

УДК 539.59

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ, ЩО РУХАЮТЬСЯ В РІДИНІ

В. О. ГОРБАНЬ, С. В. МАСЮК

Інститут гідромеханіки НАН України, Київ

Отримано 04.03.2006

У роботі розвивається метод граничних інтегральних елементів для розв'язання задач визначення параметрів потенційних полів, генерованих при русі декількох тіл у безмежній рідині або одного тіла в обмеженій області. Побудовано чисельний алгоритм, що використовує апроксимацію поверхні тривимірного тіла системою трикутних елементів. Проведена апробація алгоритму, порівняння з відомими розв'язками та експериментальними даними. Одержані залежності коефіцієнтів приєднаних мас для тривісного еліпсоїда, що рухається в трапецевидному каналі, від параметрів еліпсоїда та каналу. Проведені розрахунки гідродинамічних сил і моментів, що виникають при русі двох еліпсоїдів з різними швидкостями.

В работе развивается метод граничных интегральных элементов для решения задач определения параметров потенциальных полей, генерированных при движении нескольких тел в безграничной жидкости или одного тела в ограниченной области. Построен численный алгоритм, использующий аппроксимацию поверхности трехмерного тела системой треугольных элементов. Проведена апробация алгоритма, сравнение с известными результатами и экспериментальными данными. Получены зависимости коэффициентов присоединенных масс для трехосного эллипсоида, движущегося в трапецевидном канале, от параметров эллипсоида и канала. Проведены расчеты гидродинамических сил и моментов, возникающих при движении двух эллипсоидов с различными скоростями.

A method of boundary integral elements is developed to obtain parameters of the potential fields generated when either two bodies move in an unbounded region or a body moves in the region with a complex boundary. The numerical algorithm that uses approximation of 3-D body surface with a system of triangular elements is constructed. Approbation of the algorithm and comparison of the present results with known numerical and experimental data are carried out. Added mass coefficients of triaxial ellipsoid that moves in the trapezoidal channel are obtained against different parameters of both the ellipsoid and the channel. Hydrodynamics forces and moments acting on the system of two ellipsoids moving with different velocities are calculated.

ВСТУП

Вивчення гідродинамічної взаємодії тіл, що рухаються в рідині, а також взаємодії тіл і границь течії має важливе практичне значення для вирішення багатьох задач гідромеханіки судна. До такого класу задач належать задачі про рух судна в обмеженому фарватері (зокрема, на мілкій воді, в каналі, біля берега), про спільний рух і гідродинамічну взаємодію декількох суден, про вплив рухомого судна на берегові споруди тощо. Актуальність цих задач зростає з підвищенням інтенсивності судноплавства. Зокрема, з початку минулого століття в морських акваторіях та річках зафіксовано велику кількість зіткнень суден при обгонах і зустрічах. Слід зазначити, що при русі суден у каналах виникає явище притягання до стінок каналу, викликане несиметричністю поля тиску з правого і лівого бортів судна при його зміщенні від площини симетрії та наближенні до одного з відкосів каналу. При русі суден на мілкій воді виникає явище притягання судна до дна, спостерігається збільшення середньої просадки судна (тобто його занурення зростає відносно стану спокою). Тому окремі частини судна заглиблюю-

ться значно більше, ніж їхня просадка. Часто це зумовлює просідання судна на ґрунт.

Останнім часом все більшу роль відіграють задачі впливу судноплавства в річках на навколишнє середовище, зокрема, на екологічну ситуацію в прибережній зоні, на процеси перенесення шкідливих домішок, на зміну рівня води біля берега тощо. Важливими для оптимізації режимів руху суден є також задачі взаємодії судна з нерівностями дна, наприклад, з локальним підйомом дна (зменшенням глибини) або локальними змінами перерізу каналу (звуження, розширення, зміна форми). Як свідчить досвід, локальні неоднорідності (берегові споруди, пришвартовані судна та інші) приводять до трансформації гідродинамічних полів, викликаних рухом судна, зумовлюють виникнення додаткових гідродинамічних сил як на берегові споруди, так і на судно. Це пояснює неабиякий інтерес інженерів-суднобудівників та гідротехніків до результатів відповідних гідродинамічних досліджень.

Гідродинамічна взаємодія тіл, що рухаються в рідині, розглядалася у роботах Г. Г. Павленка, А. А. Костюкова, Ю. М. Мاستушкіна, Ньюмена та інших дослідників [6-8, 10]. Для аналізу автори використовували експериментальні методи або

спрощені напівемпіричні підходи [16-18, 21]. Новий напрямок досліджень пов'язаний з розвитком методів чисельного моделювання [3, 12-16, 23].

В більшості робіт стосовно взаємодії суден розглядалися два судна, що рухаються паралельно з постійними швидкостями V_1 і V_2 , зокрема випадки $V_1 = V_2$ (моделювання операцій перевантаження чи дозаправки під час руху суден у морі), $V_1 = -V_2$ (при зустрічному розходженні), $V_1 \approx V_2$ (при обгоні суден і при маневруванні) і $V_1 = 0$, $V_2 \neq 0$ (при проходженні одного судна повз пришвартоване судно). Зокрема, в роботі Коена і Бека [12] викладено результати досліджень чотирьох різних ситуацій: задачі про поворот судна на певний кут, про рух судна біля вертикальної стінки, про рух судна в каналі з двома вертикальними стінками та про рух судна повз інше нерухоме судно. Всі експерименти проводились з врахуванням дна, змінювалися глибина води, відстань від судна до стінки або відстань між двома суднами. В експериментах вимірювалися гідродинамічні сили, що діють на моделі суден. Викладені також чисельні результати, одержані з застосуванням наближення “тонкого” тіла. Проведене в роботі порівняння чисельних результатів з експериментом свідчить про їх повну якісну кореляцію, хоча кількісно результати були близькими лише в окремих випадках. Експерименти виявили також деякі цікаві ефекти. Наприклад, показали, що бокові гідродинамічні сили і моменти значно зростають при зменшенні глибини води, а також при наближенні судна до однієї зі стінок каналу. Для гідродинамічної взаємодії двох тіл характерним є те, що сили, які діють на рухоме судно, значно менші від сил, які діють на нерухоме судно. Це свідчить, зокрема, про те, що при рухові судна в каналах чи в інших обмежених акваторіях більшу увагу слід приділяти гідродинамічним навантаженням на берегові споруди та пришвартовані або заякорені судна.

В роботі [15] на основі теорії “тонкого” тіла одержані оцінки для додаткових гідродинамічних бокових сил і моментів, що діють на судно, при проходженні повз різні нерівномірності в каналі (звуження каналу, виступи) і показано, що ці сили і моменти можуть бути значними.

Гідродинамічні явища помітно відрізняються залежно від швидкості судна і його розмірів, а також залежно від числа Фруда Fr . При малих числах Фруда $Fr \ll 1$ хвилі практично не утворюються, відбувається денівеляція (локальна зміна рівня) поверхні, зумовлена перерозподілом тиску на вільній поверхні при обтіканні тіла, виникають додаткові підсмоктуючі сили до дна і до стінки каналу. При більших числах Фруда значну роль

відіграє хвилеутворення, яке зумовлює різке зростання сили опору рухові судна. Розв'язок задачі гідродинамічної взаємодії суден, як правило, проводився без врахування хвилеутворення. Відомі лише поодинокі розрахунки гідродинамічних полів з врахуванням хвиль. Це пов'язано з істотними труднощами як методологічного, так і обчислювального характеру.

В статті обмежимося аналізом задач без врахування процесів хвилеутворення.

Методологія досліджень. Для аналізу гідродинамічної взаємодії тіл та оцінки сил і моментів застосовувались різні підходи і методи. В багатьох роботах використовували експериментальні коефіцієнти для сил та моментів, а також напівемпіричні формули для просадки судна. Часто використовувався наближений метод Блоха–Гіневського [4, 6, 8]. Потенціал швидкостей системи тіл, що рухаються в ідеальній безмежній рідині, визначався наближено:

$$\Phi = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^6 v_{ki} \varphi_{ki}.$$

Тут v_{ki} – проекції на осі нерухомої системи координат вектора лінійної швидкості $\vec{v}_k = (v_{k1}, v_{k2}, v_{k3})$ і вектора кутової швидкості $\vec{\omega}_k = (\omega_{k4}, \omega_{k5}, \omega_{k6})$, φ_{ki} – потенціал швидкостей, що визначається поступальним рухом k -го тіла вздовж однієї з осей координат з одиничною швидкістю $i = 1, 2, 3$ або обертанням його навколо однієї з осей з одиничною кутовою швидкістю $i = 4, 5, 6$ за умови, що всі інші тіла є нерухомими. Для визначення φ_{ki} використовуються співвідношення:

$$\varphi_{ki}^0 = \varphi_{ki} + \sum_{r=1}^6 \sum_{j \neq k}^n \Delta v_{jr}^{(k)} \cdot \varphi_{jr},$$

де φ_{ki}^0 – потенціал, що визначає рух k -го тіла в безмежній рідині при відсутності інших тіл; $\Delta v_{jr}^{(k)}$ – індуктивна швидкість, викликана рухом j -го тіла в центрі k -го тіла. Як показано Ю.М. Мاستушкіним [8], такий підхід дає непогані результати, а отримані залежності якісно близькі до експериментальних.

Останнім часом широкого розповсюдження набули чисельні методи, зокрема, панельний метод (метод граничних елементів – МГЕ). Основа цього методу – теорема Гріна, в якій потенціал швидкості в кожній точці рідини визначається розподілом гідродинамічних особливостей по граничній поверхні [1, 2]. В загальному випадку задача визначення потенціалу φ приводиться до інтегрального рівняння відносно невідомої інтенсивності джерел

(або диполів), розподілених по граничній поверхні. Такий підхід мав головним чином теоретичний інтерес, доки Хесс і Сміт [14] не розвинули панельний метод і не показали його ефективність для тривимірних тіл, що рухаються в необмеженій рідині. Враховуючи, що області вихрового сліду біля поверхні судна та пограничного шару мають незначні розміри, при аналізі гідродинамічної взаємодії тіл, як правило, вони не враховуються. Тоді задача приводиться до розв'язання тривимірного рівняння Лапласа для потенціалу швидкості.

Основні кроки панельного методу полягають у наступному:

1. Гідродинамічний потенціал представлено розподілом джерел невідомої інтенсивності по граничній поверхні (непрямий метод граничних елементів).

2. Поверхня тіла апроксимується великим числом елементарних панелей (у Сміта і Хесса це плоскі чотирикутники).

3. Інтенсивності джерел і диполів приймаються постійними на кожній панелі і є невідомими.

4. У випадку задачі Неймана нормальна похідна потенціалу швидкостей в центрі (геометричному) кожної панелі прирівнюється до нормальної швидкості в цій точці. У випадку задачі Діріхле безпосередньо в цих точках визначається потенціал швидкостей. Рівняння для невідомих інтенсивностей джерел (або потенціалів) розв'язуються стандартними методами лінійної алгебри.

5. Сили та моменти визначають, застосовуючи рівняння Бернуллі або рівняння Лагранжа 2-го роду.

Дослідниками було докладено багато зусиль, щоб застосувати описаний метод до задач вільної поверхні, які включають у себе рух плаваючих та занурених тіл. Використання панельних методів для вільної поверхні пов'язане з труднощами через складність відповідної функції Гріна та обмежені можливості обчислювальної техніки. Числові апроксимації функції Гріна для деяких випадків руху тіла біля вільної поверхні розвивались Ньюменом [19, 20].

Незважаючи на велику кількість натурних та експериментальних досліджень, слід зазначити, що структура течії при обтіканні берегових структур та кораблів у каналах вивчена недостатньо. Зокрема, це стосується нерівномірних режимів руху та маневрування судна, особливостей роботи рушійно-стернового комплексу, впливу ширини та посадки судна, які в моделі “тонкого” тіла описуються наближено.

