(\eta))\mu_S + 2G(\varepsilon_0(\eta), \bar{\varepsilon}(\eta))\mu_D, \qquad (45)$$

где шаровая μ_S и девиаторная μ_D составляющие произвольного тензора деформаций $\mu \in X$ обладают свойствами (22).

Функционалы ε_0 и $\bar{\varepsilon}$ зададим с помощью соотношений

$$\eta \in X \to \varepsilon_0(\eta) = \frac{1}{\sqrt{3}} ||\eta_S||; \qquad \eta \in X \to \bar{\varepsilon}(\eta) = \sqrt{\frac{2}{3}} ||\eta_D||. \qquad (46)$$

Теорема 2. Если функции $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ и $\bar{\sigma} = f(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$, описывающие поверхности упрочнения материала, удовлетворяют условиям (43), то оператор $\eta \to \Phi'(\eta)$ является положительно определенным и ограниченным при всех $\eta \in X$.

◀ Сделанные выше предположения о свойствах функций $\varphi = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ и $f = f(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ обеспечивают дифференцируемость по Фреше оператора $\eta \to D(\eta)$. Согласно (45) и правилам дифференцирования сложных отображений для произвольных $\eta, \mu, \chi \in X$ имеем

$$dD(\eta;\mu)\chi = \left(\frac{\partial k(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0} d\varepsilon_0(\eta;\mu) + \frac{\partial k(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu) \right) \chi_S +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial G(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0} d\varepsilon_0(\eta;\mu) + \frac{\partial G(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu) \right) \chi_D, \qquad (47)$$

где $d\varepsilon_0(\eta;\mu)$, $d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu)$ – дифференциалы отображений $\eta \in X \to \varepsilon_0(\eta)$, $\eta \in X \to \bar{\varepsilon}(\eta)$ на приращении $\mu \in X$. С использованием соотношений (46) для любых $\eta, \mu \in X$ находим

$$\begin{aligned} d\varepsilon_0(\eta;\mu) &= (\varepsilon_0'(\eta), \mu) = \frac{1}{3} \frac{(\eta_S, \mu_S)}{\varepsilon_0(\eta)} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{(\eta_S, \mu_S)}{||\eta_S||}; \\ d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu) &= (\bar{\varepsilon}'(\eta), \mu) = \frac{2}{3} \frac{(\eta_D, \mu_D)}{\bar{\varepsilon}(\eta)} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_D||}, \end{aligned} \qquad (48)$$

и, следовательно, выражение для $dD(\eta;\mu)\chi$ можно представить в виде

$$dD(\eta;\mu)\chi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0}\frac{(\eta_S,\mu_S)}{||\eta_S||} + \sqrt{2}\frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}}\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_D||}\right)\chi_S +$$

$$+\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0}\frac{(\eta_S,\mu_S)}{||\eta_S||} + \sqrt{2}\frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}}\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_D||}\right)\chi_D, \quad \forall \eta,\mu,\chi \in X. \tag{49}$$

Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$h_0 = \frac{\partial \varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0}; \qquad \bar{h} = \frac{\partial \varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}};$$
$$g_0 = \frac{1}{3}\frac{\partial f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0}; \qquad \bar{g} = \frac{1}{3}\frac{\partial f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}}. \tag{50}$$

Тогда с учетом равенств

$$\frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0} = \frac{h_0 - k}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{h}}{\varepsilon_0};$$
$$\frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}} = \frac{\bar{g} - G}{\bar{\varepsilon}}; \qquad \frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0} = \frac{g_0}{\bar{\varepsilon}} \tag{51}$$

на основании формул (8), (49)–(51) для произвольных $\eta, \mu \in X$ получим

$$\Phi'(\eta)\mu = (h_0 - k)\frac{(\eta_S,\mu_S)}{||\eta_S||^2}\eta_S + \sqrt{2}\,\bar{h}\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_S||\,||\eta_D||}\eta_S +$$

$$+\sqrt{2}g_0\frac{(\eta_S,\mu_S)}{||\eta_S||\,||\eta_D||}\eta_D + 2(\bar{g} - G)\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_D||^2}\eta_D + D(\eta)\mu. \tag{52}$$

Следовательно,

$$(\Phi'(\eta)\mu,\mu) = (h_0 - k)\frac{(\eta_S,\mu_S)^2}{||\eta_S||^2} + \sqrt{2}(\bar{h} + g_0)\frac{(\eta_S,\mu_S)(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_S||\,||\eta_D||} +$$

$$+2(\bar{g} - G)\frac{(\eta_D,\mu_D)^2}{||\eta_D||^2} + k||\mu_S||^2 + 2G||\mu_D||^2, \qquad \forall \eta,\mu \in X. \tag{53}$$

В соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца, имеем

$$|(\eta_S,\mu_S)| \le ||\eta_S||\,||\mu_S||, \quad \forall \eta_S,\mu_S \in X;$$
$$|(\eta_D,\mu_D)| \le ||\eta_D||\,||\mu_D||, \quad \forall \eta_D,\mu_D \in X. \tag{54}$$

Кроме того, согласно условиям (43а,б) выполняются неравенства

$$h_0 - k \leq 0; \qquad \bar{g} - G \leq 0. \tag{55}$$

Тогда для произвольных $\eta, \mu \in X$ из равенства (53) следует

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) \geq h_0 \, ||\mu_S||^2 + 2\bar{g} \, ||\mu_D||^2 - \sqrt{2}\,|\bar{h} + g_0| \, ||\mu_S|| \, ||\mu_D||. \tag{56}$$

Введем в рассмотрение симметричную матрицу

$$S = \begin{bmatrix} h_0 & -\frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{h} + g_0| \\ -\frac{1}{\sqrt{2}}|\bar{h} + g_0| & 2\bar{g} \end{bmatrix}. \tag{57}$$

Покажем, что если выполняются условия (43), то S – положительно определенная матрица. Действительно, след $tr(S)$ и определитель $\det(S)$ матрицы S определяются по соотношениям

$$tr(S) = h_0 + 2\bar{g}; \qquad \det(S) = 2h_0\bar{g} - \frac{1}{2}(\bar{h} + g_0)^2. \tag{58}$$

Тогда при условии $tr(S) > 0$ наименьшее собственное значение матрицы S вычисляем из формулы

$$\delta = \frac{1}{2}\left(tr(S) - \sqrt{(tr(S))^2 - 4\det(S)} \right). \tag{59}$$

Таким образом, получаем необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы S:

$$h_0 > 0; \qquad \bar{g} > 0; \qquad 4h_0\bar{g} > (\bar{h} + g_0)^2. \tag{60}$$

Сопоставляя полученные неравенства (60) с (43), можно заключить, что они эквивалентны, и, следовательно, неравенство (10) выполняется с постоянной $m = \operatorname{vrai}\min\limits_{x \in \Omega} \min\limits_{\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}} \delta(x, \varepsilon_0, \bar{\varepsilon}) > 0.$

Для доказательства неравенства (11) заметим, что при фиксированном $\eta \in X$ оператор $\Phi'(\eta)$ не является самосопряженным и, значит, его норма определяется выражением

$$||\Phi'(\eta)||_X = \sup_{\mu \in X} \frac{||\Phi'(\eta)\mu||_X}{||\mu||_X}, \qquad \forall \eta \in X. \tag{61}$$

