

УДК 532.528

ЗАДАЧІ ОПТИМІЗАЦІЇ ДАЛЬНОСТІ СУПЕРКАВІТАЦІЙНОГО РУХУ ЗА ІНЕРЦІЄЮ З ФІКСОВАНОЮ КІНЦЕВОЮ ГЛИБИНОЮ

І. Г. НЕСТЕРУК, В. М. СЕМЕНЕНКО

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 12.05.2006

Розглянуті задачі максимізації відстані, пройденої осесиметричним суперкавітуючим тілом за інерцією під довільним кутом до горизонту. Початкова швидкість та кінцева глибина вважаються заданими. Показано, що у цьому випадку пройдений тілом шлях та оптимальна форма тіла не залежать від кута нахилу траєкторії. Використовувались дві групи ізопериметричних умов при сталій масі та сталій середній густині тіла. Отримані прості аналітичні залежності для оптимальних форми тіла і радіуса кавітатора у випадках фіксованих довжини, калібру та об'єму тіла. Проаналізовані особливості висхідного суперкавітаційного руху за інерцією. Отримані результати добре узгоджуються з чисельними розрахунками з використанням комп'ютерної програми **SCAV**.

Рассмотрены задачи максимизации расстояния, пройденного осесимметричным суперкавитирующим телом по инерции под произвольным углом к горизонту. Начальная скорость и конечная глубина движения считаются заданными. Показано, что в этом случае пройденное телом расстояние и оптимальная форма тела не зависят от угла наклона траектории. Использовались две группы изопериметрических условий при постоянной массе и при постоянной средней плотности тела. Получены простые аналитические зависимости для оптимальных формы тела и радиуса кавитатора для случаев фиксированных длины, калибра и объема тела. Проанализированы особенности восходящего суперкавитационного движения по инерции. Полученные результаты хорошо согласуются с численными расчетами с использованием компьютерной программы **SCAV**.

Maximum range problems are considered for the supercavitating motion of the axisymmetric body on inertia under an arbitrary angle to horizon. The starting velocity and the final depth are accepted as fixed. It was shown, that in this case the range and the optimal body shape are independent of angle of motion. Two groups of isoperimetric conditions were used: with the constant body mass and with the constant average body density. Simple analytic relations for the optimal body shapes and the cavitator radius were obtained for the cases of the fixed length, caliber and volume of the body. Peculiarities of the upward supercavitating motion on inertia is analysed. Obtained results are in good agreement with calculations with the computer program **SCAV**.

ВСТУП

Аналіз задач суперкавітаційного руху за інерцією ускладнюється відсутністю точних розв'язків та нестационарним характером течії. Разом з тим, для високошвидкісного руху існує діапазон квазі-стационарного обтікання з фіксованим значенням опору тиску, коли можна користуватись відомими співвідношеннями для форми стационарної каверни в невагомій рідині. В статті [?] розглянуто низку задач оптимізації пройденого за інерцією шляху в режимі горизонтального суперкавітаційного руху. В даній роботі розглядатиметься випадок прямолінійного суперкавітаційного руху тіла під довільним кутом до горизонту.

Обмежимося випадком малих чисел кавітації та великих чисел Фруда:

$$\sigma = \frac{2(p_\infty - p_c)}{\rho U^2} \ll 1, \quad Fr = \frac{U}{\sqrt{gL}} \gg 1, \quad (1)$$

де ρ – густина води; U – поточна швидкість тіла; p_∞ – тиск у воді далеко від перерізу початку каверни на глибині його руху; p_c – тиск у каверні, який можна вважати сталим через велику різницю

у густині води та газів, що заповнюють каверну; L – довжина каверни.

Рівняння руху тіла за інерцією з малим впливом сили тяжіння та умову квазістационарності можна записати у вигляді (див., наприклад, [?, ?]):

$$m \frac{dU}{dt} = -\frac{\rho U^2 C_x \pi R_n^2}{2}, \quad \frac{L}{U^2} \left| \frac{dU}{dt} \right| \ll 1, \quad (2)$$

де m – маса тіла; R_n – радіус кавітатора; C_x – коефіцієнт кавітаційного опору. З рівнянь (2) випливає, що течію можна вважати квазістационарною, якщо

$$\frac{\rho C_x \pi R_n^2 L}{2 \rho_b V} \ll 1, \quad (3)$$

де V – об'єм тіла; $\rho_b = m/V$ – середня густина тіла. Оскільки $C_x < 1$, величини $\bar{\rho}_b = \rho_b/\rho$ та $V/(\pi R_n^2 L)$ в більшості випадків значно перевищують одиницю, то умова (3), як правило, виконується. Для дуже тонких кавітаторів недостатньо великі значення величини $V/(\pi R_n^2 L)$ компенсуються меншими величинами опору (наприклад, за отриманою в [?] формулою коефіцієнт опору при нульовому числі кавітації C_{x0} для конічних каві-

таторів з кутом при вершині менше 10° не перевищує 0.029). Обмежимося в подальшому випадками, коли умова (3) виконується. Крім того, досліджуватимемо лише парову кавітацію (без піддуву газу в каверну) та вважатимемо тиск p_c набагато меншим від атмосферного. Будемо також вважати, що тіло рухається прямолінійно під кутом γ до горизонту ($\gamma > 0$ для руху догори). Досвід показує, що після замивання потоком води частини тіла, розташованої в каверні, воно практично миттєво зупиняється через значне зростання опору і деформації тіла.

Сила тяжіння може значно впливати на форму та розміри каверни. Вплив сили тяжіння буде малим за умови $\sigma Fr^2 \gg 1$ (див. [?]), перетворення якої з врахуванням (1) дає

$$\frac{\rho g L}{2(p_\infty - p_c)} \approx \frac{L}{2(h + 10)} \ll 1, \quad (4)$$

де глибина руху кавітатора h та L вимірюються в метрах.