У даній роботі детально розглянуто непрямий метод граничних елементів, з використанням три-

кутних панелей в зручній для алгоритмізації формі. Проведена апробація цього методу для задачі просторового руху сфери та еліпсоїда у необмеженій рідині. За допомогою вказаного методу розв'язана задача про рух тривісного еліпсоїда в каналі. Проведені дослідження структури течії, яка виникає при обтіканні еліпсоїда при малих числах Фруда та денівеляції вільної поверхні. Проведено також аналіз гідродинамічної взаємодії двох тривісних еліпсоїдів.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ

Розглянемо рух тіла в ідеальній нестисливій рідині. Позначимо область, у якій рухається тіло, через Ω , а її граничну поверхню – через S . У випадку стаціонарної безвихрової течії цей рух можна описати за допомогою потенціалу $\varphi(\vec{x})$, де $\vec{x} = (x, y, z) \in \Omega$. Для нестисливості рідини потенціал $\varphi(\vec{x})$ задовільняє рівнянню Лапласа:

$$\Delta\varphi(\vec{x}) = 0. \quad (1)$$

Використаємо ортогональну декартову систему координат $Oxyz$, зв'язану з рухомим судном: горизонтальна площина Oxy співпадає з поверхнею ватерлінії судна, тобто з незбуреною поверхнею води. Будемо розглядати випадок малих чисел Фруда $Fr \ll 1$ ($Fr < 0.1$); вплив хвилеутворення на сили гідродинамічної взаємодії судна з границями (наприклад, з стінкою каналу) чи з іншими суднами не будемо розглядати. Якщо поверхня води незбурена, для аналізу полів, пов'язаних з судном, можна скористатись дзеркальним відображенням зануреної частини судна відносно площини Oxy . Гідродинамічні поля, генеровані одержаним таким чином тілом у безграничній рідині, еквівалентні аналогічним полям, що викликані рухом судна, яке плаває на поверхні води. Проводиться також перехід від форми судна зі складними обрисами до еквівалентного еліпсоїда. Для вибору розмірів цього еліпсоїда можна використати, наприклад, підхід, коли довжина судна, його ширина та просадка дорівнюють відповідно $2a$, $2b$ і c (a, b, c – півосі еліпсоїда). Інший можливий алгоритм: ширина судна дорівнює $2b$, просадка співпадає з c , а величина a визначається із умови рівності об'ємів підводної частини судна і половини еліпсоїда. Зазначимо, що використання моделі еквівалентного еліпсоїда для чисельного алгоритму, який побудовано далі, не є принциповим обмеженням. Нижче розглядається гідродинамічна взаємодія декількох тіл, що рухаються в нерухомій рідині, або взає-

модія тіл з гладкими непроникними границями. Чисельні результати приведені для випадку тривісних еліпсоїдів. Закон руху тіла $\vec{V}(\vec{x}_0, t)$ вважається заданим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = \vec{V}(\vec{x}_0, t) \cdot \vec{n}(\vec{x}_0), \quad (2)$$

$\vec{x}_0 \in S$, $\vec{n}(\vec{x}_0) = [n_x, n_y, n_z]$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні S ,

$$\vec{x}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S.$$

Сингулярні розв’язки рівняння Лапласа.

Фундаментальні розв’язки задачі дають значення потенціалу φ в довільній точці спостереження \vec{x} , викликані одиничним джерелом, яке знаходиться в точці $\vec{\xi} = (\xi, \eta, \zeta)$. У випадку необмеженої рідини, коли \vec{a} – довільний вектор, маємо:

$$\varphi(\vec{x}) = G(\vec{x}, \vec{\xi}), \quad G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi r(\vec{x}, \vec{\xi})}, \quad (3)$$

$$r(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2},$$

$$\frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial a} = \frac{\partial G}{\partial a} = G_a(\vec{x}, \vec{\xi}) = \vec{V}(\vec{x}) \vec{a}(\vec{x}),$$

$$\vec{V}(\vec{x}) = \frac{1}{4\pi r^3} (\xi - x, \eta - y, \zeta - z),$$

$$G_a(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{(\xi - x)a_x + (\eta - y)a_y + (\zeta - z)a_z}{4\pi r^3}.$$

Для побудови розв’язку рівняння Лапласа при рухові тіла біля вільної поверхні рідини використовується обмеження, що тіло рухається з постійною швидкістю v_0 в напрямку осі x . Якщо система координат зв’язана з тілом, то в такій рухомій системі координат потенціал швидкості φ є функцією лише координат x, y, z точок простору і не залежить від часу.

Введемо також нерухому в просторі систему координат x_1, y_1, z_1 , яка в момент часу $t = 0$ збігається з рухомою системою x, y, z , тоді:

$$x_1 = x + v_0 t, \quad y_1 = y, \quad z_1 = z;$$

$$\varphi_1(x_1, y_1, z_1, t) = \varphi(x_1 - v_0 t, y_1, z_1),$$

звідки

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} = -v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} = v_0^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}.$$

Якщо розглядати замість руху тіла з швидкістю v_0 обтікання його потоком зі швидкістю $-v_0$ на нескінченності, то потенціал швидкості φ^* такої течії можна записати у вигляді

$$\varphi^*(x, y, z) = -v_0 x + \varphi(x, y, z),$$

де φ – потенціал швидкостей, викликаний присутністю тіла в потоці.

Запишемо кінематичну частину граничної умови на вільній поверхні рідини для потенціала швидкостей φ^* . Нехай рівняння вільної поверхні буде $z = f(x, y)$. Тоді:

$$-v_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0,$$

при $z = f(x, y)$. Динамічна умова на вільній поверхні впливає з інтеграла Ейлера-Бернуллі:

$$z - \frac{v_0}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial x} +$$

$$+ \frac{1}{2g} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] = 0.$$

Тут g – прискорення вільного падіння. В загальному випадку гранична умова є нелінійною і виконується на невідомій хвильовій поверхні $z = f(x, y)$. У випадку лінійних хвиль маємо:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{g}{v_0^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0, \quad z = 0$$

при обтіканні тіла потоком рідини або:

$$\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial t^2} + g \frac{\partial \varphi_1}{\partial z_1} = 0, \quad z_1 = 0$$

в нерухомій системі координат $0x_1y_1z_1$.

На нескінченності виконується умова затухання хвиль, що генеруються тілом. Для такого випадку розв’язок побудовано Хавелоком і Сретенським [6, 11]:

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(\vec{x}, \vec{\xi})} - \frac{1}{r'(\vec{x}, \vec{\xi})} + G_1(\vec{x}, \vec{\xi}) \right],$$

$$r'(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta)^2},$$

$$G_1(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{\nu}{\pi} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{\lambda(\zeta+z+i(x-\xi)\cos\theta+i(y-\eta)\sin\theta)}}{\nu - i\mu\cos\theta - \lambda\cos^2\theta} d\lambda d\theta,$$

де $\nu = g/v_0^2$, $\mu \rightarrow 0$. У випадку малих чисел Фруда розв’язок набуває вигляду [6]:

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r(\vec{x}, \vec{\xi})} + \frac{1}{r'(\vec{x}, \vec{\xi})} \right]. \quad (4)$$

Чисельні алгоритми для обчислення функції $G_1(\vec{x}, \vec{\xi})$ побудовані у роботах Ньюмена [19, 20].

У випадку обмеженої глибини води (рух судна на мілководді), коли на дні виконується умова непротікання, функцію Гріна $G(\vec{x}, \vec{\xi})$ можна побудувати, застосовуючи метод дзеркальних відображень:

$$G(\vec{x}, \vec{\xi}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} + \frac{1}{r'_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} \right], \quad (5)$$

$$r_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta + 2kh)^2},$$

$$r'_k(\vec{x}, \vec{\xi}, h) = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z + \zeta + 2kh)^2},$$

$$\begin{aligned} G_a(\vec{x}, \vec{\xi}) &= \frac{\partial G}{\partial a} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{(\xi - x)a_x + (\eta - y)a_y + (\zeta - z - 2kh)a_z}{4\pi r_k^3(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} + \frac{(\xi - x)a_x}{4\pi r'_k^3(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} + \frac{(\eta - y)a_y + (\zeta + z + 2kh)a_z}{4\pi r'_k^3(\vec{x}, \vec{\xi}, h)} \right]. \end{aligned}$$

Тут h – глибина води.

2. ЧИСЕЛЬНА МОДЕЛЬ

Чисельна модель передбачає застосування методу граничних елементів, описаного нижче.

Поверхня тіла S моделюється розподілом джерел інтенсивності $q(\vec{\xi})$. Реакція рідини в певній точці спостереження \vec{x}_0 на розподілення джерел $q(\vec{\xi})$, тобто значення в цій точці потенціалу $\varphi(\vec{x}_0)$ та значення швидкості в довільному напрямку $\vec{a}(\vec{x}_0)$, визначається через відповідні інтеграли по поверхні S :

$$\varphi(\vec{x}) = \int_S G(\vec{x}, \vec{\xi}) q(\vec{\xi}) dS + C.$$

Враховуючи умови на нескінченності: $r \rightarrow \infty$, $\varphi \rightarrow 0$, $C = 0$. Аналогічно для $\partial\varphi/\partial a$ маємо:

$$\frac{\partial\varphi(\vec{x})}{\partial a} = \int_S G_a(\vec{x}, \vec{\xi}) q(\vec{\xi}) dS.$$

Якщо точка \vec{x}_0 розташована на поверхні S , отримуємо:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{x}_0) &= \int_S G(\vec{x}_0, \vec{\xi}) q(\vec{\xi}) dS, \\ \frac{\partial\varphi(\vec{x}_0)}{\partial n} &= \int_S^* G_n(\vec{x}_0, \vec{\xi}) q(\vec{\xi}) dS. \end{aligned} \quad (6)$$

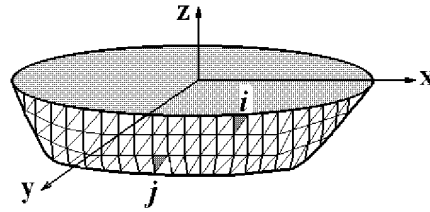


Рис. 1. Апроксимація поверхні граничними елементами

Тут \int_S^* – позначає сингулярний інтеграл з особливістю в $G_n(\vec{x}_0, \vec{\xi})$ при $\vec{x}_0 \rightarrow \vec{\xi}$ і визначається як головне значення інтегралу Коші з додатковим членом, зумовленим особливістю.

У коректно поставленій задачі одна з функцій $\varphi(\vec{x}_0)$ або $\partial\varphi(\vec{x}_0)/\partial n$ повинна бути відомою в кожній точці границі S . Рівняння (6) можна розглядати як систему двох інтегральних рівнянь відносно єдиної невідомої функції $q(\vec{\xi})$. Після знаходження $q(\vec{\xi})$ значення $\varphi(\vec{x})$ та швидкості $\vec{V}(\vec{x})$ в довільній точці $\vec{x} \in \Omega$ розрахувати нескладно.

Дискретизація інтегралів. Для розв'язання рівнянь (6) будемо використовувати чисельні алгоритми, а саме дискретизацію поверхневих інтегралів плоскими трикутними граничними елементами, на кожному з яких, наприклад j -елементі, інтенсивність поверхневих джерел $q(\vec{\xi}^j)$ постійна.

Якщо поверхню S апроксимувати N -граничними трикутниками, як показано на рис. 1, то можна записати дискретні аналоги рівнянь (6). Для потенціалу $\varphi(\vec{x}_0^i)$ і нормальної складової швидкості $V_n(\vec{x}_0^i)$ на i -му граничному елементі будемо мати:

$$\varphi(\vec{x}_0^i) = \sum_{j=1}^N q(\vec{\xi}^j) \int_{\Delta S^j} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS, \quad (7)$$

$$V_n(\vec{x}_0^i) = \sum_{j=1}^N q(\vec{\xi}^j) \int_{\Delta S^j}^* G_n(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS,$$

де x_0^i – координати середньої точки i -го граничного елемента, ΔS^j – площа j -го граничного елемента.

Формування матриць системи. Вирази (7) визначають потенціал і нормальну швидкість у середній точці (центрі мас) граничного елемента з номером i , викликані дією всіх джерел з інтенсивностями $q(\vec{\xi})$. Перепишемо рівняння (7) у більш

зручному вигляді:

$$\begin{aligned} \varphi^i &= \left(\int_{\Delta S^j} G^{ij} dS \right) \vec{q}^j, \\ V_n^i &= \left(\int_{\Delta S^j}^* G_n^{ij} dS \right) \vec{q}^j, \end{aligned} \quad (8)$$

де \vec{q}^j – вектор стовпчик розмірності N , а члени в дужках – вектор-рядки відповідних розмірностей. Кожний елемент цих вектор-рядків виходить у результаті інтегрування. Таким чином, першим елементом першого вектор-рядка в співвідношенні (8) буде:

$$G^{i1} = \int_{\Delta S^1} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^1) dS.$$

Обчислення цих проміжних інтегралів буде детально описано нижче, а зараз зазначимо, що остаточна форма співвідношень (8) еквівалентна наступній:

$$\varphi^i = (G^{ij}) \vec{q}^j, \quad V_n^i = (G_n^{ij}) \vec{q}^j.$$

Якщо аналогічні операції провести для всіх граничних елементів ($i = 1, 2, \dots, N$), то одержану в результаті повну систему рівнянь для $\vec{\varphi}$ і \vec{V}_n можна записати у вигляді:

$$\vec{\varphi} = G^S \vec{q}, \quad \vec{V}_n = G_n^S \vec{q}, \quad (9)$$

де очевидно $\vec{\varphi}, \vec{V}_n, \vec{q}$ – N -вимірні вектори граничних значень, а G^S і G_n^S – матриці розміром $N \times N$.