В соответствии с (52) имеем

$$||\Phi'(\eta)\mu||^2 = (h_0^2 - k^2 + 2g_0^2)\frac{(\eta_S, \mu_S)^2}{||\eta_S||^2} +$$

$$+2[\bar{h}^2 + 2(\bar{g}^2 - G^2)]\frac{(\eta_D, \mu_D)^2}{||\eta_D||^2} + 2\sqrt{2}(h_0\bar{h} + 2g_0\bar{g})\frac{(\eta_S, \mu_S)(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_S||\,||\eta_D||} +$$

$$+ k^2 ||\mu_S||^2 + 4G^2 ||\mu_D||^2, \qquad \forall\, \eta, \mu \in X. \tag{62}$$

С использованием неравенств (54) и (55) получаем

$$||\Phi'(\eta)\mu||^2 \le (k^2 + 2g_0^2)||\mu_S||^2 + 2(2G^2 + \bar{h}^2)||\mu_D||^2 +$$

$$+2\sqrt{2}\,|h_0\bar{h} + 2g_0\bar{g}|\,||\mu_S||\,||\mu_D||, \qquad \forall\, \eta, \mu \in X. \tag{63}$$

Тогда, если коэффициенты симметричной матрицы

$$Q = \begin{bmatrix} k^2 + 2g_0^2 & \sqrt{2}\,|h_0\bar{h} + 2g_0\bar{g}| \\ \sqrt{2}\,|h_0\bar{h} + 2g_0\bar{g}| & 2(2G^2 + \bar{h}^2) \end{bmatrix} \tag{64}$$

ограничены на Ω, приходим к неравенству (11) с постоянной $M < \infty$. Действительно, пусть Δ – наибольшее собственное значение матрицы Q. Покажем, что справедлива оценка

$$\Delta \le 2(k_0^2 + g_0^2 + \bar{h}^2). \tag{65}$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} tr(Q) &= k^2 + 2g_0^2 + 2(2G^2 + \bar{h}^2); \\ \det(Q) &= 2[(k^2 + 2g_0^2)(2G^2 + \bar{h}^2) - (h_0\bar{h} + 2g_0\bar{g})^2] \end{aligned} \tag{66}$$

наибольшее собственное значение матрицы Q определяется выражением

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(tr(Q) + \sqrt{(tr(Q))^2 - 4\det(Q)}\right). \tag{67}$$

Учитывая, что по условию теоремы $k \ge h_0$ и $G \ge \bar{g}$, получаем оценку $\det(Q) \ge 4(h_0\bar{g} - \bar{h}g_0)^2 \ge 0$ и, следовательно, на основании формулы (67) приходим к неравенству $\Delta \le tr(Q)$. Поскольку $k \le k_0$ и $G \le G_0$, то $tr(Q) \le$ $\le k_0^2 + 2g_0^2 + 2(2G_0^2 + \bar{h}^2)$, что приводит к оценке (65). Таким образом, имеем неравенство (11) с постоянной $M = \operatorname{vrai}\max\limits_{x \in \Omega} \max\limits_{\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}} \sqrt{\Delta(x, \varepsilon_0, \bar{\varepsilon})} < \infty$. ▶

Замечание 2. Эквивалентную форму записи условия (43в) получим из неравенства (56) с учетом ω-неравенства

$$2\|\mu_S\|\,\|\mu_D\| \le \omega\|\mu_S\|^2 + \frac{1}{\omega}\|\mu_D\|^2, \qquad \forall\omega > 0, \qquad \forall \mu_S, \mu_D \in X. \tag{68}$$

Тогда для любого $\omega > 0$ имеем

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial\varepsilon_0} > \frac{\omega}{3\sqrt{2}}\left|\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\varepsilon_0} + 3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\overline{\varepsilon}}\right|; \qquad \frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\overline{\varepsilon}} > \frac{1}{2\sqrt{2}\omega}\left|\frac{\partial\overline{\sigma}}{\partial\varepsilon_0} + 3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\overline{\varepsilon}}\right|. \tag{69}$$

Замечание 3. Анализ определяющих соотношений (42) для случая простого нагружения выполнен в работе [7]. Там же приведены примеры построения универсальных функций (42), удовлетворяющих условиям (43).

Замечание 4. Функциональные зависимости между инвариантами можно представить в следующей форме:

$$\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0, \overline{\sigma}); \qquad \overline{\sigma} = f(\overline{\varepsilon}, \sigma_0), \tag{70}$$

где $\varphi = \varphi(\varepsilon_0, \overline{\sigma})$, $f = f(\overline{\varepsilon}, \sigma_0)$ – функции, описывающие поверхности упрочнения материала. В этом случае кривые деформирования $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0)$, $\overline{\sigma} = \overline{\sigma}(\overline{\varepsilon})$ представляют собой геометрическое место точек пересечения указанных поверхностей плоскостями $\overline{\sigma}/\sigma_0 = \mathrm{const}$, что упрощает планирование и проведение эксперимента для построения зависимостей (70).

По аналогии с (40)–(42) уравнения состояния материала запишем в виде

$$\sigma = k(\varepsilon_0, \overline{\sigma})\varepsilon_S + 2G(\overline{\varepsilon}, \sigma_0)\varepsilon_D, \tag{71}$$

где $k(\varepsilon_0, \overline{\sigma})$ и $G(\overline{\varepsilon}, \sigma_0)$ – секущие модули объемной деформации и сдвига соответственно,

$$k(\varepsilon_0, \overline{\sigma}) = \frac{\varphi(\varepsilon_0, \overline{\sigma})}{\varepsilon_0}; \qquad G(\overline{\varepsilon}, \sigma_0) = \frac{f(\overline{\varepsilon}, \sigma_0)}{3\overline{\varepsilon}}. \tag{72}$$

Существование и единственность обобщенного решения. Полагаем, что рассматриваемое тело может быть неоднородным, а его упругие и пластические свойства зависят от координат $x \in \Omega$. Функции $x \to \varphi(x, \varepsilon_0, \overline{\sigma})$, $x \to f(x, \overline{\varepsilon}, \sigma_0)$ измеримы, а $x \to k(x, \varepsilon_0, \overline{\sigma})$, $x \to G(x, \overline{\varepsilon}, \sigma_0)$ измеримы и ограничены на Ω при всех ε_0, $\overline{\varepsilon}$, σ_0, $\overline{\sigma}$. Во всех точках области Ω кроме, быть может, множества меры нуль функции $\varepsilon_0, \overline{\sigma} \to \varphi(x, \varepsilon_0, \overline{\sigma})$, $\overline{\varepsilon}, \sigma_0 \to f(x, \overline{\varepsilon}, \sigma_0)$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные.

Определим нелинейный оператор A: $U \to U^*$ с помощью отображения

$$A(u)\colon v \in U \to (\sigma(u), \varepsilon(v))_X =$$

$$= (D(\varepsilon_0(u), \overline{\varepsilon}(u), \sigma_0(u), \overline{\sigma}(u))Bu, Bv)_X = \langle A(u), v\rangle, \tag{73}$$

где D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями. Оператор D: $X \to X$ определяется выражением

$$\eta, \mu \in X \to D(\varepsilon_0(\eta), \bar{\varepsilon}(\eta), \sigma_0(\eta), \bar{\sigma}(\eta))\mu =$$

$$= k(\varepsilon_0(\eta), \bar{\sigma}(\eta))\mu_S + 2G(\bar{\varepsilon}(\eta), \sigma_0(\eta))\mu_D, \tag{74}$$

где μ_S, μ_D – шаровая и девиаторная составляющие произвольного тензора деформаций $\mu \in X$. Элементы μ_S, μ_D обладают свойствами (22).