Будемо вважати, що умова (4) виконується, і використовуватимемо закономірності для стаціонарних видовжених каверн за не дуже тонкими кавітаторами з поточним значенням числа кавітації [?]:

$$\bar{R}^2 = \frac{\bar{x}(1 - \bar{x})}{\lambda^2}, \quad (5)$$

$$\lambda = \frac{L}{D} = \sqrt{\frac{-\ln \sigma}{\sigma}}, \quad (6)$$

$$\frac{D}{R_n} = 2\sqrt{\frac{C_x}{\sigma}}, \quad (7)$$

$$\frac{L}{R_n} = \frac{2\sqrt{-C_x \ln \sigma}}{\sigma}, \quad (8)$$

де $\bar{R} = R/L$ – безрозмірний радіус перерізу каверни; $\bar{x} = x/L$ – поздовжня координата; λ – видовження каверни; D – максимальний діаметр каверни; L – довжина каверни; C_x – коефіцієнт кавітаційного опору,

$$C_x = \frac{2X}{\rho U^2 \pi R_n^2}; \quad (9)$$

X – опір тиску.

Якщо скористатись відомим співвідношенням для стаціонарного суперкавітаційного опору затуплених кавітаторів $C_x = C_{x0}(1 + \sigma)$ і знехтувати змінами числа кавітації, то величину C_x можна вважати сталою. Тоді рівняння руху за інерцією легко інтегруються і пройдений тілом шлях S визначається формулою (див. [?, ?, ?, ?])

$$S = \frac{2m}{\rho C_x \pi R_n^2} \ln \frac{U_0}{U}, \quad (10)$$

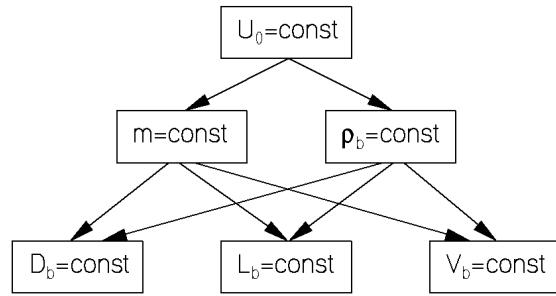


Рис. 1. Класифікація ізопериметричних умов при $h_f = \text{const}$, $U_0 = \text{const}$

де U_0 – фіксована початкова швидкість тіла.

Формула (10) дозволяє проаналізувати питання максимізації пройденого шляху для різних ізопериметричних умов. Зокрема, для випадку горизонтального руху деякі з таких задач розглядалися у [?, ?, ?, ?]. В даній роботі сформульовані та розв'язані декілька задач оптимізації за умови, що крім початкової швидкості U_0 фіксованою є глибина h_f , на якій припиняється суперкавітаційний режим. При цьому найбільш цікавими є шість ізопериметричних умов, показаних на рис. 1.

Для перевірки отриманих висновків використовувались чисельні розрахунки за допомогою комп'ютерної програми **SCAV** [?]. В статті наводяться деякі результати розрахунків для моделей з дисковими кавітаторами при $C_x = 0.8275$. Крок розрахунку руху моделей становив 0.1 м.

Якщо врахувати, що атмосферному тиску відповідає 10-метровий стовп води, формулу (1) для кінцевого числа кавітації можна представити у вигляді

$$\sigma = \frac{a}{\bar{U}^2}, \quad a = \frac{2g(10 + h_f)}{U_0^2}, \quad \bar{U} = \frac{U}{U_0}. \quad (11)$$

Тут і в подальшому кінцева глибина h_f вимірюється в метрах.

Формули (5)-(11) не містять кута руху тіла γ , тому всі подальші висновки щодо оптимальної форми тіл та максимальної дальності також не залежать від γ . Зауважимо, що для випадку фіксованої початкової глибини h_0 це не так, див. [?]. В окремому випадку $\gamma = 0$ обидві задачі (з фіксованою початковою та заданою кінцевою глибиною) збігаються, тому подальші висновки стосуватимуться також випадку горизонтального руху з фіксованою початковою глибиною. Параметр a в цьому випадку збігається з початковим числом кавітації σ_0 .

Зауважимо, що формула (10) передбачає замивання (та зупинку) тіла у воді, що відбуває-

ться при деякій швидкості U . Але замивання трапляється не завжди, що накладає обмеження на область застосування рівняння (10) та висновків, що з нього випливають.

Для руху тіла донизу ($\gamma < 0$) тіло замивається завжди, оскільки каверна постійно зменшується через зменшення швидкості руху та зростання гідростатичного тиску в рідині. Але при $\gamma > 0$ тіло може вийти на поверхню води до моменту замивання. Наприклад, у роботі [?] показано, що рух тіла догори з фіксованими швидкістю, довжиною та середньою густиною тіла при $h_0 < 10$ м, завжди завершується виходом на поверхню в режимі суперкавітації, тому пройдений шлях визначається не формулою (10), а геометричним співвідношенням $S = h_0 \sin \gamma$, де h_0 – початкова глибина. В [?] також показано, що невеликі перевищення певного критичного значення початкової швидкості призводять до виходу тіла на поверхню води без замивання. Це означає, що формулу (10) не можна застосовувати для певних значень кінцевої глибини у випадку руху тіла догори. Детально це питання аналізується нижче в розділі 3.

1. ЗАДАЧІ З ФІКСОВАНОЮ МАСОЮ ТІЛА

З формули (10) видно, що пройдена за інерцією відстань у цьому випадку зростає при зменшенні розмірів кавітатора (і відповідно тіла). Однак нескінченне зменшення розмірів призводить до необмеженого зростання середньої густини тіла, що неможливе з фізичних міркувань. Тому слід накласти також обмеження на розміри тіла. Тут можливі випадки фіксованого максимального діаметра (калібра) D_b , довжини L_b та об'єма тіла V_b (див. рис. 1). Розглянемо послідовно ці три ізопериметричні задачі.