Знаходження дотичних швидкостей на граничній поверхні. Єдина невідома в рівнянні (9) \vec{q} може бути знайдена звичайними методами матричної алгебри шляхом обергання матриці розміром $N \times N$. Далі, підставляючи \vec{q} по чергово в кожне з рівнянь (9), ми можемо визначити значення потенціалу та нормальної швидкості на всій поверхні S . Також за допомогою другого з рівнянь (9) може бути вирахована величина швидкості у довільному напрямку $\vec{k}(\vec{x}_0^i)$.

Для знаходження дотичних швидкостей на граничній поверхні скористаємось рівнянням

$$V_\tau^i = (\vec{G}_\tau^{ij}) \vec{q}^j,$$

де V_τ^i – невідома дотична швидкість у напрямку $\vec{\tau}(\vec{x}_0) = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$ на довільному елементі; \vec{q}^j – відомий вектор розподілу щільності фіктивних джерел на поверхні S , знайдений з (9);

$$G_\tau^{ij} = \int_{\Delta S^j} G_\tau(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS.$$

Знаходження потенціалу та швидкості у внутрішніх точках області. Значення потенціалу у внутрішніх точках \vec{x}^i області Ω вираховуються за відомими значеннями \vec{q} за допомогою рівнянь (9). Компоненти швидкості в тих самих точках \vec{x}^i в певному напрямку $\vec{k}(\vec{x}^i)$ також можуть бути знайдені з рівнянь (9).

Визначення матриць G_n^{ij} та G^{ij} є ключовим моментом панельного методу. Виділимо три типи елементів матриць G_n^{ij} та G^{ij} .

1) Діагональні G_n^{jj} та G^{jj} – точка \vec{x}_0 , в якій обчислюється швидкість від j -го дискретного елемента, розташована на цьому елементі.

2) Елементи матриці близькі за величиною до діагональних: точка \vec{x}_0 – розташована на сусідніх з j -тим дискретних елементах (випадок ближнього поля), до таких елементів віднесемо також інші дискретні елементи, розташовані на малій відстані від j -го елемента. Такі ситуації зустрічаються для тіл складної форми з локальними звуженнями або при дискретній апроксимації поверхонь декількох тіл, близько розташованих одне до одного.

3) Всі інші елементи матриць G_n^{ij} та G^{ij} – так званий випадок дальнього поля, коли точка \vec{x}_0 , в якій обчислюється швидкість, розташована достатньо далеко від j -го елемента поверхні.

Алгоритми обчислення інтегралів G_n^{ij} та G^{ij} у цих випадках істотно відрізняються, зокрема, для діагональних елементів G_n^{jj} маємо сингулярні інтеграли. Точність визначення матриць G_n^{ij} і G^{ij} та необхідний для цього об'єм обчислень визначають ефективність чисельного методу. Тому дослідники приділяють велику увагу процедурі приведення двовимірних інтегралів до одновимірних. Для деяких з цих інтегралів вдається побудувати аналітичні вирази. Враховуючи важливість цього алгоритму, перетворення інтегралів G_n^{ij} , G_τ^{ij} та G^{ij} докладно описано нижче.

Перетворення координат. Для знаходження матриць коефіцієнтів у рівняннях (9) потрібно вираховувати інтеграли по плоских елементах. Очевидно, що для зручності обчислення цих інтегралів доцільно ввести локальну систему координат, зв'язану з елементом, і застосувати геометричне перетворення координат.

Розглянемо для початку перетворення координат у двовимірному випадку. Нехай ми маємо трикутний елемент $A_1 A_2 A_3$ (рис. 2) та $P(x, y)$. Потрібно виконати таке перетворення:

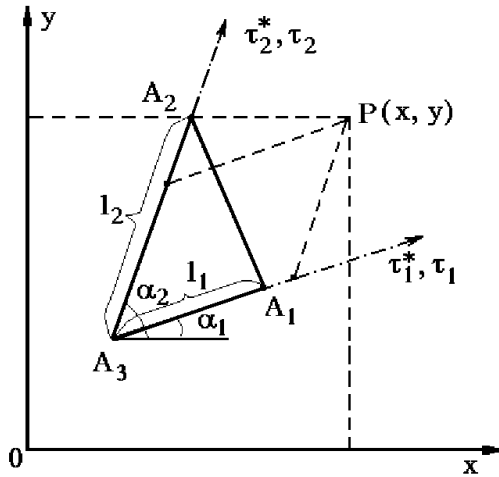
$$P(x, y) \rightarrow P(\tau_1^*, \tau_2^*) \rightarrow P(\tau_1, \tau_2),$$

щоб:

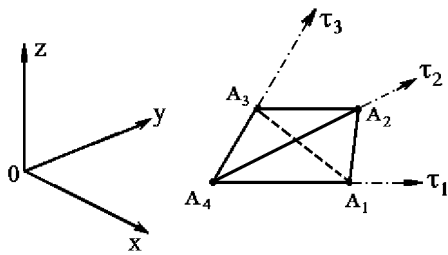
$$A_3(x_3, y_3) \rightarrow A_3(0, 0) \rightarrow A_3(0, 0),$$

$$A_1(x_1, y_1) \rightarrow A_1(\tau_1^*, 0) \rightarrow A_1(1, 0),$$

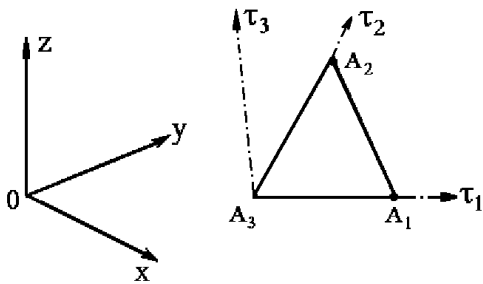
$$A_2(x_2, y_2) \rightarrow A_2(0, \tau_2^*) \rightarrow A_2(0, 1),$$



a



б



с

Рис. 2. Перетворення координат: а – на площині; б – в просторовому випадку (тетраедр); с – в просторовому випадку для трикутника з довільною орієнтацією

тобто потрібно виконати таке перетворення системи координат $0xy$ у неортогональну (косокутну)

систему координат $0\tau_1\tau_2$, щоб її осі були спрямовані по сторонах трикутника, а довжини цих сторін у новій системі координат були рівними одиниці (рис. 2, а)

$$\begin{aligned} x - x_3 &= \tau_1^* \cos \alpha_1 + \tau_2^* \cos \alpha_2 = \\ &= \tau_1^* \frac{x_1 - x_3}{l_1} + \tau_2^* \frac{x_2 - x_3}{l_2} \\ y - y_3 &= \tau_1^* \sin \alpha_1 + \tau_2^* \sin \alpha_2 = \\ &= \tau_1^* \frac{y_1 - y_3}{l_1} + \tau_2^* \frac{y_2 - y_3}{l_2}. \end{aligned}$$

Якщо ввести позначення $\tau_i = \tau_i^*/l_i$, $i = 1, 2$, то матимемо:

$$x = \tau_1(x_1 - x_3) + \tau_2(x_2 - x_3) + x_3,$$

$$y = \tau_1(y_1 - y_3) + \tau_2(y_2 - y_3) + y_3.$$

Узагальнюючи отримане перетворення, для тривимірного випадку одержимо (рис. 2, б):

$$x = \tau_1(x_1 - x_4) + \tau_2(x_2 - x_4) + \tau_3(x_3 - x_4) + x_4,$$

$$y = \tau_1(y_1 - y_4) + \tau_2(y_2 - y_4) + \tau_3(y_3 - y_4) + y_4,$$

$$z = \tau_1(z_1 - z_4) + \tau_2(z_2 - z_4) + \tau_3(z_3 - z_4) + z_4.$$

Осі нової системи координат $0\tau_1\tau_2\tau_3$ спрямовані по ребрах тетраедра $A_1A_2A_3A_4$. Розглянемо випадок, коли плоский (трикутний) елемент знаходиться в просторі (рис. 2, с). Можна показати, що формули для перетворення координат мають вигляд:

$$x = \tau_1(x_1 - x_3) + \tau_2(x_2 - x_3) + x_3,$$

$$y = \tau_1(y_1 - y_3) + \tau_2(y_2 - y_3) + y_3,$$

$$z = \tau_1(z_1 - z_3) + \tau_2(z_2 - z_3) + z_3,$$

або у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ 1 - \tau_1 - \tau_2 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

В результаті осі нової системи координат τ_1 і τ_2 будуть спрямовані по сторонах трикутника A_3A_1 та A_3A_2 , а вісь τ_3 буде перпендикулярною до площини трикутника $A_1A_2A_3$

Обчислення інтегралів. Розглянемо інтеграли, які потрібно обчислити для знаходження матриць коефіцієнтів у рівняннях (9):

$$1) \int_{\Delta S^j} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS,$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \int_{\Delta S^j}^* G_n(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS, \\
 3) \quad & \int_{\Delta S^j} G_\tau(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS. \quad (11)
 \end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\tau_1} \frac{\vec{r}(\tau_1, \tau_2) \cdot \vec{n}(\vec{x}_0)}{r^3(\tau_1, \tau_2)} d\tau_1 d\tau_2. \quad (14)$$

Випадак несингулярних інтегралів. Розглянемо спочатку інтеграли 1) і 2) у несингулярному випадку, тобто коли $\vec{x}_0^i \neq \vec{\xi}^j$. Застосуємо до змінної $\vec{\xi}^j = (\xi, \eta, \zeta)$ координатні перетворення (10). Таким чином, маємо:

$$\xi = (\xi_1 - \xi_3)\tau_1 + (\xi_2 - \xi_3)\tau_2 + \xi_3,$$

$$\eta = (\eta_1 - \eta_3)\tau_1 + (\eta_2 - \eta_3)\tau_2 + \eta_3,$$

$$\zeta = (\zeta_1 - \zeta_3)\tau_1 + (\zeta_2 - \zeta_3)\tau_2 + \zeta_3,$$

(ξ_k, η_k, ζ_k) – координати т. A_k (рис. 2, с),

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Delta S^j} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS = \\
 & = \int_{\Delta S^j} \frac{dS}{4\pi \sqrt{(x_0 - \xi)^2 + (y_0 - \eta)^2 + (z_0 - \zeta)^2}} = \\
 & = \frac{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\tau_1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{r(\tau_1, \tau_2)}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r(\tau_1, \tau_2) = & \{ [(\xi_1 - \xi_3)\tau_1 + (\xi_2 - \xi_3)\tau_2 + \xi_3 - x_0]^2 + \\
 & + [(\eta_1 - \eta_3)\tau_1 + (\eta_2 - \eta_3)\tau_2 + \eta_3 - y_0]^2 + \\
 & + [(\zeta_1 - \zeta_3)\tau_1 + (\zeta_2 - \zeta_3)\tau_2 + \zeta_3 - z_0]^2 \}^{1/2},
 \end{aligned}$$

\tilde{E} , \tilde{G} , \tilde{F} – коефіцієнти квадратичної форми для j -го дискретного елемента поверхні ΔS^j :

$$\begin{aligned}
 \tilde{E} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tau_1} \right)^2 = \\
 &= (\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 + (\zeta_1 - \zeta_3)^2, \\
 \tilde{G} &= \left(\frac{\partial \xi}{\partial \tau_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \eta}{\partial \tau_2} \right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tau_2} \right)^2 = \\
 &= (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\eta_2 - \eta_3)^2 + (\zeta_2 - \zeta_3)^2, \\
 \tilde{F} &= \frac{\partial \xi}{\partial \tau_1} \frac{\partial \xi}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \eta}{\partial \tau_1} \frac{\partial \eta}{\partial \tau_2} + \frac{\partial \zeta}{\partial \tau_1} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau_2} = (\xi_1 - \xi_3)(\xi_2 - \xi_3) + \\
 &+ (\eta_1 - \eta_3)(\eta_2 - \eta_3) + (\zeta_1 - \zeta_3)(\zeta_2 - \zeta_3). \quad (13)
 \end{aligned}$$

Аналогічно:

$$\int_{\Delta S^j} G_n(\vec{x}^i, \vec{\xi}^j) dS =$$

Випадак дальнього поля. У випадку дальнього поля, тобто при умові, що:

$$r(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}_c^j) =$$

$$= \sqrt{(x_0 - \xi_c)^2 + (y_0 - \eta_c)^2 + (z_0 - \zeta_c)^2} \geq 4\sqrt{2\Delta S^j},$$

де $\vec{\xi}_c^j = (\xi_c, \eta_c, \zeta_c)$ – геометричний центр j -го елемента, для виразів (12) і (14) можна застосувати чисельне інтегрування по трикутнику [1, ст. 479]. Вираз для інтегралу 3) в (11) отримується з (14) заміною нормалі $\vec{n}_0 = (n_x, n_y, n_z)$ на дотичний напрямок $\vec{\tau}_0 = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$.