Теорема 3. Если функции $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\sigma})$ и $\bar{\sigma} = f(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)$, описывающие поверхности упрочнения материала, удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_0}}{1 - \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{\sigma}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_0}} \le k, \qquad k \le k_0 < \infty; \tag{75а}$$

$$0 < \frac{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}}}{1 - \dfrac{\partial \varphi}{\partial \bar{\sigma}} \dfrac{\partial f}{\partial \sigma_0}} \le 3G, \qquad G \le G_0 < \infty; \tag{75б}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_0} \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}} > \frac{1}{12}\left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_0} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_0} + 3 \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\sigma}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\varepsilon}} \right)^2, \tag{75в}$$

то оператор $\eta \to \Phi'(\eta)$ является положительно определенным и ограниченным при всех $\eta \in X$.

◀ Сделанные выше предположения о свойствах функций $\varphi = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\sigma})$ и $f = f(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)$ обеспечивают дифференцируемость по Фреше оператора $\eta \to D(\eta)$. Согласно (74) и правилам дифференцирования сложных отображений для произвольных η, μ, $\chi \in X$, имеем

$$dD(\eta;\mu)\chi = \left(\frac{\partial k(\varepsilon_0, \bar{\sigma})}{\partial \varepsilon_0} d\varepsilon_0(\eta;\mu) + \frac{\partial k(\varepsilon_0, \bar{\sigma})}{\partial \bar{\sigma}} d\bar{\sigma}(\eta;\mu) \right) \chi_S +$$

$$+ 2\left(\frac{\partial G(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)}{\partial \bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu) + \frac{\partial G(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)}{\partial \sigma_0} d\sigma_0(\eta;\mu) \right) \chi_D, \tag{76}$$

где $d\varepsilon_0(\eta;\mu)$ и $d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu)$ – дифференциалы отображений $\eta \in X \to \varepsilon_0(\eta)$ и $\eta \in X \to \bar{\varepsilon}(\eta)$ на приращении $\mu \in X$, определяемые соотношениями (46); $d\sigma_0(\eta;\mu)$ и $d\bar{\sigma}(\eta;\mu)$ – дифференциалы отображений $\eta \in X \to \sigma_0(\eta)$ и $\eta \in X \to \bar{\sigma}(\eta)$ на приращении $\mu \in X$.

С использованием зависимостей (70) получим

$$d\sigma_0 = \frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_0} d\varepsilon_0 + \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\sigma}} d\bar{\sigma}; \qquad d\bar{\sigma} = \frac{\partial f}{\partial\bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon} + \frac{\partial f}{\partial\sigma_0} d\sigma_0, \tag{77}$$

откуда следует

$$d\sigma_0 = \frac{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_0} d\varepsilon_0 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{\sigma}} \dfrac{\partial f}{\partial\bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon}}{1 - \dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{\sigma}} \dfrac{\partial f}{\partial\sigma_0}}; \qquad d\bar{\sigma} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial\bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon} + \dfrac{\partial f}{\partial\sigma_0} \dfrac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_0} d\varepsilon_0}{1 - \dfrac{\partial\varphi}{\partial\bar{\sigma}} \dfrac{\partial f}{\partial\sigma_0}}. \tag{78}$$

Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$\begin{cases} h_0 = \dfrac{\partial\varphi(\varepsilon_0, \bar{\sigma})}{\partial\varepsilon_0}; & \bar{h} = \dfrac{\partial\varphi(\varepsilon_0, \bar{\sigma})}{\partial\bar{\sigma}}; & \bar{h}_0 = \dfrac{h_0}{1 - 3\bar{h}g_0}; \\ g_0 = \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial f(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)}{\partial\sigma_0}; & \bar{g} = \dfrac{1}{3}\dfrac{\partial f(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)}{\partial\bar{\varepsilon}}; & \bar{g}_0 = \dfrac{\bar{g}}{1 - 3\bar{h}g_0}. \end{cases} \tag{79}$$

Тогда с учетом равенств

$$\begin{array}{ll} \dfrac{\partial k(\varepsilon_0, \bar{\sigma})}{\partial\varepsilon_0} = \dfrac{h_0 - k}{\varepsilon_0}; & \dfrac{\partial k(\varepsilon_0, \bar{\sigma})}{\partial\bar{\sigma}} = \dfrac{\bar{h}}{\varepsilon_0}; \\ \dfrac{\partial G(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)}{\partial\bar{\varepsilon}} = \dfrac{\bar{g} - G}{\bar{\varepsilon}}; & \dfrac{\partial G(\bar{\varepsilon}, \sigma_0)}{\partial\sigma_0} = \dfrac{g_0}{\bar{\varepsilon}} \end{array} \tag{80}$$

на основании формул (8), (48), (76)–(80) для произвольных $\eta, \mu \in X$ получим

$$\Phi'(\eta)\mu = (\bar{h}_0 - k)\frac{(\eta_S, \mu_S)}{\|\eta_S\|^2}\eta_S + 3\sqrt{2}\,\bar{h}\bar{g}_0 \frac{(\eta_D, \mu_D)}{\|\eta_S\|\|\eta_D\|}\eta_S +$$

$$+\sqrt{2}g_0\bar{h}_0 \frac{(\eta_S, \mu_S)}{\|\eta_S\|\|\eta_D\|}\eta_D + 2(\bar{g}_0 - G)\frac{(\eta_D, \mu_D)}{\|\eta_D\|^2}\eta_D + D(\eta)\mu. \tag{81}$$

Значит,

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) = (\bar{h}_0 - k)\frac{(\eta_S, \mu_S)^2}{\|\eta_S\|^2} + \sqrt{2}(3\bar{h}\bar{g}_0 + g_0\bar{h}_0)\frac{(\eta_S, \mu_S)(\eta_D, \mu_D)}{\|\eta_S\|\|\eta_D\|} +$$

$$+2(\bar{g}_0 - G)\frac{(\eta_D, \mu_D)^2}{\|\eta_D\|^2} + k\|\mu_S\|^2 + 2G\|\mu_D\|^2. \tag{82}$$

Согласно условиям (75а,б) имеем

$$\bar{h}_0 - k \le 0; \qquad \bar{g}_0 - G \le 0. \tag{83}$$

Тогда с учетом неравенств (54) и (83) для произвольных $\eta, \mu \in X$ из равенства (82) следует

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) \ge \bar{h}_0 \|\mu_S\|^2 + 2\bar{g}_0 \|\mu_D\|^2 - \sqrt{2}\,|3\bar{h}\bar{g}_0 + g_0\bar{h}_0|\, \|\mu_S\|\,\|\mu_D\|. \tag{84}$$

Введем в рассмотрение симметричную матрицу

$$S = \begin{bmatrix} \bar{h}_0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}|3\bar{h}\bar{g}_0 + g_0\bar{h}_0| \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}|3\bar{h}\bar{g}_0 + g_0\bar{h}_0| & 2\bar{g}_0 \end{bmatrix}. \tag{85}$$

Покажем, что условия (75) обеспечивают положительную определенность матрицы S. Действительно, след $tr(S)$ и определитель $\det(S)$ матрицы S находятся по соотношениям

$$tr(S) = \bar{h}_0 + 2\bar{g}_0; \qquad \det(S) = 2\bar{h}_0\bar{g}_0 - \frac{1}{2}(3\bar{h}\bar{g}_0 + g_0\bar{h}_0)^2. \tag{86}$$

Следовательно, на основании формулы (59) получаем необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы S:

$$\bar{h}_0 > 0; \qquad \bar{g}_0 > 0; \qquad 4\bar{h}_0\bar{g}_0 > (3\bar{h}\bar{g}_0 + g_0\bar{h}_0)^2. \tag{87}$$

Сопоставляя неравенства (75) и (87), можно заключить, что они эквивалентны. Тогда неравенство (10) выполняется с постоянной $m = \operatorname{vrai}\min\limits_{x\in\Omega} \min\limits_{\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\sigma_0,\bar{\sigma}} \delta(x,\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\sigma_0,\bar{\sigma}) > 0$, где δ – наименьшее собственное значение матрицы S.