1.1. Оптимізація з фіксованим калібром тіла

Нехай калібр тіла D_b та максимальний діаметр каверни у момент замивання D зв'язані співвідношенням $D_b = \alpha_D D$, $\alpha_D \leq 1$. Тоді з формул (7), (10) випливає

$$S = -\frac{8m\alpha_D^2}{\pi\rho D_b^2\sigma} \ln \bar{U}. \quad (12)$$

Рівняння (12) свідчить, що максимальна відстань досягається при найбільшому значенні параметра $\alpha_D = 1$, тобто калібр оптимального тіла повинен збігатися з максимальним діаметром кавер-

ни в момент замивання. Звідси, зокрема, випливає, що довжина оптимального тіла не може бути меншою напівдовжини каверни в момент замивання. Інших обмежень на форму оптимального тіла немає (при умові, що воно вписане в каверну в момент замивання). В подальшому будемо розглядати лише оптимальні тіла, тобто вважати, що $D_b = D$.

З врахуванням (11) формулу (12) можна переписати у вигляді

$$S = -\frac{8m\bar{U}^2}{\pi\rho\alpha D^2} \ln \bar{U}. \quad (13)$$

Максимум функції (13) досягається при

$$\bar{U}_* = 1/\sqrt{e}, \quad \text{тобто} \quad U_* = 0.607U_0 \quad (14)$$

і дорівнює

$$S_* = \frac{2mU_0^2}{e\pi g\rho D^2(10+h_f)}, \quad (15)$$

або в безрозмірному вигляді

$$\bar{S}_* = \frac{S_* g\rho D^2(10+h_f)}{mU_0^2} = \frac{2}{e\pi} = 0.234. \quad (16)$$

Підстановка (14) в (11) дає оптимальне значення кінцевого числа кавітації:

$$\sigma_* = \frac{2eg(10+h_f)}{U_0^2}. \quad (17)$$

Знаючи його, можна за формулою (7) визначити оптимальний радіус кавітатора:

$$R_{n*} = 0.5D\sqrt{\frac{2eg(10+h_f)}{C_x U_0^2}}, \quad (18)$$

а за формулами (5), (6) – контур та довжину каверни в момент замивання L_* , в яку повинна бути вписана модель.

На рис. 2 представлені три з можливих варіантів оптимальної форми суперкавітуючих (СК) моделей з фіксованими масою та калібром. Штриховою лінією показано контур каверни в момент замивання. Форма моделі (а) є близькою до еліпсоїда обертання (5). Модель (b) є половиною моделі (а). Модель (c) складається з двох конічних секцій.

Перевірка формули (16) за допомогою програми **SCAV** для різних оптимальних тіл і кавітаторів, що визначались за формулами (6), (17), (18) і зображені на рис. 2, показала, що розрахункові

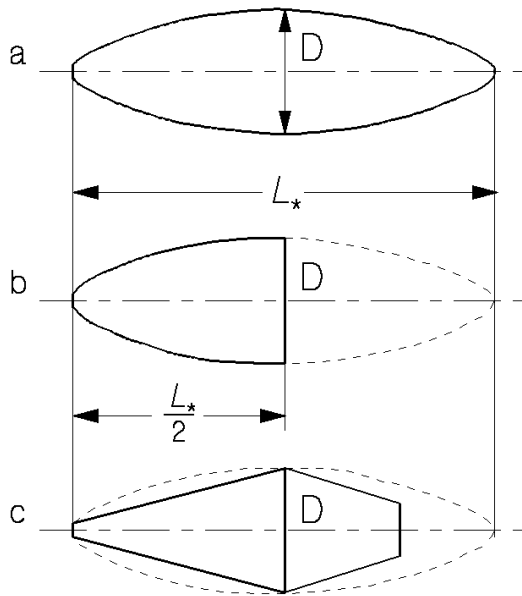


Рис. 2. Оптимальні форми СК-моделей з фіксованими масою та калібром

безрозмірної величини \bar{S}_* мало відрізняються від теоретичного значення 0.234.

В якості прикладу в табл. 1 наведені результати розрахунку дальності при різних кутах нахилу траєкторії γ та наступних значеннях параметрів: $D = 30$ мм; $m = 1$ кг; $U_0 = 800$ м/с; $h_f = 150$ м. При цьому оптимальні довжина моделі та радіус кавітатора становили відповідно $L_* = 539.8$ мм, $R_{n*} = 1.90$ мм.

Таблиця 1

γ	h_0 , м	S_* , м	\bar{S}_*
-90°	44.50	105.4	0.233
-60°	58.98	105.1	0.232
-30°	97.65	104.7	0.231
0°	150.00	104.1	0.230
30°	201.75	103.5	0.228
60°	239.24	103.0	0.227
90°	252.90	102.9	0.227

1.2. Оптимізація з фіксованою довжиною тіла

Нехай довжина тіла L_b та довжина каверни у момент замивання L зв'язані співвідношенням $L_b = \alpha_L L$, $\alpha_L \leq 1$. Тоді з формул (8), (10) випли-

ває

$$S = \frac{8m\alpha_L^2 \ln \sigma}{\pi \rho L_b^2 \sigma^2} \ln \bar{U}. \tag{19}$$

Рівняння (19) свідчить, що максимальна відстань досягається при найбільшому значенні параметра $\alpha_L = 1$, тобто довжина оптимального тіла повинна збігатися з довжиною каверни в момент замивання. Інших обмежень на форму оптимального тіла немає (при умові, що воно вписане в каверну в момент замивання). В подальшому будемо розглядати лише оптимальні тіла, тобто вважати, що $L_b = L$. Приклади оптимальних форм для заданих ізопериметричних умов наведені на рис. 3.