Випадак ближнього поля. У випадку ближнього поля, тобто при умові

$$\vec{r}(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}_c^j) < 4\sqrt{2\Delta S^j}$$

вирази (12) та (14) потрібно інтегрувати з достатньо високою точністю. Спробуємо проінтегрувати (14) по змінній τ_2 , для цього введемо наступні позначення:

$$a_1 = \xi_1 - \xi_3; \quad b_1 = \eta_1 - \eta_3; \quad c_1 = \zeta_1 - \zeta_3;$$

$$a_2 = \xi_2 - \xi_3; \quad b_2 = \eta_2 - \eta_3; \quad c_2 = \zeta_2 - \zeta_3;$$

$$a_3 = \xi_3 - x_0; \quad b_3 = \eta_3 - y_0; \quad c_3 = \zeta_3 - z_0;$$

$$\tilde{E}_1 = a_1 a_3 + b_1 b_3 + c_1 c_3;$$

$$\tilde{G}_1 = a_2 a_3 + b_2 b_3 + c_2 c_3;$$

$$\tilde{F}_1 = a_3^2 + b_3^2 + c_3^2;$$

$$A = a_1 n_x + b_1 n_y + c_1 n_z;$$

$$B = a_2 n_x + b_2 n_y + c_2 n_z;$$

$$C = a_3 n_x + b_3 n_y + c_3 n_z; \quad (15)$$

тоді з співвідношень (13) маємо:

$$\tilde{E} = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2;$$

$$\tilde{G} = a_2^2 + b_2^2 + c_2^2;$$

$$\tilde{F} = a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2.$$

Тоді з співвідношень (14) матимемо:

$$\int_{\Delta S^j} G_n(\vec{x}^i, \vec{\xi}^j) dS =$$

$$= \frac{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}}{4\pi} \int_0^1 \int_0^{1-\tau_1} \frac{r^*(\tau_1, \tau_2) \vec{n}(\vec{x}_0)}{(r^*(\tau_1, \tau_2))^3} d\tau_1 d\tau_2, \quad (16)$$

$$r^*(\tau_1, \tau_2) = [(a_1\tau_1 + a_2\tau_2 + a_3)^2 + (b_1\tau_1 + b_2\tau_2 + b_3)^2 + (c_1\tau_1 + c_2\tau_2 + c_3)^2]^{1/2}.$$

Нехай:

$$\tilde{c} = \frac{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}}{2\pi}, \quad c(\tau_1) = \tilde{E}\tau_1^2 + 2\tilde{E}_1\tau_1 + \tilde{F}_1,$$

$$r^{**}(\tau_1, \tau_2) = \sqrt{\tilde{G}\tau_2^2 + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)\tau_2 + c(\tau_1)}.$$

Розкриваючи дужки в співвідношенні (16) і перетворюючи його з використанням (15), матимемо:

$$G_n^{ij} = \frac{\tilde{c}}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\tau_1} \frac{(B\tau_2 + (A\tau_1 + C))d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{(r^{**}(\tau_1, \tau_2))^3}}, \quad (17)$$

позначимо через Δ – дискримінант підкореневого виразу, який є квадратним тричленом відносно τ_2 . Таким чином:

$$\Delta = \tilde{G}(\tilde{E}\tau_1^2 + 2\tilde{E}_1\tau_1 + \tilde{F}_1) - (\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)^2 = (\tilde{G}\tilde{E} - \tilde{F}^2)\tau_1^2 + 2(\tilde{E}_1\tilde{G} - \tilde{F}\tilde{G}_1)\tau_1 + \tilde{G}\tilde{F}_1 - \tilde{G}_1^2.$$

I. У випадку, якщо $\Delta \neq 0$, інтегруючи (17) по τ_2 , отримаємо:

$$G_n^{ij} = -\tilde{c} \int_0^1 \frac{B((\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)\tau_2 + c(\tau_1))}{\Delta \cdot r^{**}(\tau_1, \tau_2)} \Big|_{\tau_2=0}^{\tau_2=1-\tau_1} d\tau_1 +$$

$$+\tilde{c} \int_0^1 \frac{(A\tau_1 + C)(\tilde{G}\tau_2 + \tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)}{\Delta \cdot r^{**}(\tau_1, \tau_2)} \Big|_{\tau_2=0}^{\tau_2=1-\tau_1} d\tau_1 =$$

$$= -\tilde{c} \int_0^1 \frac{B((\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)(1-\tau_1) + c(\tau_1))}{\Delta \cdot r^{**}(\tau_1, 1-\tau_1)} d\tau_1 +$$

$$+\tilde{c} \int_0^1 \frac{(A\tau_1 + C)(\tilde{G}(1-\tau_1) + \tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)}{\Delta \cdot r^{**}(\tau_1, 1-\tau_1)} d\tau_1 -$$

$$-\tilde{c} \int_0^1 \frac{[A(\tau_1 + C)(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1) - Bc(\tau_1)]}{\Delta \cdot \sqrt{c(\tau_1)}} d\tau_1. \quad (18)$$

II. У випадку, коли $\Delta = 0$ маємо:

$$\tilde{c}^* = -\frac{\sqrt{\tilde{E}\tilde{G} - \tilde{F}^2}}{8\pi\tilde{G} \cdot \sqrt{\tilde{G}}},$$

$$\tilde{F}^* = \tilde{F}/\tilde{G}, \quad \tilde{G}_1^* = \tilde{G}_1/\tilde{G},$$

$$G_n^{ij} = -\tilde{c}^* \int_0^1 \left[\frac{A\tau_1 + C}{(\tau_2 + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*) \cdot |\tau_2 + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*|} - \frac{B(2\tau_2 + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*)}{(\tau_2 + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*) \cdot |\tau_2 + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*|} \right] \Big|_{\tau_2=0}^{\tau_2=1-\tau_1} d\tau_1 =$$

$$= \tilde{c}^* \int_0^1 \left[\frac{A\tau_1 + C + B(\tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*)}{(\tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*) \cdot |\tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*|} - \frac{A\tau_1 + C + B(2(1-\tau_1) + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*)}{(1-\tau_1 + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*) \cdot |1-\tau_1 + \tau_1\tilde{F}^* + \tilde{G}_1^*|} \right] d\tau_1. \quad (19)$$

Отримані інтеграли (18) та (19) у випадку відсутності особливості, тобто при умові, що $\tilde{\xi} \neq \vec{x}_0$ можна проінтегрувати з заданою точністю методом Гауса або Симпсона.

Проводячи аналогічні міркування, перетворимо вираз (12) до вигляду:

$$G^{ij} = \frac{\tilde{c}}{2} \int_0^1 \int_0^{1-\tau_1} \frac{d\tau_1 d\tau_2}{\sqrt{\tilde{G}\tau_2^2 + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)\tau_2 + c(\tau_1)}}.$$

I. У випадку $\Delta \neq 0$:

$$G^{ij} = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{G}}} \int_0^1 \ln|Q| \Big|_{\tau_2=0}^{\tau_2=1-\tau_1} d\tau_1 =$$

$$= \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{G}}} \int_0^1 \left(\ln \left| \frac{Q^*}{\sqrt{\tilde{G}c(\tau_1)} + \tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1} \right| \right) d\tau_1, \quad (20)$$

$$Q = 2\sqrt{\tilde{G}(\tilde{G}\tau_2^2 + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)\tau_2 + c(\tau_1))} +$$

$$+ 2\tilde{G}\tau_2 + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1),$$

$$Q^* = \tilde{G}(1-\tau_1) + \tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1 +$$

$$+\sqrt{\tilde{G}(\tilde{G}(1-\tau_1)^2 + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)(1-\tau_1) + c(\tau_1))}.$$

II. У випадку $\Delta = 0$:

$$G^{ij} = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{G}}} \int_0^1 \ln|2\tilde{G}\tau_2 + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)| \times$$

$$\times \text{sign}(2\tilde{G}\tau_2 + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)) \Big|_{\tau_2=0}^{\tau_2=1-\tau_1} d\tau_1 =$$

$$= \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{G}}} \int_0^1 \ln|2\tilde{G}(1-\tau_1) + 2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)| \times$$

$$\begin{aligned} & \times \text{sign}(\tilde{G}(1 - \tau_1) + \tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1) \cdot d\tau_1 = \\ & = \frac{\tilde{c}}{2\sqrt{\tilde{G}}} \int_0^1 \ln |2(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1)| \text{sign}(\tilde{F}\tau_1 + \tilde{G}_1) d\tau_1. \end{aligned} \quad (21)$$

Інтеграл (20) та (21), так само як і (18) та (19) у випадку відсутності особливості, тобто при умові, що $\vec{x}_0^i \notin \Delta S^j$, можна проінтегрувати, застосовуючи чисельні методи Гауса або Симпсона. Інтеграл

$$G_{\tau}^{ij} = \int_{\Delta S^j} F_{\tau}(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS$$

знаходиться з формул (18) та (19) заміною нормалі $\vec{n}_0 = (n_x, n_y, n_z)$ на дотичний напрямок $\vec{\tau}_0 = (\tau_x, \tau_y, \tau_z)$.

Випадок сингулярних інтегралів. У випадку, коли підінтегральна функція в інтегралах (11) необмежено зростає в середині області інтегрування, застосування простих схем чисельного інтегрування неможливе. Можна дещо змістити точку спостереження в середину області Ω , так що підінтегральна функція буде обмеженою і її можна буде проінтегрувати за допомогою квадратурної формули більш високого порядку точності, але такі процедури застосовувати не рекомендується. Такі інтеграл з особливістю підінтегральної функції краще всього обчислювати аналітично.

Розглянемо інтеграл $\int_{\Delta S^j} G(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS$ у випадку,

коли $\vec{x}_0^i \in \Delta S^j$, тобто коли підінтегральна функція необмежено зростає при $i = j$. Для його обчислення введемо полярну локальну систему координат $0R\theta$, зв'язану з j -тим елементом, (рис. 3).

Розіб'ємо область інтегрування на трикутники $0A_1A_2$, $0A_2A_3$ та $0A_3A_1$. Тоді загальний інтеграл – це сума інтегралів по кожному з цих трикутників. Нехай θ_k та R_k – змінні інтегрування для k -го трикутника ($k = 1, 2, 3$).