Для доказательства неравенства (11) заметим, что при фиксированном $\eta \in X$ оператор $\Phi'(\eta)$ не является самосопряженным и, значит, необходимо оценить сверху $\|\Phi'(\eta)\mu\|$ при всех $\mu \in X$.

В соответствии с равенством (81) находим

$$\|\Phi'(\eta)\mu\|^2 = (\bar{h}_0^2 - k^2 + 2g_0^2\bar{h}_0^2)\frac{(\eta_S, \mu_S)^2}{\|\eta_S\|^2} + 2[9\bar{h}^2\bar{g}_0^2 +$$

$$+ 2(\bar{g}_0^2 - G^2)]\frac{(\eta_D, \mu_D)^2}{\|\eta_D\|^2} + 2\sqrt{2}\,\bar{g}_0\bar{h}_0(3\bar{h} + 2g_0)\frac{(\eta_S, \mu_S)(\eta_D, \mu_D)}{\|\eta_S\|\,\|\eta_D\|} +$$

$$+k^2||\mu_S||^2+4G^2||\mu_D||^2, \qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \tag{88}$$

С использованием неравенств (54) и (82) получим

$$||\Phi'(\eta)\mu||^2\le(k^2+2g_0^2\bar{h}_0^2)||\mu_S||^2+2(2G^2+9\bar{h}^2\bar{g}_0^2)||\mu_D||^2+$$

$$+2\sqrt{2}\,\bar{g}_0\bar{h}_0\,|3\bar{h}+2g_0|\,||\mu_S||\,||\mu_D||, \qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \tag{89}$$

Для выполнения неравенства (11) достаточно, чтобы коэффициенты симметричной матрицы

$$Q=\begin{bmatrix} k^2+2g_0^2\bar{h}_0^2 & \sqrt{2}\,\bar{g}_0\bar{h}_0\,|3\bar{h}+2g_0| \\ \sqrt{2}\,\bar{g}_0\bar{h}_0\,|3\,\bar{h}+2g_0| & 2(2G^2+9\bar{h}^2\bar{g}_0^2) \end{bmatrix} \tag{90}$$

были ограничены на множестве Ω. Действительно, пусть Δ – наибольшее собственное значение матрицы Q. Покажем, что справедлива оценка

$$\Delta\le 2(k_0^2+g_0^2\bar{h}_0^2+9\bar{h}^2\bar{g}_0^2). \tag{91}$$

С учетом соотношений

$$\begin{aligned} &tr(Q)=k^2+2g_0^2\bar{h}_0^2+2(2G^2+9\bar{h}^2\bar{g}_0^2);\\ &\det(Q)=2[(k^2+2g_0^2\bar{h}_0^2)(2G^2+9\bar{h}^2\bar{g}_0^2)-\bar{g}_0^2\bar{h}_0^2(3\bar{h}+2g_0)^2] \end{aligned} \tag{92}$$

и неравенств $k\ge\bar{h}_0$ и $G\ge\bar{g}_0$ получаем оценку

$$\det(Q)\ge 4\bar{g}_0^2\bar{h}_0^2(1-3\bar{h}g_0)^2\ge 0 \tag{93}$$

и, следовательно, на основании формулы (67) приходим к неравенству $\Delta\le tr(Q)$. Кроме того, по условию теоремы $k\le k_0$ и $G\le G_0\le k_0/2$ и, значит, имеем оценку (91). Таким образом, справедливо неравенство (11) с постоянной $M=\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega}\ \max\limits_{\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\sigma_0,\bar{\sigma}}\sqrt{\Delta(x,\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\sigma_0,\bar{\sigma})}<\infty$. ▶

О разрешимости краевых задач деформационной теории пластичности, учитывающей вид девиатора напряжений. При построении классических уравнений теории малых упругопластических деформаций постулируется гипотеза о единой не зависящей от вида девиатора напряжений σ_D функциональной зависимости между интенсивностями напряжений $\bar{\sigma}$ и деформаций $\bar{\varepsilon}$, которая характеризует диаграмму деформирования материала:

$$\bar{\sigma}=f(\bar{\varepsilon}). \tag{94}$$

В то же время в работах Е. Дэвиса и Ю. И. Ягна, И. Н. Виноградова и О. А. Шишмарева, а также других авторов показано, что существуют конструкционные материалы, для которых указанная гипотеза экспериментально не подтверждается. Результаты экспериментальных исследований влияния вида девиатора напряжений на характер изменения обобщенных кривых деформирования материала $\overline{\sigma}-\overline{\varepsilon}$ содержатся и в более поздних работах [8–10].

Вид девиатора напряжений характеризуется параметром Лоде λ_σ, который определяется по выражению

$$\lambda_\sigma = 2\frac{\sigma_2-\sigma_3}{\sigma_1-\sigma_3}-1, \qquad \lambda_\sigma \in [-1, 1], \tag{95}$$

т.е. является функцией главных напряжений $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ и связан с третьим инвариантом девиатора напряжений $I_3(\sigma_D)$ следующими соотношениями:

$$\lambda_\sigma = -\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\left(\vartheta_\sigma + \frac{4}{3}\pi\right); \qquad \vartheta_\sigma = \frac{1}{3}\arccos\left[\frac{3\sqrt{3}}{2}\frac{I_3(\sigma_D)}{\sqrt{I_2^3(\sigma_D)}}\right], \tag{96}$$

где $I_2(\sigma_D)$ – второй инвариант девиатора напряжений, однозначно выражающийся через интенсивность напряжений $\overline{\sigma}=\sqrt{3I_2(\sigma_D)}$.

Предположим, что на основе экспериментального изучения свойств деформирования материала построена определенная функциональная зависимость $\overline{\sigma}-\overline{\varepsilon}$, включающая λ_σ на участке упругопластических деформаций:

$$\overline{\sigma} = f(\overline{\varepsilon}, \lambda_\sigma). \tag{97}$$

При этом полагаем, что шаровой тензор не влияет на характер изменения обобщенных кривых деформирования. Тогда, если принять, что изменение объема – чисто упругое, а девиаторы напряжений σ_D и деформаций ε_D подобны, введение параметра λ_σ в функциональную зависимость $\overline{\sigma}-\overline{\varepsilon}$ позволяет учесть влияние вида девиатора напряжений на механические свойства среды при исследовании упругопластического деформирования материала в рамках принятых допущений.