З врахуванням (11) формулу (19) можна переписати у вигляді

$$S = \frac{8m\bar{U}^4}{\pi \rho L^2 a^2} \ln \frac{a}{\bar{U}^2} \ln \bar{U}, \tag{20}$$

з якої видно, що максимум пройденого за інерцією шляху збігається з максимумом функції

$$f_1(\bar{U}) = (y_0 - 2 \ln \bar{U})\bar{U}^4 \ln \bar{U}, \quad y_0 = \ln a. \tag{21}$$

Диференціювання формули (21) дає

$$\frac{df_1}{d\bar{U}} = \bar{U}^3(4y_0y - 8y^2 + y_0 - 4y), \quad y = \ln \bar{U}.$$

Прирівнюючи похідну до нуля і розв'язуючи відповідне квадратне рівняння, отримуємо, що найбільший пройдений за інерцією шлях досягається при

$$y_* = 0.25(y_0 - 1 + \sqrt{y_0^2 + 1}). \tag{22}$$

Другий корень квадратного рівняння відповідає додатному значенню другої похідної і мінімуму функції f_1 , тобто пройденого шляху.

На відміну від формули (14), оптимальне значення кінцевої швидкості \bar{U}_* залежить від параметра a . Але розрахунки за формулою (22) показують, що для значень початкової швидкості $300 \leq U_0 \leq 1500$ і кінцевої глибини $h_f < 300$ м величина \bar{U}_* міняється в межах від 0.79 до 0.81, тому можна вважати, що

$$\bar{U}_* \approx 0.8; \quad \text{тобто} \quad U_* \approx 0.8U_0. \tag{23}$$

Для більших глибин та менших швидкостей слід використовувати рівняння (22).

З формул (20), (23) випливає, що значення максимального шляху в згаданих вище діапазонах початкової швидкості і кінцевої глибини можна виразити рівнянням

$$S_* \approx -\frac{0.731m}{\pi \rho L^2 a^2} (\ln a + 0.446), \tag{24}$$

Таблиця 2

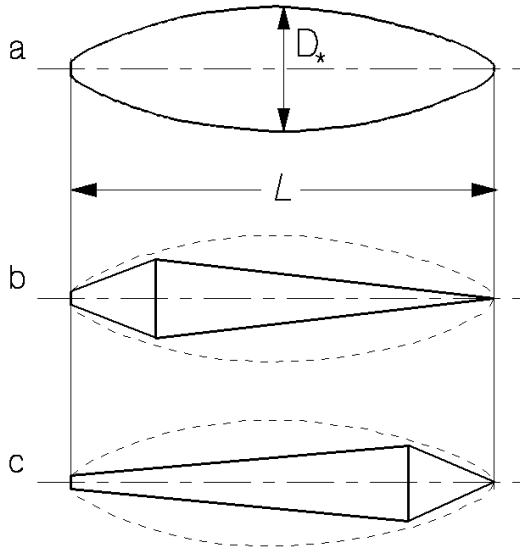


Рис. 3. Оптимальні форми СК-моделей з фіксованими масою та довжиною

γ	h_0 , м	S_* , м	\bar{S}_*
-90°	47.10	52.9	0.246
-60°	54.30	52.8	0.246
-30°	73.85	52.3	0.244
0°	100.00	51.6	0.240
30°	125.50	51.0	0.238
60°	143.75	50.5	0.235
90°	150.10	150.1 ¹	0.699

Як приклад в табл. 2 наведені результати розрахунку дальності при різних кутах нахилу траєкторії γ та наступних значеннях параметрів: $L = 0.5$ м; $m = 1$ кг; $U_0 = 500$ м/с; $h_f = 100$ м. При цьому формули (6), (27), (25) дають $D_* = 27.96$ мм, $R_{n*} = 1.78$ мм, $\bar{S}_* = 0.250$.

Зауважимо, що відхилення від оптимальної форми призводить до значного зменшення дальності. Наприклад, при значеннях параметрів, прийнятих для розрахунку таблиці 2, але для тіла у вигляді половини еліпсоїда обертання (див. модель (b) на рис. 2), програма **SCAV** при $\gamma = 0$ дає $S = 19.5$ м, тобто в 2.65 рази меншу дальність.

або в безрозмірному вигляді

$$\bar{S}_* = \frac{S_* g^2 \rho L^2 (10 + h_f)^2}{m U_0^4} \approx -0.0582(\ln a + 0.446). \quad (25)$$

Підстановка (23) в (11) дає оптимальне значення кінцевого числа кавітації:

$$\sigma_* \approx \frac{3.13g(10 + h_f)}{U_0^2}. \quad (26)$$

Знаючи його, можна за формулою (8) визначити оптимальний радіус кавітатора

$$R_{n*} = \frac{1.56Lg(10 + h_f)}{U_0^2} \times \sqrt{-C_x \ln \frac{3.125g(10 + h_f)}{U_0^2}}. \quad (27)$$

На рис. 3 представлені три з можливих варіантів оптимальної форми суперкавітуючих (СК) моделей з фіксованими масою та довжиною. Штриховою лінією показано контур каверни в момент замивання. Форма моделі (a) є близькою до еліпсоїда обертання (5). Кожна з моделей (b) та (c) складається з двох конічних секцій.

Чисельні розрахунки за допомогою програми **SCAV**, проведені для різних оптимальних тіл, що визначались за формулами (26), (27), добре узгоджуються з формулою (25).