Таким чином маємо:

$$\begin{aligned} G^{jj} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi - \alpha_k - \beta_k} \int_0^{R_k^L} \frac{R_k dR_k d\theta_k}{R_k} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi - \alpha_k - \beta_k} d\theta_k \int_0^{R_k^L} dR_k, \end{aligned} \quad (22)$$

де L – контур, що обмежує плоский елемент j , тобто: $L = L_1 + L_2 + L_3$, де $L_1 = A_1A_2$, $L_2 = A_2A_3$, $L_3 = A_1A_3$;

$$R_k^L = |\vec{x}_0 - \vec{\xi}_{L_k}|, \quad \vec{\xi}_{L_k} \in L_k. \quad (23)$$

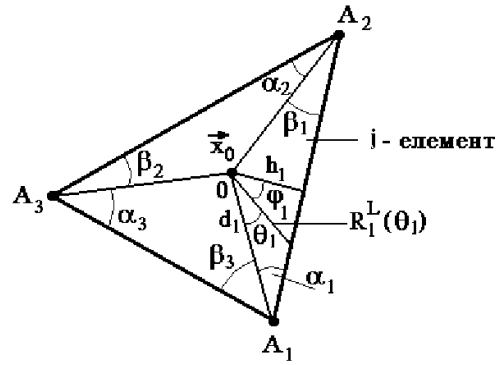


Рис. 3. Схема до обчислення сингулярного інтегралу G^{jj}

Тоді:

$$\begin{aligned} G^{jj} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi - \alpha_k - \beta_k} R_k d\theta_k \Big|_{R_k=0}^{R_k=R_k^L} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi - \alpha_k - \beta_k} R_k^L d\theta_k. \end{aligned}$$

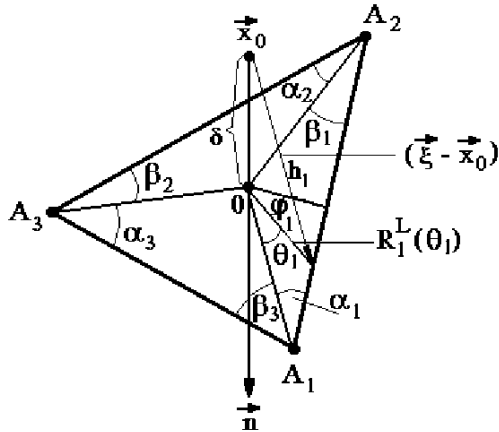
Зазначимо, що:

$$\begin{aligned} R_k^L &= \frac{h_k}{\cos \varphi_k} = \\ &= \frac{h_k}{\cos [\pi/2 - (\alpha_k + \theta_k)]} = \frac{h_k}{\sin(\alpha_k + \theta_k)}, \end{aligned} \quad (24)$$

де h_k – перпендикуляр, опущений з точки 0 на сторону L_k , а φ_k – кут, утворений цим перпендикуляром з радіусом інтегрування R_k . Враховуючи вираз (24), маємо:

$$\begin{aligned} G^{ij} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 h_k \int_0^{\pi - \alpha_k - \beta_k} \frac{d\theta_k}{\sin(\alpha_k + \theta_k)} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 h_k \ln \text{tg} \left(\frac{\alpha_k + \theta_k}{2} \right) \Big|_{\theta_k=0}^{\theta_k=\pi - \alpha_k - \beta_k} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 h_k \ln \frac{1}{\text{tg} \frac{\alpha_k}{2} \text{tg} \frac{\beta_k}{2}}. \end{aligned} \quad (25)$$

Розглянемо тепер інтеграл $\int_{\Delta S^j} G_n(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS$ у випадку, коли $\vec{x}_0^i \in \Delta S^j$, коли підінтегральна функція необмежено зростає при $i = j$. Для його обчислення, як і в попередньому випадку, введемо


 Рис. 4. Схема до обчислення сингулярного інтегралу G_n^{jj}

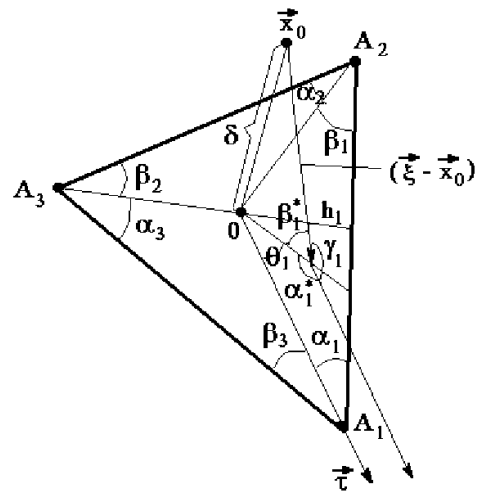
полярну локальну систему координат, зв'язану з елементом j , та розіб'ємо область інтегрування на три трикутники $0A_1A_2$, $0A_2A_3$ та $0A_3A_1$ (дивись рис. 4).

Проведемо наступні міркування. Нехай точка \vec{x}_0 знаходиться на деякій нескінченно малій відстані $\delta \rightarrow 0$ від площини елемента ΔS^j в середині області Ω . Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} G_n^{jj} &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \int_0^{R_k^L} \frac{[(\vec{\xi}-\vec{x}_0)\vec{n}(\vec{x}_0)]R_k dR_k d\theta_k}{(\sqrt{R_k^2+\delta^2})^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} d\theta_k \int_0^{R_k^L} \frac{R_k \delta dR_k}{(\sqrt{R_k^2+\delta^2})^3} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \frac{\delta}{\sqrt{R_k^2+\delta^2}} \Big|_{R_k=0}^{R_k=R_k^L} d\theta_k = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \left(\int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \frac{\delta d\theta_k}{\sqrt{(R_k^L)^2+\delta^2}} - \pi + \alpha_k + \beta_k \right). \end{aligned}$$

Враховуючи те, що $\delta \rightarrow 0$, одержимо:

$$\begin{aligned} G_n^{jj} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 (\pi - \alpha_k - \beta_k) = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[3\pi - \sum_{k=1}^3 (\alpha_k + \beta_k) \right] = \frac{1}{4\pi} (3\pi - \pi) = \frac{1}{2}. \quad (26) \end{aligned}$$


 Рис. 5. Схема до обчислення сингулярного інтегралу G_τ^{jj}

Тепер розглянемо інтеграл $\int_{\Delta S^j} G_\tau(\vec{x}_0^i, \vec{\xi}^j) dS$ у випадку $\vec{x}_0^i \in \Delta S^j$, тобто коли існує особливість при $i = j$. Для його обчислення введемо локальну полярну систему координат, зв'язану з j -м елементом, та розіб'ємо область інтегрування на три трикутники $0A_1A_2$, $0A_2A_3$ та $0A_3A_1$, (рис. 5). Нехай θ_k та R_k – відповідні змінні інтегрування для k -го трикутника ($k = 1, 2, 3$); β_k^* – кут, утворений радіусом R_k^L та вектором $(\vec{\xi} - \vec{x}_0)$, а α_k^* – кут між радіусом R_k^L та вектором $\vec{\tau}(\vec{x}_0)$, γ_k – кут між векторами $(\vec{\xi} - \vec{x}_0)$ та $\vec{\tau}(\vec{x}_0)$.

Нехай $\vec{\tau}(x_0)$ – одиничний вектор, що лежить у площині елемента j і напрямлений, наприклад, паралельно OA_1 . Проведемо наступні міркування. Нехай точка \vec{x}_0 знаходиться на деякій нескінченно малій відстані $\delta \rightarrow 0$ від площини елемента ΔS^j названі області Ω . Тоді матимемо:

$$\begin{aligned} G_\tau^{jj} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \int_0^{R_k^L} \frac{[(\vec{\xi}-\vec{x}_0)\vec{\tau}(\vec{x}_0)]R_k dR_k d\theta_k}{(\sqrt{R_k^2+\delta^2})^3} = \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{i=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \int_0^{R_k^L} \left(\frac{\sqrt{R_k^2+\delta^2} R_k \cos \gamma_k dR_k d\theta_k}{(\sqrt{R_k^2+\delta^2})^3} \right). \end{aligned}$$

Враховуючи те, що:

$$\begin{aligned} \cos \gamma_k &= \cos \alpha_k^* \cdot \cos \beta_k^* = \\ &= -\cos \theta_k^* \cos \beta_k^* = -\cos \theta_k^* \frac{R_k}{\sqrt{R_k^2+\delta^2}}, \end{aligned}$$

де

$$\theta_1^* = \theta_1; \quad \theta_2^* = \theta_2 + \pi - \alpha_1 - \beta_1;$$

$$\theta_3^* = \theta_3 + 2\pi - \alpha_1 - \beta_1 - \alpha_2 - \beta_2;$$

будемо мати:

$$\begin{aligned} G_{\tau}^{jj} &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \int_0^{R_k^L} \frac{R_k^L \cos \theta_k^* dR_k d\theta_k}{(\sqrt{R_k^2 + \delta^2})^3} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \left[-\frac{R_k}{(\sqrt{R_k^2 + \delta^2})} + \right. \\ &\quad \left. + \ln(R_k + \sqrt{R_k^2 + \delta^2}) \right] \Big|_{R_k=0}^{R_k^L} \cos \theta_k^* d\theta_k = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} -\ln \delta \cos \theta_k^* d\theta_k - \\ &\quad - \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \frac{R_k^L \cos \theta_k^*}{\sqrt{(R_k^L)^2 + \delta^2}} d\theta_k + \\ &\quad + \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \ln(R_k^L + \sqrt{(R_k^L)^2 + \delta^2}) \cos \theta_k^* d\theta_k = \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \left[- \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \frac{R_k^L \cos \theta_k^* d\theta_k}{\sqrt{(R_k^L)^2 + \delta^2}} + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \ln(R_k^L + \sqrt{(R_k^L)^2 + \delta^2}) \cos \theta_k^* d\theta_k \right]. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що $\delta \rightarrow 0$, а також формулу (24), отримаємо:

$$\begin{aligned} G_{\tau}^{jj} &= \\ &= -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 \int_0^{\pi-\alpha_k-\beta_k} \ln \left(\frac{\sin(\alpha_k + \theta_k)}{h_k} \right) \cos \theta_k^* d\theta_k. \end{aligned} \quad (27)$$

Вираз (27) вже не містить особливостей, тому може бути проінтегрований методом Симпсона або Гауса з заданою точністю.

Ідея Хесса і Сміта щодо обчислення інтегралів. Для обчислення інтегралів типу (11) Хесс і Сміт [14] запропонували описаний нижче підхід. Спочатку зробимо перетворення системи координат так, щоб початок нової системи координат A_4 співпадав з точкою перетину перпендикуляра, проведеного з т. \vec{x}_0 до площини трикутника

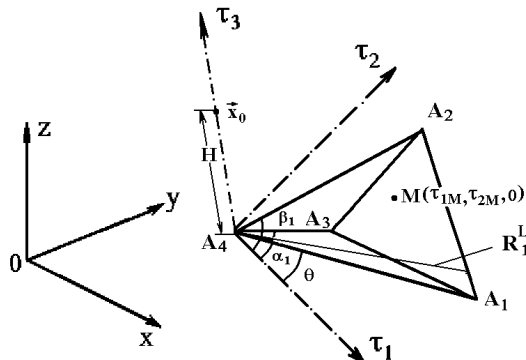


Рис. 6. Схема до обчислення інтегралів за методом Хесса та Сміта

$A_1A_2A_3$ див. (рис. 6), вісь τ_3 нової системи координат була спрямована по нормалі до площини трикутника $A_1A_2A_3$, а осі τ_1 та τ_2 лежали будь-яким чином у площині цього трикутника.

Знайдемо координати точки A_4 в старій системі координат $0xyz$. Нехай $\vec{n}(n_\xi, n_\eta, n_\zeta)$ – нормаль до площини $A_1A_2A_3$, тоді рівняння площини $A_1A_2A_3$ буде мати вигляд:

$$(x - \xi_3)n_\xi + (y - \eta_3)n_\eta + (z - \zeta_3)n_\zeta = 0, \quad (28)$$

а рівняння перпендикуляра до площини $A_1A_2A_3$, що проходить через точку \vec{x}_0 , запишеться у вигляді:

$$\frac{(x - x_0)}{n_\xi} + \frac{(y - y_0)}{n_\eta} + \frac{(z - z_0)}{n_\zeta} = -p. \quad (29)$$

З рівнянь (28) і (29) знаходимо координати т. A_4 :

$$\begin{aligned} \xi_4 &= x_0 - n_\xi p, \\ \eta_4 &= y_0 - n_\eta p, \\ \zeta_4 &= z_0 - n_\zeta p, \end{aligned} \quad (30)$$

де $p = x_0 n_\xi + y_0 n_\eta + z_0 n_\zeta - (\xi_3 n_\xi + \eta_3 n_\eta + \zeta_3 n_\zeta)$.