Согласно принятому допущению о пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций, главные оси напряжений и деформаций совпадают и, следовательно, $\lambda_\sigma \equiv \lambda_\varepsilon$, где λ_ε – параметр Лоде, определяемый выражением

$$\lambda_\varepsilon = 2\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_3}{\varepsilon_1-\varepsilon_3}-1, \qquad \lambda_\varepsilon \in [-1, 1]. \tag{98}$$

Исходя из этого функциональную зависимость (97) можно представить в виде

$$\overline{\sigma} = f(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon), \tag{99}$$

причем в области упругих деформаций

$$f(\bar{\varepsilon},\cdot)=3G_0\bar{\varepsilon}. \tag{100}$$

В соответствии с принятыми выше допущениями об упругом изменении объема и пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций имеем

$$\sigma_S=k_0\varepsilon_S; \qquad \sigma_D=2G(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)\varepsilon_D, \tag{101}$$

где k_0 – начальный модуль объемной деформации; $G(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)$ – секущий модуль сдвига,

$$G(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)=\frac{f(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{3\bar{\varepsilon}}, \tag{102}$$

откуда следует, что поведение материала описывается уравнением

$$\sigma=k_0\varepsilon_S+2G(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)\varepsilon_D. \tag{103}$$

Существование и единственность обобщенного решения. Полагаем, что материал изотропный, а рассматриваемое тело может быть неоднородным, т.е. его упругие и пластические свойства могут зависеть от координат $x\in\Omega$. Функция $x\to f(x,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)$ измерима и ограничена на Ω при всех $\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon$. Во всех точках области Ω кроме, быть может, множества меры нуль функция $\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon\to f(x,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)$ непрерывна и имеет ограниченные частные производные.

Определим нелинейный оператор A: $U\to U^*$ с помощью отображения

$$A(u)\colon v\in U\to(\sigma(u),\varepsilon(v))_X=(D(\bar{\varepsilon}(u),\lambda_\varepsilon(u))Bu,Bv)_X=\langle A(u),v\rangle, \tag{104}$$

где D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями. Оператор D: $X\to X$ определяется из выражения

$$\eta,\mu\in X\to D(\bar{\varepsilon}(\eta),\lambda_\varepsilon(\eta))\mu=k_0\mu_S+2G(\bar{\varepsilon}(\eta),\lambda_\varepsilon(\eta))\mu_D, \tag{105}$$

где μ_S, μ_D – шаровая и девиаторная составляющие произвольного тензора деформаций $\mu\in X$, обладающие свойствами (22).

Теорема 4. Если функция $\bar{\sigma}=f(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)$, описывающая кривые деформирования материала, удовлетворяет условиям

$$\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\bar{\varepsilon}}\left|\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\lambda_\varepsilon}\right|<\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}}\le 3G; \qquad G\le G_0<\infty, \tag{106}$$

то оператор $\eta\to\Phi'(\eta)$ является положительно определенным и ограниченным при всех $\eta\in X$.

◀ Сделанные выше предположения о свойствах функции $f = f(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$ обеспечивают дифференцируемость по Фреше оператора $\eta \to D(\eta)$. Согласно (105) и правилам дифференцирования сложных отображений, имеем

$$dD(\eta;\mu)\chi = 2\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial G(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)}{\partial \overline{\varepsilon}}\frac{(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_D||} + \frac{\partial G(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)}{\partial \lambda_\varepsilon} d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)\right)\chi_D, \quad \forall \eta, \mu, \chi \in X, \tag{107}$$

где $d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)$ – дифференциал отображения $\eta \to \lambda_\varepsilon(\eta)$ в точке $\eta \in X$ на приращении $\mu \in X$.

Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$\overline{g} = \frac{1}{3}\frac{\partial f(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)}{\partial \overline{\varepsilon}}; \qquad g_\lambda = \frac{1}{3}\frac{\partial f(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)}{\partial \lambda_\varepsilon}. \tag{108}$$

Тогда с учетом равенств

$$\frac{\partial G(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)}{\partial \overline{\varepsilon}} = \frac{\overline{g} - G}{\overline{\varepsilon}}; \qquad \frac{\partial G(\overline{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)}{\partial \lambda_\varepsilon} = \frac{g_\lambda}{\overline{\varepsilon}} \tag{109}$$

на основании формул (8), (107)–(109) для произвольных $\eta, \mu \in X$ получим

$$\Phi'(\eta)\mu = 2(\overline{g} - G)\frac{(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_D||^2}\eta_D + \sqrt{6}\, g_\lambda \frac{d\lambda_\varepsilon(\eta;\, \mu)}{||\eta_D||}\eta_D + D(\eta)\mu. \tag{110}$$

Следовательно,

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) = 2(\overline{g} - G)\frac{(\eta_D, \mu_D)^2}{||\eta_D||^2} + \sqrt{6} g_\lambda d\lambda_\varepsilon(\eta;\, \mu)\frac{(\eta_D, \mu_D)}{||\eta_D||} +$$

$$+ k_0 ||\mu_S||^2 + 2G||\mu_D||^2, \qquad \forall \eta, \mu \in X. \tag{111}$$

В соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца, имеем

$$|(\eta_D, \mu_D)| \le ||\eta_D||\, ||\mu_D||, \qquad \forall \eta_D, \mu_D \in X. \tag{112}$$

Кроме того, согласно первому условию (106) справедливо неравенство

$$\overline{g} - G \le 0. \tag{113}$$

Тогда из равенства (111) следует

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) \ge k_0 ||\mu_S||^2 + 2\overline{g}\, ||\mu_D||^2 - \sqrt{6}|g_\lambda|\, |d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)|\, ||\mu_D||, \quad \forall \eta, \mu \in X. \tag{114}$$

Оценим сверху $|d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)|$. Дифференциал $d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)$ отображения $\eta\in X\to\lambda_\varepsilon(\eta)$ на приращении $\mu\in X$ определяется выражением

$$d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)=(\lambda'_\varepsilon(\eta),\mu),\qquad \forall\,\eta,\mu\in X, \tag{115}$$

где $\lambda'_\varepsilon(\eta)$ – производная функционала $\lambda_\varepsilon(\eta)$ в точке $\eta\in X$. С использованием формулы (98) для произвольных $\eta,\mu\in X$ находим

$$(\lambda'_\varepsilon(\eta),\mu)=\frac{2}{(\eta_1-\eta_3)^2}[(\eta_3-\eta_2)\mu_1+(\eta_1-\eta_3)\mu_2+(\eta_2-\eta_1)\mu_3]. \tag{116}$$

Если в равенстве (116) положить $\mu=\lambda'_\varepsilon(\eta)$, то получим

$$\|\lambda'_\varepsilon(\eta)\|=\frac{3\sqrt{2}}{(\eta_1-\eta_3)^2}\bar{\varepsilon}(\eta),\qquad \forall\,\eta\in X. \tag{117}$$

Преобразовав в последнем выражении знаменатель с помощью элементарных равенств

$$1+\lambda_\varepsilon(\eta)=2\frac{\eta_2-\eta_3}{\eta_1-\eta_3};\qquad 1-\lambda_\varepsilon(\eta)=2\frac{\eta_1-\eta_2}{\eta_1-\eta_3},\qquad \forall\,\eta\in X, \tag{118}$$

получим

$$\eta_1-\eta_3=\frac{3\bar{\varepsilon}(\eta)}{\sqrt{3+\lambda_\varepsilon^2(\eta)}},\qquad \forall\,\eta\in X. \tag{119}$$

Тогда выражение (117) можно представить в следующем виде:

$$\|\lambda'_\varepsilon(\eta)\|=\frac{\sqrt{2}}{3\bar{\varepsilon}(\eta)}(3+\lambda_\varepsilon^2(\eta)),\qquad \forall\,\eta\in X. \tag{120}$$

На основании формулы (116) приходим к условию ортогональности оператора $\lambda'_\varepsilon(\eta)$ любому элементу $\mu_S\in X$:

$$(\lambda'_\varepsilon(\eta),\mu_S)=0,\qquad \forall\,\eta,\mu_S\in X. \tag{121}$$

С учетом соотношений (115) и (121) имеем

$$d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)=(\lambda'_\varepsilon(\eta),\mu_D),\qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \tag{122}$$

Тогда в соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца, находим

$$|d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)|\le\|\lambda'_\varepsilon(\eta)\|\,\|\mu_D\|=\frac{\sqrt{2}}{3\bar{\varepsilon}(\eta)}(3+\lambda_\varepsilon^2(\eta))\,\|\mu_D\|,\qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \tag{123}$$

Следовательно, для любых $\eta, \mu \in X$ справедливо неравенство

$$(\Phi'(\eta)\mu, \mu) \geq k_0 \,||\mu_S||^2 + 2(\bar{g} - \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\bar{\varepsilon}}|g_\lambda|)\,||\mu_D||^2. \qquad (124)$$

Согласно условию теоремы выражение в круглых скобках (124) неотрицательно. Более того, определяя постоянную δ такую, что

$$\delta = \frac{2}{3}\min_{\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon}\left(\frac{\partial f(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\bar{\varepsilon}} - \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\bar{\varepsilon}}\left|\frac{\partial f(\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\lambda_\varepsilon}\right|\right) > 0, \qquad (125)$$

получаем неравенство (10) с постоянной $m = \operatorname*{vrai\,min}_{x\in\Omega}\delta(x) > 0$.