1.3. Оптимізація з фіксованим об'ємом тіла

Нехай об'єм тіла V_b та об'єм каверни у момент замивання V зв'язані співвідношенням $V_b = \alpha_V V$, $\alpha_V \leq 1$. Інтегрування залежності (5) та формул (6), (8) дозволяють визначити об'єм каверни:

$$V = \frac{\pi L^3}{6\lambda^2}, \quad V = \frac{4\pi R_n^3 C_x^{3/2} \sqrt{-\ln \sigma}}{3\sigma^2}. \quad (28)$$

Тоді з формул (10), (28) випливає

$$S = -2 \frac{4^{2/3} \alpha_V^{2/3} m (-\ln \sigma)^{1/3}}{3^{2/3} \pi^{1/3} \rho V_b^{2/3} \sigma^{4/3}} \ln \bar{U}. \quad (29)$$

Формула (29) дозволяє зробити висновок, що максимальна відстань досягається при $\alpha_V = 1$, тобто об'єм оптимального тіла повинен збігатись з об'ємом каверни в момент замивання або оптимальна форма тіла повинна збігатись з формою каверни в момент замивання. Подібний висновок можна знайти також в [?, ?, ?]. В подальшому будемо розглядати лише оптимальні тіла, тобто вважати, що $V_b = V$.

¹ Вихід на поверхню води

З врахуванням (11) формулу (29) можна переписати у вигляді

$$S = -2 \frac{4^{2/3} m (2 \ln \bar{U} - \ln a)^{1/3} \bar{U}^{8/3}}{3^{2/3} \pi^{1/3} \rho V^{2/3} a^{4/3}} \ln \bar{U}, \quad (30)$$

з якої видно, що максимум пройденого за інерцією шляху збігається з мінімумом функції

$$f_2(\bar{U}) = (2 \ln \bar{U} - y_0)^{1/3} \bar{U}^{8/3} \ln \bar{U}. \quad (31)$$

Диференціювання формули (31) дає

$$\frac{df_2}{d\bar{U}} = \frac{\bar{U}^{5/3}}{3(2y - y_0)^{2/3}} (16y^2 - 8yy_0 + 8y - 3y_0).$$

Привірюючи похідну до нуля і розв'язуючи відповідне квадратне рівняння, отримуємо, що найбільший пройдений за інерцією шлях досягається при

$$y_* = 0.25(y_0 - 1 + \sqrt{y_0^2 + y_0 + 1}). \quad (32)$$

Другий корень квадратного рівняння відповідає максимуму функції f_2 , тобто мінімуму пройденого шляху.

На відміну від формули (14) оптимальне значення кінцевої швидкості \bar{U}_* залежить від параметра a . Але розрахунки за формулою (32) показують, що для значень початкової швидкості $300 \leq U_0 \leq 1500$ і кінцевої глибини $h_f < 300$ м величина \bar{U}_* міняється в межах від 0.696 до 0.715, тому можна вважати, що

$$\bar{U}_* \approx 0.706, \quad \text{тобто} \quad U_* \approx 0.706 U_0. \quad (33)$$

Для більших глибин та менших швидкостей слід використовувати рівняння (32).

З формул (30), (33) випливає, що значення максимального шляху в згаданих вище діапазонах початкової швидкості і кінцевої глибини можна визначити рівнянням

$$S_* \approx -0.228 \frac{m(0.696 + \ln a)^{1/3}}{\rho V^{2/3} a^{4/3}}, \quad (34)$$

або в безрозмірному вигляді

$$\bar{S}_* = \frac{S_* \rho V^{2/3} a^{4/3}}{m} \approx -0,228(0,696 + \ln a)^{1/3}. \quad (35)$$

Підстановка (33) в (11) дає оптимальне значення кінцевого числа кавітації:

$$\sigma_* \approx \frac{4,013g(10 + h_f)}{U_0^2}. \quad (36)$$

Знаючи його, можна за формулами (6), (28) визначити оптимальні довжину та калібр тіла L_* , D_* , а

потім за співвідношенням (8) – оптимальний радіус кавітатора R_{n*} .

Чисельні розрахунки за допомогою програми **SCAV**, проведені для різних оптимальних тіл, що визначались за формулами (6), (8), (28), (36), добре узгоджуються з формулою (35).

Як приклад у табл. 3 наведені результати розрахунку дальності при різних кутах нахилу траєкторії γ та наступних значеннях параметрів: $V = 0.0002$ м³; $m = 1$ кг; $U_0 = 500$ м/с; $h_f = 100$ м. При цьому оптимальні розміри моделі становлять $L_* = 447.2$ мм, $D_* = 29.23$ мм, оптимальний радіус кавітатора дорівнює $R_{n*} = 1.78$ мм, а формула (35) дає $\bar{S}_* = 0.364$.

Таблиця 3

γ	h_0 , м	S_* , м	\bar{S}_*
-90°	37.60	62.4	0.378
-60°	46.13	62.2	0.377
-30°	69.10	61.8	0.374
0°	100.00	61.2	0.371
30°	130.30	60.6	0.367
60°	152.14	60.2	0.365
90°	160.06	60.1	0.364

2. ЗАДАЧІ З ФІКСОВАНОЮ СЕРЕДНЬОЮ ГУСТИНОЮ ТІЛА

Формули попереднього розділу (15), (24), (34) свідчать, що максимальний шлях лінійно зростає при збільшенні маси тіла. Але це збільшення не може бути необмеженим, оскільки питома вага наявних матеріалів не дозволяє виготовити тіло з дуже великим значенням його середньої густини $\rho_b = m/V$. Тому виникає практично важливий клас задач з використанням умови фіксованої середньої густини тіла. Природно, що в цьому випадку пройдений шлях необмежено зростатиме при збільшенні розмірів тіла. Для одержання практично важливих результатів слід накладати також обмеження на розміри тіла, а саме фіксувати об'єм V_b , найбільший діаметр (калібр) D_b або довжину тіла L_b (див. рис. 1). Розглянемо послідовно ці три ізопериметричні задачі.