Виконаємо перетворення системи координат наступним чином:

$$\begin{aligned} O(0, 0, 0) &\rightarrow A_4(\xi_4, \eta_4, \zeta_4), \\ \vec{k}(0, 0, 1) &\rightarrow \vec{n}(n_\xi, n_\eta, n_\zeta), \\ \vec{i}(1, 0, 0) &\rightarrow \frac{A_3 \vec{A}_1}{|A_3 A_1|} \left(\frac{\xi_1 - \xi_3}{|A_3 A_1|}, \frac{\eta_1 - \eta_3}{|A_3 A_1|}, \frac{\zeta_1 - \zeta_3}{|A_3 A_1|} \right), \\ \vec{j}(0, 1, 0) &\rightarrow \vec{n} \times \frac{A_3 \vec{A}_1}{|A_3 A_1|}, \end{aligned}$$

де $|A_3A_1| = \sqrt{(\xi_1 - \xi_3)^2 + (\eta_1 - \eta_3)^2 + (\zeta_1 - \zeta_3)^2}$. Тобто початок нової системи повинен знаходитись у точці A_4 , вісь τ_3 спрямована по нормалі до площини трикутника $A_1A_2A_3$, вісь τ_1 – паралельна стороні трикутника A_1A_3 , а вісь τ_2 спрямована так, що система координат $\tau_1\tau_2\tau_3$ – прямокутна правостороння. Введемо наступні позначення для косинусів кутів між новими та старими осями координат:

$$l_1 = \frac{\xi_1 - \xi_3}{|A_3A_1|}; \quad m_1 = \frac{\eta_1 - \eta_3}{|A_3A_1|}; \quad n_1 = \frac{\zeta_1 - \zeta_3}{|A_3A_1|};$$

$$l_2 = m_3n_1 - n_3m_1; \quad m_2 = n_3l_1 - l_3n_1; \\ n_2 = l_3m_1 - m_3l_1;$$

$$l_3 = n_\xi; \quad m_3 = n_\eta; \quad n_3 = n_\zeta;$$

тоді перетворення координат запишеться наступним чином:

$$\tau_1 = l_1x + m_1y + n_1z - \xi_4;$$

$$\tau_2 = l_2x + m_2y + n_2z - \eta_4;$$

$$\tau_3 = l_3x + m_3y + n_3z - \zeta_4.$$

Тепер перейдемо безпосередньо до обчислення інтегралів. Зазначимо, що

$$\int_{\Delta A_1A_2A_3} f(R, \theta) dR d\theta = \\ = S_{12} \int_{\Delta A_4A_1A_2} f(R, \theta) dR d\theta + \\ + S_{23} \int_{\Delta A_4A_2A_3} f(R, \theta) dR d\theta + \\ + S_{31} \int_{\Delta A_4A_3A_1} f(R, \theta) dR d\theta, \quad (31)$$

де $S_{ij} = 1$, якщо центр нової системи координат A_4 і будь-яка точка в середині трикутника $A_1A_2A_3$, наприклад, точка перетину його медіан $M(\tau_{1M}, \tau_{2M}, 0)$, лежить по одну сторону прямої, проведеної через точки A_i та A_j , і $S_{ij} = -1$, якщо – по різні сторони. З курсу аналітичної геометрії відомо, що

$$S_{ij} = -\text{sign}(a_{ij}\tau_{1M} + b_{ij}\tau_{2M} - c_{ij});$$

$$c_{ij} > 0; \quad i, j = 1, 2, 3, i \neq j,$$

де a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} – коефіцієнти в нормальному рівнянні прямої, що проходить через A_iA_j . Враховуючи

викладки, приведені в попередньому пункті, формули (22)–(27), а також формулу (31), можемо записати:

$$G^{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 S_k^* \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \int_0^{R_k^L} \frac{R_k dR_k d\theta_k}{\sqrt{R_k^2 + H^2}} = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 S_k^* \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \sqrt{R_k^2 + H^2} \Big|_{R_k=0}^{R_k=R_k^L} d\theta_k = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 S_k^* \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \sqrt{(R_k^L)^2 + H^2} d\theta_k,$$

де $S_1^* = S_{12}$, $S_2^* = S_{23}$, $S_3^* = S_{31}$, H – відстань між точками \vec{x}_0 і A_4 . Враховуючи те, що:

$$R_k^L = \left| \frac{c_k^*}{a_k^* \cos \theta_k + b_k^* \sin \theta_k} \right|, \quad (32)$$

де

$$a_1^* = a_{12}, \quad a_2^* = a_{23}, \quad a_3^* = a_{31};$$

$$b_1^* = b_{12}, \quad b_2^* = b_{23}, \quad b_3^* = b_{31};$$

$$c_1^* = c_{12}, \quad c_2^* = c_{23}, \quad c_3^* = c_{31},$$

остаточно будемо мати:

$$G^{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 S_k^* \times \\ \times \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \sqrt{\left(\frac{c_k^*}{a_k^* \cos \theta_k + b_k^* \sin \theta} \right)^2 + H^2} d\theta_k.$$

Аналогічним чином інтегруємо функцію G_n^{ij} :

$$G_n^{ij} = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 S_k^* \times \\ \times \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \int_0^{R_k^L} \frac{(\vec{\xi} - \vec{x}_0) \vec{n}(\vec{x}_0) R_k dR_k d\theta_k}{(\sqrt{R_k^2 + H^2})^3} = \\ = \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 S_k^* \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left[-\frac{Hn_z}{\sqrt{R_k^2 + H^2}} - \frac{R_k n_x \cos \theta_k}{\sqrt{R_k^2 + H^2}} + \right. \\ \left. + \ln(R_k + \sqrt{R_k^2 + H^2}) n_x \cos \theta_k - \frac{R_k n_y \sin \theta_k}{\sqrt{R_k^2 + H^2}} + \right. \\ \left. + \ln(R_k + \sqrt{R_k^2 + H^2}) n_y \sin \theta_k \right] d\theta_k \Big|_{R_k=0}^{R_k=R_k^L} =$$

$$= \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^3 S_k^* \int_{\alpha_k}^{\beta_k} \left[\left(1 - \frac{H}{\sqrt{(R_k^L)^2 + H^2}} \right) n_z + \left(\ln(|R_k^L| + \sqrt{(R_k^L)^2 + H^2}) - \frac{R_k^L}{\sqrt{(R_k^L)^2 + H^2}} \right) \times (n_x \cos \theta_k + n_y \sin \theta_k) \right] d\theta_k, \quad (33)$$

де R_k^L – визначається формулою (23). Інтеграли (32) та (33) не мають особливостей. Для їх визначення використовується метод Симпсона або Гауса.

3. ВИЗНАЧЕННЯ СИЛ ГІДРОДИНАМІЧНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ТІЛ

При маневруванні декількох суден гідродинамічна взаємодія між ними може викликати значні додаткові навантаження (сили і моменти). Ці гідродинамічні навантаження особливо небезпечні, коли відстань між суднами невелика, а також при рухові в каналі або на мілководді. Найбільших значень додаткові навантаження набувають при обгоні одного судна іншим, коли швидкості V_1 і V_2 близькі, або коли одне з суден пришвартоване ($V_1 = 0, V_2 \neq 0$). В даній статті ми розглянемо саме останній випадок, хоча методологія, яку ми будемо застосовувати, є загальною для всіх взаємних рухів суден.

Щоб спростити викладки, введемо узагальнені координати $x_i, i = 1, \dots, 12$, де x_1, x_2, x_3 – зміщення геометричного центру першого тіла відносно початкового положення, x_4, x_5, x_6 – кути повороту першого тіла відносно його центру; x_7, \dots, x_{12} – відповідно зміщення і кути повороту другого тіла, узагальнені швидкості $u_i = \dot{x}_i$. Аналогічним чином введемо потенціали φ_i та $n_i = \partial\varphi/\partial n, i = 1, \dots, 12$. Функції $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{12}$ відповідають різним випадкам руху тіл. (Наприклад, φ_1 – випадку руху тіл, коли $u_1 = 1, u_2 = u_3 = \dots = u_{12} = 0$). Кожний потенціал φ_i задовільняє рівнянню Лапласа (1). Узагальнені сили F_i можна знайти як інтеграл від тиску по зануреній поверхні тіла S_B :

$$F_i = \int_{S_B} p n_i dS = -\rho \int_{S_B} \left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2} \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi \right) n_i dS. \quad (34)$$

Тут $\partial/\partial t$ – похідна по часу в нерухомій системі координат. Якщо перейти до системи координат,

зв'язаної з тілом, то рівняння (34) запишеться у вигляді:

$$F_i = -\rho \frac{d}{dt} \int_{S_B} \varphi n_i dS + \rho \int_{S_B} \left((\vec{v}_0 + [\vec{\omega}_0 \times \vec{r}]) \nabla\varphi - \frac{1}{2} \nabla\varphi \nabla\varphi \right) n_i dS, \quad (35)$$

де \vec{v}_0 та $\vec{\omega}_0$ відповідно поступальна та обертальна швидкості рухомої системи координат.

Другий підхід до визначення сил і моментів пов'язаний з застосуванням рівнянь Лагранжа 2-го роду [3, 4, 9, 16]. Якщо границі тіл та каналу непроникні, для кінетичної енергії рідини маємо:

$$T = \frac{\lambda_{jk} u_j u_k}{2}, \quad \lambda_{jk} = -\rho \int_{S_B} \varphi_j \frac{\partial\varphi_k}{\partial n} dS \quad (j, k = 1, 2, \dots, 12), \quad (36)$$

де λ_{jk} – тензор приєднаних мас, елементи якого залежать від форми границь. Тут і далі по індексах, що повторюються, потрібно виконувати підсумовування.

Узагальнені сили обчислюються із рівняння Лагранжа:

$$F_i = -\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_i} + \frac{\partial T}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial T}{\partial x_i} = \frac{1}{2} u_j u_k \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial T}{\partial u_i} = \frac{1}{2} \lambda_{jk} (u_k \sigma_{ij} + u_j \sigma_{ik}) = m_{ij} u_j,$$

σ_{ij} та σ_{ik} – символи Кронекера, $\begin{cases} \sigma_{ij} = 0, & i \neq j, \\ \sigma_{ij} = 1, & i = j, \end{cases}$

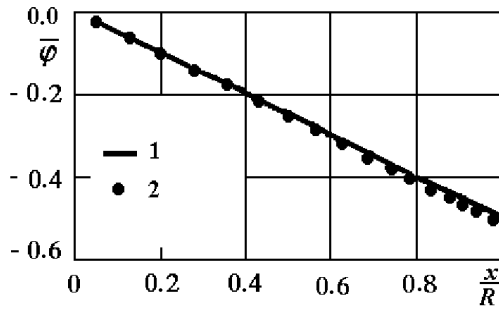
$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial u_i} = \lambda_{ij} \dot{u}_j + u_j u_k \frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_k}.$$

Після ряду тотожних перетворень одержимо:

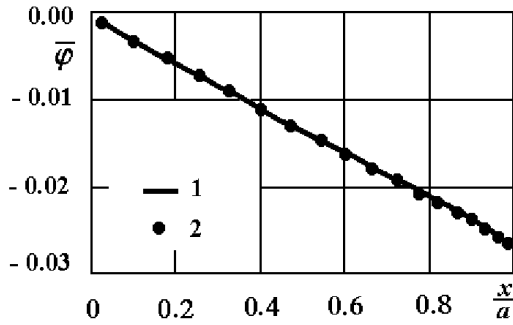
$$F_i = -\lambda_{ij} \dot{u}_j - u_j u_k \left(\frac{\partial \lambda_{ij}}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{jk}}{\partial x_i} \right). \quad (37)$$

У випадку, коли одне тіло рухається з постійною швидкістю V_i , а інше залишається нерухомим, маємо:

$$F_i = -V_1^2 \left(\frac{\partial \lambda_{i1}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial x_i} \right) =$$



а



б

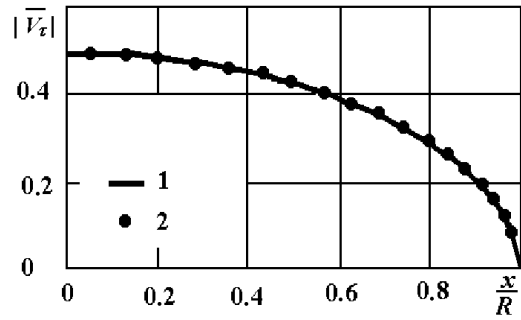
Рис. 7. Порівняння гідродинамічних потенціалів $\bar{\varphi}$, обчислених аналітично та за допомогою МГЕ на лінії перетину площини Oxz та поверхні сфери (а) та еліпсоїда (б):
1 – аналітичний розв'язок; 2 – розв'язок МГЕ

$$= -V_1^2 \left(\frac{\partial \lambda_{1i}}{\partial x_1} - \frac{1}{2} \frac{\partial \lambda_{11}}{\partial x_i} \right).$$

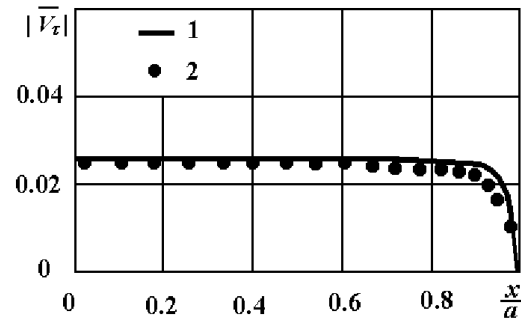
Коли два тіла рухаються з постійними швидкостями V у необмеженій рідині або вздовж осі каналу постійного поперечного перерізу, кінетична енергія рідини буде залежати лише від їхнього взаємного розташування:

$$F_i = -\frac{1}{2} V^2 \frac{\partial}{\partial x_i} (\lambda_{11} + 2\lambda_{17} + \lambda_{77}).$$

Підхід, що ґрунтується на використанні системи рівнянь Лагранжа 2-го роду, часто є простішим і ефективнішим. (Саме він застосовувався в розрахунках, результаті яких наведені нижче). Якщо швидкість визначена експериментально, з напівемпіричних міркувань чи вирахована з достатньою точністю, для визначення сил краще скористатись рівнянням (35).