Для доказательства неравенства (11) заметим, что при фиксированном $\eta \in X$ оператор $\Phi'(\eta)$ не является самосопряженным, и следовательно, необходимо оценить сверху $||\Phi'(\eta)\mu||$ при всех $\mu \in X$.

В соответствии с равенством (110) имеем

$$||\Phi'(\eta)\mu||^2 = 4(\bar{g}^2 - G^2)\frac{(\eta_D,\mu_D)^2}{||\eta_D||^2} + 6g_\lambda^2|d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)|^2 +$$

$$+4\sqrt{6}\,\bar{g}g_\lambda d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_D||} + k_0^2||\mu_S||^2 + 4G^2||\mu_D||^2, \quad \forall\,\eta,\mu\in X, \qquad (126)$$

откуда с учетом неравенств (106), (112), (113) и (123) для произвольных $\eta, \mu \in X$ находим

$$||\Phi'(\eta)\mu||^2 \leq k_0^2\,||\mu_S||^2 + 4(G^2 + 3\bar{g}^2)||\mu_D||^2 \leq 4k_0^2\,||\mu||^2, \qquad (127)$$

что приводит к (11) с постоянной $M \leq 2\operatorname*{vrai\,max}_{x\in\Omega} k_0(x) < \infty$. ▶

Учет гидростатического напряжения и вида девиатора напряжений. Рассмотрим вариант деформационной теории пластичности, в которой функциональные зависимости между инвариантами принимаются в виде

$$\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon}); \qquad \bar{\sigma} = f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\sigma). \qquad (128)$$

Предположим, что в процессе деформирования девиатор напряжений σ_D пропорционален девиатору деформаций ε_D в каждой точке тела. Тогда главные оси напряжений и деформаций совпадают и, следовательно, $\lambda_\sigma \equiv \lambda_\varepsilon$. Исходя из этого функциональные зависимости (128) допускают эквивалентную форму представления следующего вида:

$$\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon}); \qquad \bar{\sigma} = f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon), \qquad (129)$$

причем в области упругих деформаций

$$\varphi(\varepsilon_0, \cdot) = k_0 \varepsilon_0; \qquad f(\cdot, \bar{\varepsilon}, \cdot) = 3G_0 \bar{\varepsilon}, \tag{130}$$

где k_0, G_0 – начальные модули объемной деформации и сдвига соответственно.

Согласно принятому допущению о пропорциональности девиаторов напряжений и деформаций с учетом зависимостей (129) получим

$$\sigma_S = k(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}) \varepsilon_S; \qquad \sigma_D = 2G(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon) \varepsilon_D, \tag{131}$$

где $k(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ и $G(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$ – секущие модули объемной деформации и сдвига соответственно,

$$k(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}) = \frac{\varphi(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})}{\varepsilon_0}; \qquad G(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon) = \frac{f(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)}{3\bar{\varepsilon}}, \tag{132}$$

откуда следует, что поведение материала описывается уравнением

$$\sigma = k(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}) \varepsilon_S + 2G(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon) \varepsilon_D. \tag{133}$$

Существование и единственность обобщенного решения. Полагаем, что материал изотропный, а рассматриваемое тело может быть неоднородным, т.е. его упругие и пластические свойства зависят от координат $x \in \Omega$. Функции $x \to \varphi(x, \varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ и $x \to f(x, \varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$ измеримы и ограничены на Ω при всех ε_0, $\bar{\varepsilon}$, λ_ε. Во всех точках области Ω кроме, может быть, множества меры нуль функции $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon} \to \varphi(x, \varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ и $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon \to f(x, \varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$ непрерывны и имеют ограниченные частные производные.

Определим нелинейный оператор A: $U \to U^*$ с помощью отображения

$$A(u)\colon v \to (\sigma(u), \varepsilon(v))_X = (D(\varepsilon_0(u), \bar{\varepsilon}(u), \lambda_\varepsilon(u)) Bu, Bv)_X = \langle A(u), v \rangle, \tag{134}$$

где D – нелинейный оператор, отображающий X в себя и устанавливающий взаимосвязь между напряжениями и деформациями. Оператор D: $X \to X$ определяется из выражения

$$\eta, \mu \in X \to D(\varepsilon_0(\eta), \bar{\varepsilon}(\eta), \lambda_\varepsilon(\eta)) \mu =$$

$$= k(\varepsilon_0(\eta), \bar{\varepsilon}(\eta)) \mu_S + 2G(\varepsilon_0(\eta), \bar{\varepsilon}(\eta), \lambda_\varepsilon(\eta)) \mu_D. \tag{135}$$

Теорема 5. Если функции $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ и $\bar{\sigma} = f(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$, описывающие поверхности упрочнения материала, удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0} \le k, \qquad k \le k_0 < \infty; \tag{136a}$$

$$\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\bar{\varepsilon}}\left|\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\lambda_\varepsilon}\right| < \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} \le 3G, \qquad G \le G_0 < \infty; \tag{136б}$$

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial\varepsilon_0}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}} - \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\bar{\varepsilon}}\left|\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\lambda_\varepsilon}\right|\right) > \frac{1}{12}\left(\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon_0} + 3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\bar{\varepsilon}}\right)^2, \tag{136в}$$

то оператор $\eta \to \Phi'(\eta)$ является положительно определенным и ограниченным при всех $\eta \in X$.

◀ Сделанные выше предположения о свойствах функций $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon})$ и $\bar{\sigma} = f(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$ обеспечивают дифференцируемость по Фреше оператора $\eta \to D(\eta)$. Согласно (135) и правилам дифференцирования сложных отображений, имеем

$$dD(\eta;\mu)\chi = \left(\frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_0} d\varepsilon_0(\eta;\mu) + \frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial\bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu)\right)\chi_S +$$

$$+2\left(\frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\varepsilon_0} d\varepsilon_0(\eta;\mu) + \frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\bar{\varepsilon}} d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\lambda_\varepsilon} d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)\right)\chi_D, \qquad \forall\, \eta,\mu,\chi \in X, \tag{137}$$

где $d\varepsilon_0(\eta;\mu)$, $d\bar{\varepsilon}(\eta;\mu)$, $d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)$ – дифференциалы отображений $\eta \to \varepsilon_0(\eta)$, $\eta \to \bar{\varepsilon}(\eta)$, $\eta \to \lambda_\varepsilon(\eta)$ в точке $\eta \in X$ на приращении $\mu \in X$.