2.1. Оптимізація з фіксованим об'ємом тіла

Цю задачу вже розв'язано в підрозділі 1.3, оскільки фіксована маса та об'єм приводять до фіксованої середньої густини. Тому лише повторимо

отриманий в підрозділі 1.3 висновок, що максимальна відстань досягається, коли форма тіла збігається з формою каверни в момент замикання, і зауважимо, що він справедливий для всіх трьох ізопериметричних задач з фіксованою середньою густиною тіла. В подальшому будемо розглядати лише оптимальні тіла, тобто вважати, що $V_b = V$. При цьому формули (30)-(33), (36) не міняються, а в (34), (35) слід позбутися маси тіла за допомогою співвідношення $m = V\rho_b$.

Отже, так само, як в попередніх задачах, безрозмірний максимальний пройдений шлях при заданих U_0, h_f є сталою величиною.

Відзначимо, що для часткового випадку $\gamma = 0$ ця задача розв'язана в [?]. Зокрема, в цій статті отримано зв'язок між початковим та кінцевим числами кавітації $\sigma_* \approx 2\sigma_0$, що практично збігається з формулою (33).

2.2. Оптимізація з фіксованим калібром тіла

Оскільки калібр оптимального тіла D_b дорівнює максимальному діаметру каверни у момент замикання D , у формулі (13) можна позбутись маси і з використанням (7), (11), (28) отримати формулу

$$S = -\frac{4D\bar{\rho}_b\bar{U}^3\sqrt{2\ln\bar{U}-\ln a}}{3a^{3/2}}\ln\bar{U}, \quad (37)$$

де $\bar{\rho}_b = \rho_b/\rho$, з якої видно, що максимум пройденого за інерцією шляху збігається з мінімумом функції

$$f_3(\bar{U}) = \sqrt{2\ln\bar{U}-y_0}\bar{U}^3\ln\bar{U}. \quad (38)$$

Диференціювання формули (38) дає

$$\frac{df_3}{d\bar{U}} = \frac{\bar{U}^2}{\sqrt{2y-y_0}}(6y^2-3y-3y_0y-y_0).$$

Прирівнюючи похідну до нуля і розв'язуючи відповідне квадратне рівняння, отримуємо, що найбільший пройдений за інерцією шлях досягається при

$$y_* = \frac{3(y_0-1) + \sqrt{9(1-y_0)^2 + 24y_0}}{12}. \quad (39)$$

Другий корень квадратного рівняння відповідає максимуму функції f_3 , тобто мінімуму пройденого шляху.

На відміну від формули (14), оптимальне значення кінцевої швидкості \bar{U}_* залежить від параметра a . Але розрахунки за формулою (39) показують, що для значень початкової швидкості

$300 \leq U_0 \leq 1500$ і кінцевої глибини $h_f < 300$ м величина \bar{U}_* міняється в межах від 0.726 до 0.748, тому можна вважати, що

$$\bar{U}_* \approx 0.737, \quad \text{тобто} \quad U_* \approx 0.737U_0. \quad (40)$$

Для більших глибин та менших швидкостей слід використовувати рівняння (39).

Як вже відзначалось, для випадку горизонтального руху тіла ця задача розв'язана в [?]. Зокрема, в цій статті отримано наступний зв'язок між початковим та кінцевим числами кавітації $\sigma_* \approx 1.9\sigma_0$, що відрізняється від (40) менше, ніж на 6%.

З формул (37), (40) випливає, що значення максимального шляху в згаданих вище діапазонах початкової швидкості і кінцевої глибини можна визначити рівнянням

$$S_* = 0.163\frac{D\bar{\rho}_b\sqrt{-0.61-\ln a}}{a^{3/2}}, \quad (41)$$

або в безрозмірному вигляді

$$\bar{S}_* = \frac{S_*a^{3/2}}{D\bar{\rho}_b} \approx 0.163\sqrt{-0.61-\ln a}. \quad (42)$$

Підстановка (40) в (11) дає оптимальне значення кінцевого числа кавітації:

$$\sigma_* \approx \frac{3.682g(10+h_f)}{U_0^2}. \quad (43)$$

Знаючи його, можна за формулами (5), (7), (8) визначити оптимальні форму тіла, радіус кавітатора та довжину тіла.

Чисельні розрахунки за допомогою програми **SCAV**, проведені для різних оптимальних тіл, що визначались за формулами (43), (7), (8), (5) і зображені на рис. 2, а, добре узгоджуються з формулою (42).

Як приклад у табл. 4 наведені результати розрахунку дальності при різних кутах нахилу траєкторії γ та наступних значеннях параметрів: $D = 30$ мм; $\rho_b = 4$ г/см³; $U_0 = 500$ м/с; $h_f = 100$ м. При цьому оптимальна довжина моделі дорівнює $L_* = 484.0$ мм, оптимальний радіус кавітатора становить $R_{n*} = 2.08$ мм, а формула (42) дає $\bar{S}_* = 0.331$.

Таблиця 4

γ	h_0 , м	S_* , м	\bar{S}_*
-90°	52.00	48.0	0.321
-60°	56.60	47.8	0.320
-30°	76.20	47.6	0.318
0°	100.00	47.1	0.315
30°	123.35	46.7	0.312
60°	140.18	46.4	0.310
90°	146.29	46.3	0.309

2.3. Оптимізація з фіксованою довжиною тіла

Оскільки довжина оптимального тіла L_b дорівнює довжині каверни у момент замивання L , у формулі (20) можна позбутись маси і з використанням (7), (11), (28) отримати

$$S = -\frac{4L\bar{\rho}_b\bar{U}^2}{3a} \ln \bar{U}. \quad (44)$$

Очевидно, що максимум цієї функції збігається з максимумом функції (13). Відповідно справедливі формули (14), (17), (18) для оптимальних значень кінцевої швидкості, кінцевого числа кавітації та радіуса кавітатора.