а



б

Рис. 8. Порівняння дотичних швидкостей V_τ , обчислених аналітично та за допомогою МГЕ на лінії перетину площини Oxz та поверхні сфери (а) та еліпсоїда (б):
1 – аналітичний розв'язок; 2 – розв'язок МГЕ

4. РЕЗУЛЬТАТИ ЧИСЕЛЬНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Апробація алгоритму. Чисельний алгоритм, описаний в розділі 2, було запрограмовано та апробовано для наступних тестових задач.

1. Сфера рухається в необмеженій рідині в напрямку осі x системи координат Oxy . Для введення безрозмірних величин використовується радіус сфери R та її швидкість V_0 . Кількість плоских елементів на сфері n змінювалась (для приведених результатів розрахунків $n = 3120$).

2. Еліпсоїд рухається в необмеженій рідині у напрямку осі x . Півосі еліпсоїда: $b/a = 1/6$, $c/a = 1/12$. Система координат $Oxyz$ вибрана таким чином, що велика піввісь еліпсоїда a збігається з віссю x , піввісь b – з віссю y , а піввісь c – з віссю z . Кількість плоских елементів на еліпсоїді $n = 3120$.

Для дискретизації поверхні тіла використовувалась система кутових координат (φ', ψ') : коорди-

нати точки на поверхні вираховувались за формулами: $x = c \cos \psi'$, $y = b \sin \psi' \cos \varphi'$ та $z = c \sin \psi' \sin \varphi'$. Причому кути φ' і ψ' змінювались рівномірно з однаковим кроком $\pi/30$.

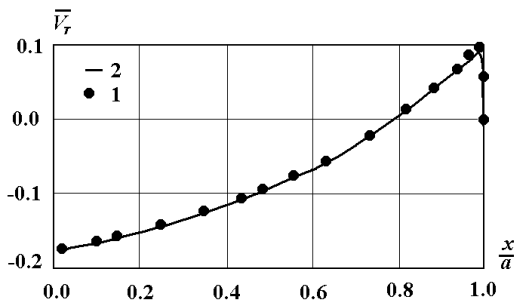


Рис. 9. Порівняння дотичних швидкостей з врахуванням знаку на лінії перетину Oxz та поверхні еліпсоїда поблизу дна, обчислених за допомогою різних підходів. 1 – алгоритм МГЕ з дискретизацією поверхні дна; 2 – використання спеціальної функції Гріна і побудованої з застосуванням відображень

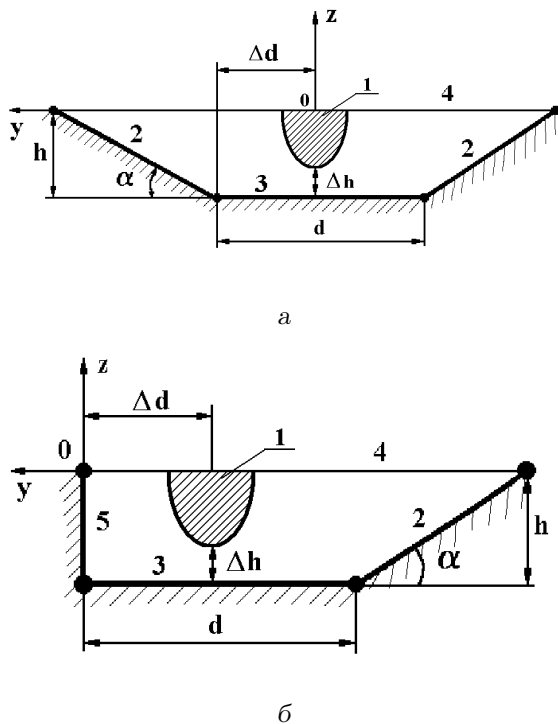


Рис. 10. Поперечний переріз симетричного (а) та несиметричного (б) каналу

Одержані значення гідродинамічних потенціалів $\bar{\varphi} = \varphi/V_0 R$ для сфери і $\bar{\varphi} = \varphi/V_0 a$ для еліпсоїда та безрозмірних дотичних швидкостей (на поверхні тіла) $\bar{V}_\tau = V_\tau/V_0$ викликаних рухом цього тіла, порівнювались з відповідними аналітичними

розв'язками, рис. 7–8. Точки, позначені на малюнках, відповідають геометричним центрам дискретних елементів поверхні (панелей), в яких розраховувались значення величин.

Значення гідродинамічних потенціалів для сфери та еліпсоїда наведені на рис. 7. Вони майже точно збігаються з аналітичними (відносна похибка у випадку еліпсоїда складає близько 3%). Стосовно дотичних швидкостей (рис. 8), розбіжність між чисельними та аналітичними розв'язками більша, (на еліпсоїді похибка досягає 10%). Це пояснюється особливостями розбиття поверхні на дискретні елементи.

Рух еліпсоїда поблизу дна. Для розрахунку поля швидкостей при русі еліпсоїда поблизу дна при малих числах Фруда можна використовувати два еквівалентні підходи [16].

1. Розбити дно та нижню половину еліпсоїда на плоскі панелі, ввести на кожній панелі фіктивні джерела інтенсивності q , виконати граничні умови на дні та на еліпсоїді і включити одержані рівняння в систему (9). При необхідності, таким чином можна врахувати і деформації вільної поверхні.

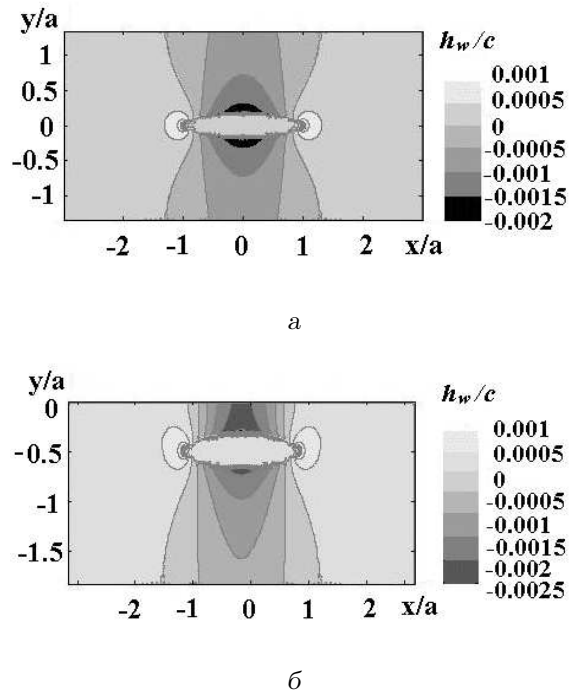
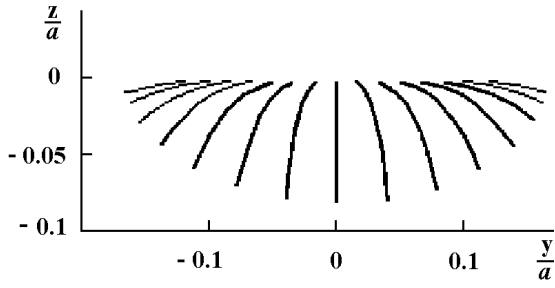
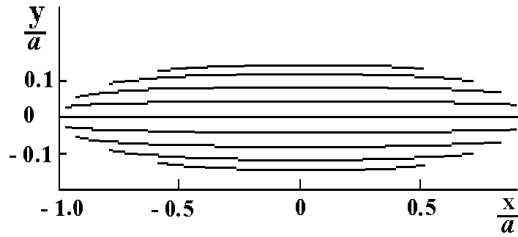


Рис. 11. Форма денівеляції вільної поверхні при русі еліпсоїда в симетричному (а) та несиметричному (б) каналі

2. Інший підхід передбачає використання функції Гріна джерела, яка задовільняє граничну умову непротікання на плоскому дні. Така функція

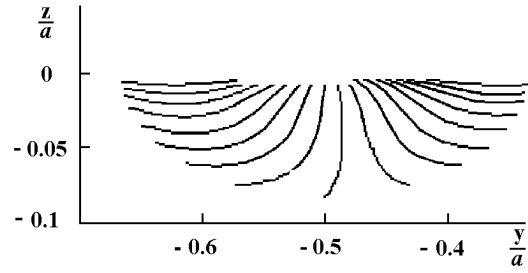


а

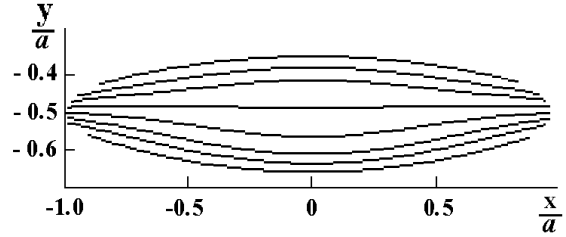


б

Рис. 12. Лінії течії на поверхні еліпсоїда при рухові в необмеженій рідині в проекції: а – на вертикальну площину Oyz ; б – на горизонтальну площину Oxy

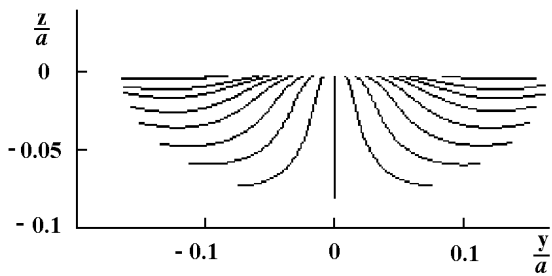


а

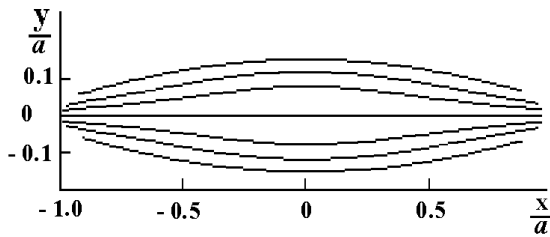


б

Рис. 14. Лінії течії на поверхні еліпсоїда в проекції на вертикальну (а) і горизонтальну площину Oxy (б) в несиметричному каналі поблизу стінки

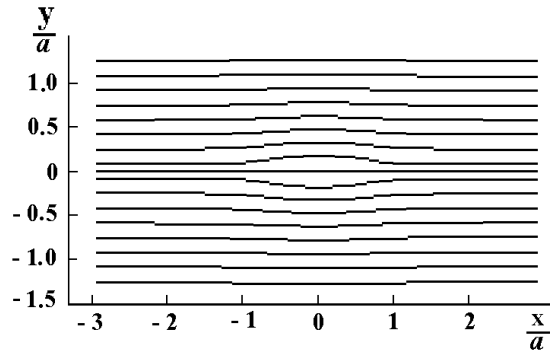


а

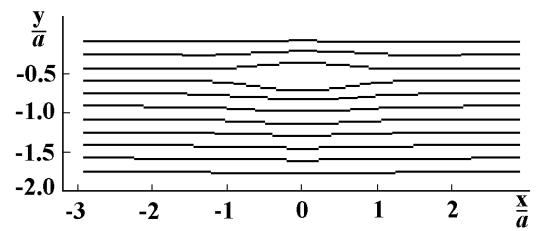


б

Рис. 13. Лінії течії на поверхні еліпсоїда в проекції на вертикальну площину Oyz (а) та горизонтальну площину Oxy (б) при рухові в симетричному каналі



а



б

Рис. 15. Лінії течії на дні для випадку обтікання еліпсоїда: а – в симетричному каналі; б – в несиметричному каналі поблизу стінки

будується методом дзеркальних відображень і має вигляд нескінченного ряду (5). Як показує досвід проведення розрахунків, щоб досягнути задовільної точності, можна обмежитись 41-м членом ряду (5), тобто $k = -20, \dots, 20$. У цьому випадку на панелі слід розбивати лише нижню половину еліпсоїда. Порівняння дотичних швидкостей V_τ на лінії перетину площини Oxz та поверхні еліпсоїда приведені на рис. 9. При цьому вибирались наступні параметри: $a = 1$, $b/a = 1/6$, $c/a = 1/12$, $h/c = 1$, розмір ділянки дна $6a \times 4a$, h – глибина води. Осі системи координат спрямовані таким чином: велика піввісь еліпсоїда a збігається з віссю Ox , піввісь b – з віссю Oy , а піввісь c – з віссю Oz . Кількість елементів (панелей), розташованих на половині еліпсоїда – 1740, на дні – 6912. З рис. 9 видно, що результати обох підходів повністю співпадають. Розбиття дна на панелі дає змогу розв’язувати задачі з нерівним дном, наприклад, при рухові еліпсоїда у каналі з відкосами. Слід зауважити, що поздовжня дотична до поверхні еліпсоїда швидкість (вздовж стінгера) біля дна має дві особливі точки ($V_\tau = 0$): на носіку еліпсоїда та на певній невеликій відстані від носика, в нашому випадку це точка $x/a = 0.8$. Виникнення другої особливої точки пов’язане з безпосередньою близькістю дна. При віддаленні від дна на певну відстань, що залежить від параметрів еліпсоїда, ця особлива точка зникає.