С использованием соотношений (48) получим

$$dD(\eta;\mu)\chi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_0}\frac{(\eta_S,\mu_S)}{\|\eta_S\|} + \sqrt{2}\frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial\bar{\varepsilon}}\frac{(\eta_D,\mu_D)}{\|\eta_D\|}\right)\chi_S +$$

$$+2\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\varepsilon_0}\frac{(\eta_S,\mu_S)}{\|\eta_S\|} + \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\bar{\varepsilon}}\frac{(\eta_D,\mu_D)}{\|\eta_D\|} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\lambda_\varepsilon} d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)\right)\chi_D, \qquad \forall\, \eta,\mu,\chi \in X. \tag{138}$$

Введем для удобства записи следующие обозначения:

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{\partial\varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial\varepsilon_0}; & \bar{h} &= \frac{\partial\varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial\bar{\varepsilon}}; & h_\lambda &= \frac{\partial\varphi(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial\lambda_\varepsilon}; \\ g_0 &= \frac{1}{3}\frac{\partial f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\varepsilon_0}; & \bar{g} &= \frac{1}{3}\frac{\partial f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\bar{\varepsilon}}; & g_\lambda &= \frac{1}{3}\frac{\partial f(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial\lambda_\varepsilon}. \end{aligned} \tag{139}$$

Тогда с учетом равенств

$$\frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon_0}=\frac{h_0-k}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \bar{\varepsilon}}=\frac{\bar{h}}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{\partial k(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon})}{\partial \lambda_\varepsilon}=\frac{h_\lambda}{\varepsilon_0};$$
$$\frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial \bar{\varepsilon}}=\frac{\bar{g}-G}{\bar{\varepsilon}}; \quad \frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial \varepsilon_0}=\frac{g_0}{\bar{\varepsilon}}; \quad \frac{\partial G(\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}{\partial \lambda_\varepsilon}=\frac{g_\lambda}{\bar{\varepsilon}} \tag{140}$$

для произвольных $\eta, \mu, \chi \in X$ находим

$$dD(\eta;\mu)\chi=\left((h_0-k)\frac{(\eta_S,\mu_S)}{||\eta_S||^2}+\sqrt{2}\bar{h}\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_S||\,||\eta_D||}\right)\chi_S+$$
$$+\left(\sqrt{2}g_0\frac{(\eta_S,\mu_S)}{||\eta_S||\,||\eta_D||}+2(\bar{g}-G)\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_D||^2}+\sqrt{6}g_\lambda\frac{d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)}{||\eta_D||}\right)\chi_D. \tag{141}$$

Следовательно,

$$(\Phi'(\eta)\mu,\mu)=(h_0-k)\frac{(\eta_S,\mu_S)^2}{||\eta_S||^2}+\sqrt{2}(\bar{h}+g_0)\frac{(\eta_S,\mu_S)(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_S||\,||\eta_D||}+$$
$$+\sqrt{6}g_\lambda\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_D||}d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)+2(\bar{g}-G)\frac{(\eta_D,\mu_D)^2}{||\eta_D||^2}+$$
$$+k||\mu_S||^2+2G||\mu_D||^2, \qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \tag{142}$$

В соответствии с неравенством Коши–Буняковского–Шварца, имеем

$$|(\eta_S,\mu_S)|\le||\eta_S||\,||\mu_S||, \quad \forall\,\eta_S,\mu_S\in X;$$
$$|(\eta_D,\mu_D)|\le||\eta_D||\,||\mu_D||, \quad \forall\,\eta_D,\mu_D\in X. \tag{143}$$

Кроме того, согласно условиям (136а,б) выполняются неравенства

$$h_0-k\le 0; \qquad \bar{g}-G\le 0. \tag{144}$$

Тогда из равенства (142) следует

$$(\Phi'(\eta)\mu,\mu)\ge h_0||\mu_S||^2+2\bar{g}||\mu_D||^2-\sqrt{2}|\bar{h}+g_0|\,||\mu_S||\,||\mu_D||-$$
$$-\sqrt{6}\,|g_\lambda|\,||\mu_D||\,|d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)|, \qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \tag{145}$$

С использованием оценки (123) находим

$$(\Phi'(\eta)\mu,\mu)\geq h_0\,||\mu_S||^2+2\left(\overline{g}-\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\overline{\varepsilon}}|g_\lambda|\right)||\mu_D||^2-$$

$$-\sqrt{2}\,|\overline{h}+g_0|\,||\mu_S||\,||\mu_D||,\qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \tag{146}$$

Определим симметричную матрицу

$$S=\begin{bmatrix} h_0 & -\dfrac{1}{\sqrt{2}}|\overline{h}+g_0| \\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}|\overline{h}+g_0| & 2\left(\overline{g}-\dfrac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\overline{\varepsilon}}|g_\lambda|\right)\end{bmatrix}. \tag{147}$$

Покажем, что если выполняются условия (136), то S – положительно определенная матрица. Действительно, с учетом соотношений

$$\begin{aligned} tr(S)&=h_0+2\left(\overline{g}-\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\overline{\varepsilon}}|g_\lambda|\right);\\ \det(S)&=2h_0\left(\overline{g}-\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\overline{\varepsilon}}|g_\lambda|\right)-\frac{1}{2}(\overline{h}+g_0)^2 \end{aligned} \tag{148}$$

на основании формулы (59) получаем необходимые и достаточные условия положительной определенности матрицы S:

$$h_0>0;\qquad \overline{g}>\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\overline{\varepsilon}}|g_\lambda|;\qquad 4h_0\left(\overline{g}-\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\overline{\varepsilon}}|g_\lambda|\right)>(\overline{h}+g_0)^2. \tag{149}$$

Сопоставление неравенств (136) и (150) показывает, что они эквивалентны, и, значит, неравенство (10) выполняется с постоянной $m=\operatorname{vrai}\min\limits_{x\in\Omega}$ $\min\limits_{\varepsilon_0,\overline{\varepsilon},\lambda_\varepsilon}\delta(x,\varepsilon_0,\overline{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)>0.$

Для доказательства неравенства (11) заметим, что при фиксированном $\eta\in X$ оператор $\Phi'(\eta)$ не является самосопряженным. Следовательно, необходимо оценить сверху $||\Phi'(\eta)\mu\,||$ при всех $\mu\in X$.

В соответствии с равенством (141) для произвольных $\eta,\mu\in X$ имеем

$$||\Phi'(\eta)\mu||^2=(h_0^2-k^2+2g_0^2)\frac{(\eta_S,\mu_S)^2}{||\eta_S||^2}+2[\overline{h}^2+2(\overline{g}^2-G^2)]\frac{(\eta_D,\mu_D)^2}{||\eta_D||^2}+$$

$$+2\sqrt{2}(h_0\bar{h}+2g_0\bar{g})\frac{(\eta_S,\mu_S)(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_S||\,||\eta_D||}+6g_\lambda^2|d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu)|^2+$$

$$+4\sqrt{3}\left(g_0\frac{(\eta_S,\mu_S)}{||\eta_S||}+\sqrt{2}\bar{g}\frac{(\eta_D,\mu_D)}{||\eta_D||}\right)g_\lambda d\lambda_\varepsilon(\eta;\mu). \qquad (150)$$

С использованием неравенств (123), (143) и (144) получаем

$$||\Phi'(\eta)\mu||^2\le(k^2+2g_0^2)||\mu_S||^2+2(2G^2+\bar{h}^2+6\bar{g}^2)||\mu_D||^2+$$

$$+2\sqrt{2}(h_0|\bar{h}|+4\bar{g}|g_0|)||\mu_S||\,||\mu_D||, \qquad \forall\,\eta,\mu\in X. \qquad (151)$$