Таблиця 5

γ	h_0 , м	S_* , м	\bar{S}_*
-90°	42.20	57.8	0.125
-60°	50.03	57.7	0.125
-30°	71.35	57.3	0.124
0°	100.00	57.0	0.123
30°	128.24	56.5	0.122
60°	148.63	56.2	0.121
90°	156.03	56.0	0.121

З формул (14), (44) випливає, що значення максимального шляху визначається рівнянням

$$S_* = \frac{2L\bar{\rho}_b}{3ea}, \quad (45)$$

або в безрозмірному вигляді

$$\bar{S}_* = \frac{S_*(10 + h_f)}{L\bar{\rho}_b U_0^2} = \frac{1}{3e} \approx 0.123. \quad (46)$$

Чисельні розрахунки за допомогою програми **SCAV**, проведені для різних оптимальних тіл, форма яких наближалась до форми каверни в момент замивання (див. рис. 3, а) з параметрами, визначеними з (17), (18), (7), (5), показали, що розрахункові величини \bar{S}_* мало відрізняються від теоретичного значення 0,123.

Як приклад у табл. 5 наведені результати розрахунку дальності при різних кутах нахилу траєкторії γ та наступних значеннях параметрів: $L = 0.5$ м; $\rho_b = 4$ г/см³; $U_0 = 500$ м/с; $h_f = 100$ м. При цьому оптимальні калібр моделі та радіус кавітатора становлять відповідно $D_* = 39.54$ мм, $R_{n*} = 3.33$ мм.

3. ОСОБЛИВОСТІ СУПЕРКАВІТАЦІЙНОГО РУХУ ЗА ІНЕРЦІЄЮ ПРИ $\gamma > 0$

При дослідженні негоризонтального суперкавітаційного руху тіл, які стартують на глибині h_0 , природно задавати не початкову і кінцеву швидкості тіла U_0, U , а початкове і кінцеве числа кавітації σ_0, σ :

$$\sigma_0 = \frac{2g(h_0 + 10)}{U_0^2}, \quad \sigma = \frac{2g(h_0 + 10 - S \sin \gamma)}{U^2} \quad (47)$$

(початкова глибина кавітатора h_0 тут виражається в метрах). При цьому рівняння (10) може бути переписане у вигляді:

$$2kS = -\ln \frac{2g(h_0 + 10 - S \sin \gamma)}{\sigma U_0^2}, \quad (48)$$

де $k = \rho C_x \pi R_n^2 / 2m$. Три параметри C_x, R_n, σ визначають мінімальний розмір каверни, в яку може бути вписано тіло в момент замивання. Рівняння (48) дозволяє при заданих значеннях параметрів визначити S чисельно. Легко показати, що при $\gamma \leq 0$, тобто при русі вниз, і $\sigma > \sigma_0$ воно завжди має позитивний корінь, причому лише один.

Очевидно, що у випадку $\gamma > 0$, тобто при русі вгору, існує максимально можлива дистанція $S_{max} = h_0 / \sin \gamma$, що визначається виходом тіла на поверхню води. Аналіз рівняння (48) показує, що для кожного $\gamma > 0$ існують граничні значення дальності S_{cr} та одного з чотирьох параметрів k, σ, h_0, U_0 , які задовольняють системі двох рівнянь:

$$2k = \frac{\sin \gamma}{h_{fcr} + 10}, \quad (49)$$

$$\frac{h_0 - h_{fcr}}{h_{fcr} + 10} = -\ln \frac{2g(h_{fcr} + 10)}{\sigma U_0^2}, \quad (50)$$

де $h_{fcr} = h_0 - S_{cr} \sin \gamma$ – критична кінцева глибина, тобто глибина замивання тіла. Розглянемо чотири можливих випадки.

1) Фіксовані параметри σ, h_0, U_0 . Тоді система рівнянь (49), (50) для кожного $\gamma > 0$ визначає h_{fcr} і мінімальне значення параметра $k = k_{cr}$. При $k > k_{cr}$ рівняння (48) має один або два різних кореня $h_1 < h_{fcr}$ і $h_2 > h_{fcr}$, з яких тільки другий має фізичний зміст. При $k < k_{cr}$ рівняння (48) не має коренів. Це означає, що в процесі руху тіла каверна спочатку зменшується, досягає мінімальних розмірів при деякому $\sigma_{max} < \sigma$ (при якому тіло не замивається), а потім починає збільшуватись через зменшення гідростатичного тиску у воді. У цьому випадку рух тіла в суперкавітаційному режимі продовжується аж до виходу на

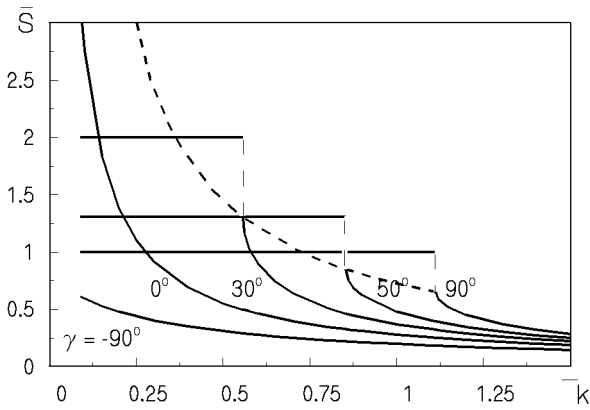


Рис. 4. Шлях, пройдений СК-моделью за інерцією

поверхню води, тобто в цьому випадку $S = S_{max}$. Таким чином, при переході через критичне значення k_{cr} функція $S(k)$ має стрибок.

На рис. 4 наведено приклад розрахунку за формулами (49), (50) залежності $\bar{S}(k)$, де $\bar{S} = S/h_0$ і $\bar{k} = kh_0$, при різних значеннях кута γ і наступних значеннях параметрів: $R_n = 2$ мм; $h_0 = 100$ м; $U_0 = 500$ м/с, $\sigma = 0.015$. Штриховою лінією показано геометричне місце точок $(\bar{k}_{cr}, \bar{S}_{cr})$ при зміні кута $\gamma > 0$.

2) Фіксовані параметри k , σ , h_0 . Тоді система рівнянь (49), (50) для кожного $\gamma > 0$ визначає h_{fcr} і максимальне значення параметра $U_0 = U_{0cr}$, при якому рівняння (48) має розв'язок. При $U_0 > U_{0cr}$ рівняння (48) не має розв'язку, тобто тіло досягає поверхні води без замивання. Таким чином, при переході через критичне значення U_{0cr} функція $S(U_0)$ має стрибок.

3) Фіксовані параметри k , σ , U_0 . Тоді система рівнянь (49), (50) для кожного $\gamma > 0$ визначає h_{fcr} і мінімальне значення параметра $h_0 = h_{0cr}$, при якому рівняння (48) має розв'язок. При $h_0 < h_{0cr}$ рівняння (48) не має розв'язку, тобто тіло досягає поверхні води без замивання. Таким чином, при переході через критичне значення h_{0cr} функція $S(h_0)$ має стрибок.

4) Фіксовані параметри k , h_0 , U_0 . Тоді система рівнянь (49), (50) для кожного $\gamma > 0$ визначає h_{fcr} і максимальне значення параметра $\sigma = \sigma_{cr}$, при якому рівняння (48) має розв'язок. При $\sigma > \sigma_{cr}$ рівняння (48) не має розв'язку, тобто тіло досягає поверхні води без замивання. Таким чином, при переході через критичне значення σ_{cr} функція $S(\sigma)$ має стрибок.

Подібні стрибки мають місце і при чисельних розрахунках за допомогою програми **SCAV**. Цим пояснюється той факт, що при $\gamma > 0$ програма

іноді дає для оптимальних тіл значно більші значення пройденої відстані, чим передбачають формули (15), (24) та ін. (див. останній рядок таблиці 2). Зокрема, це відбувається тоді, коли задано значення кінцевої глибини $h_f < h_{fcr}$. $h_f < h_{fcr}$.

ВИСНОВКИ

Цікавою особливістю розглянутих задач оптимізації вільного руху СК-моделей з фіксованою кінцевою глибиною є незалежність максимального пройденого шляху та оптимальної форми тіла від кута руху по відношенню до горизонту.

Отримані аналітичні співвідношення дозволяють для різних ізопериметричних умов легко оцінити гранично можливу дальність руху за інерцією СК-тіл та знайти оптимальні форму тіла та радіус кавітатора.

Чисельні розрахунки за допомогою програми **SCAV** добре підтверджують отримані оцінки при будь-яких значеннях кута нахилу траєкторії. Виключенням є особливий випадок при $\gamma > 0$, коли оптимальна модель може проходити значно більшу відстань, досягаючи поверхні води (див. розділ 3). У всіх випадках розрахунки для неоптимальних форм тіл і діаметрів кавітаторів дають набагато менші значення шляху, пройденого за інерцією.

Для реальних СК-моделей, які вільно летять, додатковою вимогою є стійкість їх руху при наявності початкових збурень. При втраті стійкості руху пройдена дистанція різко скорочується. Стійкість руху визначається як формою, так і конструкцією моделей, а саме положенням центру мас та моментом інерції (див. [?]). Комп'ютерне моделювання показало, що у випадках заданого калібру та довжини моделі при фіксованій масі моделі (див. підрозділи 1.1 і 1.2) оптимальна форма моделей може бути вибрана з урахуванням вимог стійкості руху.

1. Нестерук І. Г., Семененко В. М. Задачі оптимізації для суперкавітаційного руху осесиметричних тіл за інерцією // Прикладна гідромеханіка. – 2006. – Т. 8 (80), N 1. – С. 51-59.
2. Путилин С. И. Некоторые особенности динамики суперкавитирующих моделей // Прикладна гідромеханіка. – 2000. – Т. 2 (74), N 3. – С. 65-74.
3. Нестерук И. Г. О форме тонкой осесимметричной нестационарной каверны // Изв. АН СССР, МЖГ. – 1980. – N 4. – С. 38-47.

4. Нестерук И.Г. Некоторые задачи осесимметричных кавитационных течений // Изв. АН СССР, МЖГ.– 1982.– N 1.– С. 28-34.
5. Garabedian P.R. Calculation of axially symmetric cavities and jets // Pac. J. Math.– 1956.– Vol. 6, No. 4.– P. 611-684.
6. Gieseke T.J. Toward an optimal weapon system utilizing supercavitating projectiles // Int. Conference on Cavitation “Cav2001”, 2001. Pasadena, USA.
7. Serebryakov V.V. The models of the supercavitation prediction for high speed motion in water // Int. Summer Scientific School “High Speed Hydrodynamics”. 2002, Cheboksary, Russia. – С. 71-92.
8. Savchenko Yu.N., Semenenko V.N., Putilin S.I. and others. Designing the high-speed supercavitating vehicles // Int. Conf. on Fast Sea Transportation “FAST’2005”.– June 2005. St. Petersburg, Russia.
9. Нестерук І. Г., Савченко Ю.М., Семененко В.М. Оптимізація дальності для суперкавітаційного руху за інерцією // Доповіді НАН України.– 2006.– N 8.– С. 57-66.
10. Семененко В.Н. Компьютерное моделирование динамики суперкавитирующих тел // Прикладна гідромеханіка.– 2000.– Т. 2(77), N 1.– С. 64-69.