Определим симметричную матрицу

$$Q=\begin{bmatrix} k^2+2g_0^2 & \sqrt{2}(h_0|\bar{h}|+4\bar{g}|g_0|) \\ \sqrt{2}(h_0|\bar{h}|+4\bar{g}|g_0|) & 2(2G^2+\bar{h}^2+6\bar{g}^2)\end{bmatrix}. \qquad (152)$$

Наибольшее собственное значение матрицы Q обозначим через Δ. Покажем, что справедлива оценка

$$\Delta\le 5k_0^2+2(g_0^2+\bar{h}^2). \qquad (153)$$

Действительно, с учетом соотношений

$$\begin{aligned}&tr(Q)=k^2+2g_0^2+2(2G^2+\bar{h}^2+6\bar{g}^2);\\ &\det(Q)=2[(k^2+2g_0^2)(2G^2+\bar{h}^2+6\bar{g}^2)-(h_0|\bar{h}|+4\bar{g}|g_0|)^2]\end{aligned} \qquad (154)$$

и неравенств $k\ge h_0$ и $G\ge\bar{g}$ получим оценку

$$\det(Q)\ge 4(2h_0\bar{g}-|\bar{h}|\,|g_0|)^2\ge 0 \qquad (155)$$

и, следовательно, на основании формулы (67) приходим к неравенству $\Delta\le tr(Q)$. Поскольку $k\le k_0$ и $\bar{g}\le G\le G_0$, то $tr(Q)\le k_0^2+2(8G_0^2+g_0^2+\bar{h}^2)$, что приводит к оценке (153). Таким образом, имеем неравенство (11) с положительной постоянной $M=\operatorname{vrai}\max\limits_{x\in\Omega}\max\limits_{\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon}\sqrt{\Delta(x,\varepsilon_0,\bar{\varepsilon},\lambda_\varepsilon)}<\infty$. ▶

Замечание 4. Эквивалентную форму записи условия (136в) получим из (146) с учетом ω-неравенства:

$$\frac{\partial\sigma_0}{\partial\varepsilon_0}>\frac{\omega}{3\sqrt{2}}\left|\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon_0}+3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\bar{\varepsilon}}\right|;\qquad \frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\bar{\varepsilon}}>\frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\bar{\varepsilon}}\left|\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\lambda_\varepsilon}\right|+\frac{1}{2\sqrt{2}\,\omega}\left|\frac{\partial\bar{\sigma}}{\partial\varepsilon_0}+3\frac{\partial\sigma_0}{\partial\bar{\varepsilon}}\right|. \qquad (156)$$

Замечание 5. Поскольку деформированное состояние в каждой точке тела однозначно определяется с помощью трех инвариантов $\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon$, функциональные зависимости между инвариантами в общем случае можно представить в виде

$$\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon); \qquad \bar{\sigma} = f(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon). \tag{157}$$

Что касается единственности решения краевой задачи, то справедлива следующая теорема, доказательство которой во многом повторяет доказательство теоремы 5 и поэтому не приводится.

Теорема 6. Если функции $\sigma_0 = \varphi(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$ и $\bar{\sigma} = f(\varepsilon_0, \bar{\varepsilon}, \lambda_\varepsilon)$, описывающие поверхности упрочнения материала, удовлетворяют условиям

$$0 < \frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0} \le \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0}; \qquad \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\bar{\varepsilon}} \left| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda_\varepsilon} \right| < \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} \le \frac{\bar{\sigma}}{\bar{\varepsilon}};$$
$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0}\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} - \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\bar{\varepsilon}} \left| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda_\varepsilon} \right| \right) > \frac{3}{4}\left(\left| \frac{1}{3}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}} \right| + \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\bar{\varepsilon}} \left| \frac{\partial \sigma_0}{\partial \lambda_\varepsilon} \right| \right)^2, \tag{158}$$

то существует не более одного решения уравнения (1) при любом $\rho \in U^*$.

При этом для любого $\omega > 0$ имеют место ω-неравенства:

$$\frac{\partial \sigma_0}{\partial \varepsilon_0} > \frac{\omega}{\sqrt{2}}\left(\left| \frac{1}{3}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}} \right| + \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\bar{\varepsilon}} \left| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda_\varepsilon} \right| \right);$$
$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{\varepsilon}} > \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\bar{\varepsilon}} \left| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda_\varepsilon} \right| + \frac{3}{2\sqrt{2}\,\omega}\left(\left| \frac{1}{3}\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \varepsilon_0} + \frac{\partial \sigma_0}{\partial \bar{\varepsilon}} \right| + \frac{3+\lambda_\varepsilon^2}{\sqrt{3}\,\bar{\varepsilon}} \left| \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \lambda_\varepsilon} \right| \right). \tag{159}$$

Замечание 6. Из свойств оператора $\Phi'(\eta)$, установленных с помощью теорем 1–6, результатов леммы и общих результатов о сильномонотонных и липшиц-непрерывных операторах следует однозначная разрешимость уравнения (1) при любом $\rho \in U^*$, а также непрерывная зависимость решения $u \in U$ от правой части, т.е. от приложенных нагрузок.

Заключение. Приведенные выше результаты показывают, что практическое построение поверхностей упрочнения материала необходимо осуществлять с учетом двух факторов. С одной стороны, аппроксимирующие функции должны достаточно точно приближать действительные поверхности упрочнения, полученные по данным эксперимента, с другой – удовлетворять условиям, при которых обеспечивается однозначная разрешимость краевой задачи.

Резюме

Розглянуто варіанти деформаційної теорії пластичності, що враховує вплив гідростатичного напруження і виду девіатора напружень на механічні властивості середовища для випадку пропорційного навантаження. Основна

увага зосереджена на узагальненій постановці і дослідженні розв'язності нелінійної краєвої задачі. Установлено умови, що забезпечують існування, єдиність та неперервну залежність узагальненого розв'язку від прикладених навантажень.

1. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов. – М.: Наука, 1972. – 415 с.
2. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. – М.: Мир, 1978. – 336 с.
3. *Ильюшин А. А.* К теории малых упругопластических деформаций // Прикл. математика и механика. – 1946. – **10**, № 3. – С. 347 – 356.
4. *Ильюшин А. А.* Пластичность. – М.: Гостехиздат, 1948. – 480 с.
5. *Лебедев А. А., Ковальчук Б. И., Гигиняк Ф. Ф., Ламашевский В. П.* Механические свойства конструкционных материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1983. – 365 с.
6. *Быков Д. Л.* Основные уравнения и теоремы для одной модели физически нелинейной среды // Инж. журн. Механика твердого тела. – 1966. – № 4. – С. 58 – 64.
7. *Агахи К. А., Кузнецов В. Н.* К теории пластичности материалов, учитывающей влияние гидростатического давления // Упругость и неупругость. – 1978. – Вып. 5. – С. 46 – 53.
8. *Бобырь Н. И.* О зависимости между интенсивностью напряжений и интенсивностью пластических деформаций с учетом вида напряженного состояния // Вестн. Киев. политехн. ин-та. Машиностроение. – 1979. – Вып. 16. – С. 93 – 98.
9. *Заховайко А. А., Колодежный В. А.* К гипотезе о существовании единой кривой деформирования материалов // Там же. – 1983. – Вып. 20. – С. 15 – 17.
10. *Писаренко Г. С., Лебедев А. А.* Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1976. – 415 с.

Поступила 20. 11. 2003