Гідродинамічні поля та структура течії при рухові еліпсоїда в симетричному і несиметричному каналах. Розглянемо рух тривісного еліпсоїда в каналі при малих числах Фруда (рис. 10).

Розрахунки проводились для руху тривісного еліпсоїда. Розглядалися канали з двома типами поперечних перерізів – симетричним (рис. 10, а) і несиметричним (рис. 10, б), вздовж яких рухається еліпсоїд 1 з півсями $b/a = 1/6$, $c/a = 1/12$, (рис. 10), 1 – переріз еліпсоїда, 2 – відкіс каналу; 3 – дно каналу; 4 – вільна поверхня; 5 – вертикальна стінка каналу. Прямокутна система координат вибрана таким чином, що напрямок осі Ox збігається з напрямком руху еліпсоїда, вісь Oz спрямована вгору перпендикулярно до вільної поверхні, а вісь Oy спрямована так, щоб утворилась правостороння система координат.

Задачі про рух еліпсоїда в симетричному (рис. 10, а) та несиметричному (рис. 10, б) каналах розв’язувались чисельно методом граничних елементів з використанням описаного алгоритму. Розміри каналів вибирались наступним чином: $h/c = 1$, 1 ; $\Delta h/c = 1/12$, $d/b = 6$, $\Delta d/b = 3$, $\alpha = \pi/30$. В обох задачах на плоскі елементи розбивалась

нижня частина еліпсоїда, дно і відкоси каналу 2. Довжина ділянки каналу, на якій проводилась дискретизація, $L = 6a$. У випадку симетричної задачі для моделювання вільної поверхні була використана функція Гріна, отримана на основі відображення каналу та нижньої частини еліпсоїда відносно площини Oxy . У випадку несиметричного каналу додатково проводилось відображення відносно вертикальної стінки 5.

В результаті розрахунків були отримані поля швидкостей при обтіканні еліпсоїда, розташованого в симетричному та несиметричному каналах. На основі результатів розрахунків потенціала та швидкості, застосовуючи рівняння Бернуллі, неважко побудувати залежності для розподілу тиску, зокрема на поверхні води (вільній поверхні). Зміна тиску біля еліпсоїда зумовлює відповідний підйом (чи падіння) рівня води h_w – денівеляцію вільної поверхні. Одержані форми денівеляції вільних поверхонь, рис. 11 (h_w відхилення рівня води від площини Oxy). Картини ліній течії для різних випадків руху еліпсоїда показані на рис. 12–15.

Порівняння картини течії біля еліпсоїда в безмежній рідині (рис. 12) та в каналах (рис. 13, 14) показує, що в каналі відбувається інтенсивне розтікання води від поздовжньої площини симетрії еліпсоїда. Тіло обтікається більшою мірою з боків. Асиметрія каналу зумовлює несиметрію течії навколо еліпсоїда: спостерігається перетікання рідини через зазор між дном та еліпсоїдом (рис. 14).

Розрахунок приєднаних мас. Основними складовими при розрахунку сил гідродинамічної взаємодії є приєднані маси тіл та їх похідні. Приєднані маси в загальному випадку визначаються з рівняння (36). Враховуючи дискретизацію поверхні, інтеграл у правій частині рівняння (36) вираховується наступним чином:

$$\lambda_{jk} = \sum_{i=1}^{N_B} \varphi_j^i \frac{\partial \varphi_k^i}{\partial n} \Delta S^i,$$

де N_B – кількість панелей на тілі; ΔS^i – площа i -тої панелі; φ_j^i – значення потенціалу φ_j на i -тій панелі (визначається з рівнянь (9)).

Порівняння коефіцієнтів приєднаних мас розрахованих чисельно для тривісного еліпсоїда, що рухається в необмеженій рідині, з точними значеннями [5] та відносні похибки наведені в табл. 1. З даних таблиці видно, що найбільша відносна похибка досягає 13,5% при обчисленні λ_{55} . Це пов’язано зі способом розбиття поверхні еліпсоїда на дискретні елементи. Цю похибку можна зменшити, розбивши поверхню іншим способом. Для всіх

Табл. 1. Приєднані маси еліпсоїда $b/a = 1/6$, $c/a = 1/12$, що рухається в необмеженій рідині

кількість площадок n	час розрахунку t	λ_{11}/m	$\delta\lambda_{11}, \%$	λ_{22}/m	$\delta\lambda_{22}, \%$	λ_{33}/m	$\delta\lambda_{33}, \%$
точне значення	–	0.046	–	0.842	–	3.342	–
$n = 180$	$t = 5c$	0.047	1.4	0.863	2.5	3.436	2.8
$n = 760$	$t = 60c$	0.047	1.9	0.862	2.3	3.422	2.4
$n = 1740$	$t = 360c$	0.047	1.5	0.858	1.9	3.395	1.6
Кількість площадок n	час розрахунку t	λ_{44}/J_{xx}	$\delta\lambda_{44}, \%$	λ_{55}/J_{yy}	$\delta\lambda_{55}, \%$	λ_{66}/J_{zz}	$\delta\lambda_{66}, \%$
точне значення	–	0.443	–	1.698	–	0.408	–
$n = 180$	$t = 5c$	0.435	1.8	1.469	13.5	0.404	0.9
$n = 760$	$t = 60c$	0.448	1.1	1.485	12.6	0.414	1.5
$n = 1740$	$t = 360c$	0.448	1.3	1.498	11.8	0.414	1.5

Табл. 2. Приєднані маси еліпсоїда $b/a = 1/6$, $c/a = 1/12$ залежно від глибини для випадку симетричного каналу

h/c	λ_{11}/m	λ_{22}/m	λ_{33}/m	λ_{44}/J_{xx}	λ_{55}/J_{yy}	λ_{66}/J_{zz}
1.1	0.266	3.843	8.842	0.814	3.430	0.920
1.3	0.216	2.483	6.848	0.629	2.878	0.721
1.5	0.182	1.935	5.866	0.553	2.600	0.623
1.7	0.157	1.635	5.277	0.513	2.334	0.560
1.9	0.139	1.450	4.885	0.488	2.192	0.521
3.1	0.086	1.039	3.944	0.458	1.900	0.446
5.1	0.062	0.912	3.595	0.450	1.774	0.421
7.1	0.054	0.881	3.495	0.449	1.743	0.416
9.1	0.051	0.870	3.455	0.449	1.733	0.415
11.1	0.049	0.865	3.435	0.448	1.728	0.414

інших випадків похибка у розрахунку приєднаних мас не перевищує 3%.

В табл. 2 наведені приєднані маси тривісного еліпсоїда, що рухається в симетричному каналі (рис. 10, а), залежно від глибини каналу. Всі приєднані маси віднесені до маси витісненої рідини $m = \frac{2}{3}\pi\rho abc$ або до відповідного моменту інерції:

$$J_{xx} = \frac{2}{15}\pi\rho abc(b^2 + c^2)$$

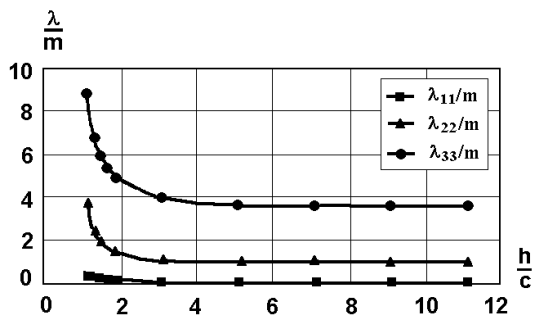
$$J_{yy} = \frac{2}{15}\pi\rho abc(a^2 + c^2)$$

$$J_{zz} = \frac{2}{15}\pi\rho abc(a^2 + b^2)$$

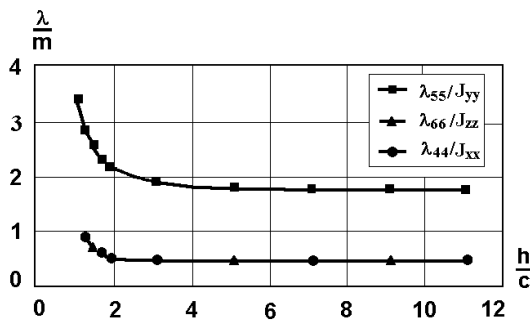
На рис. 16 показані залежності приєднаних мас від глибини каналу. Видно, що при збільшенні глибини каналу приєднані маси різко зменшуються, а

при досягненні певної глибини майже не змінюються (асимптотично наближаються до певного значення).

Результати чисельного моделювання гідродинамічної взаємодії двох тривісних еліпсоїдів у безграничній рідині. Для оцінки точності побудованих чисельних алгоритмів розрахунку сил та моментів, що виникають внаслідок гідродинамічної взаємодії тіл, проведено порівняння результатів розрахунків з даними аеродинамічного експерименту роботи [22], в якій представлені результати випробувань в аеродинамічній трубці двох еліпсоїдів обертання зі співвідношенням осей 6:1. Сили і моменти вимірювались за допомогою високочутливої тензосистеми з шістьма ступенями свободи. Обидві моделі встановлювались в трубці паралельно з різними відстанями $\Delta\eta$ і $\Delta\xi$ (рис. 17). В експериментах тіла обдувались при різних поздовжніх зміщеннях $\Delta\xi$. Така постановка задачі



a



б

Рис. 16. Залежності коефіцієнтів приєднаних мас еліпсоїда від глибини h/c у випадку руху еліпсоїда в симетричному каналі

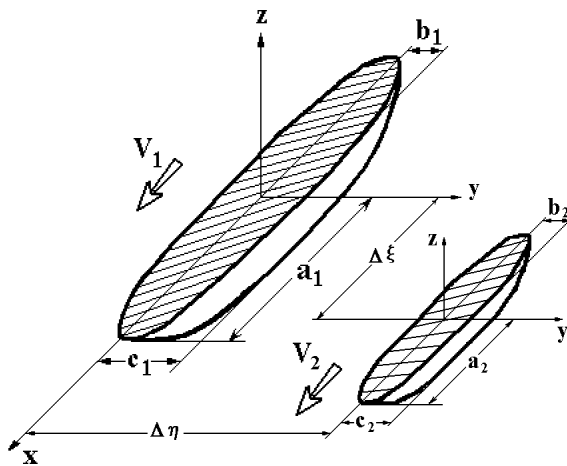


Рис. 17. Схема руху двох еліпсоїдів

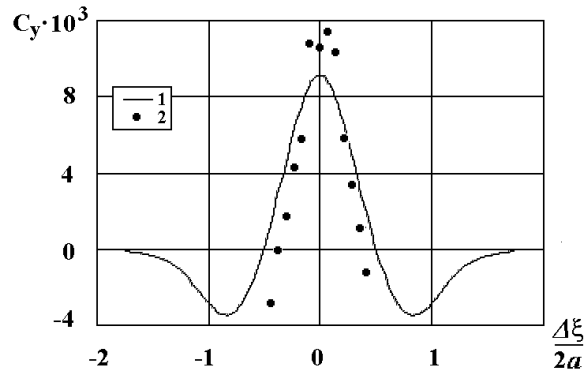


Рис. 18. Залежність коефіцієнта бокової гідродинамічної сили C_y при русі двох еліпсоїдів обертання ($\Delta\eta/2a = 0.288$) однакових розмірів в безграничній рідині від безрозмірного поздовжнього зміщення $\Delta\xi/2a$: 1 – результати розрахунків; 2 – експериментальні дані

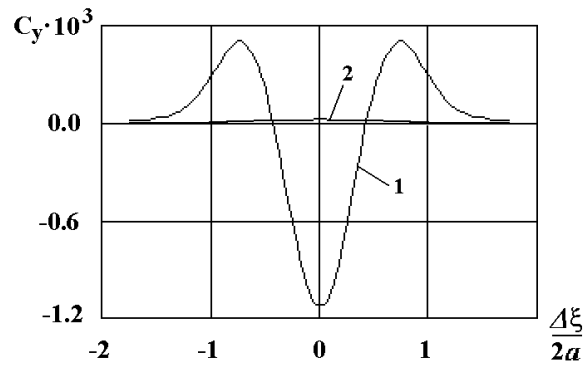
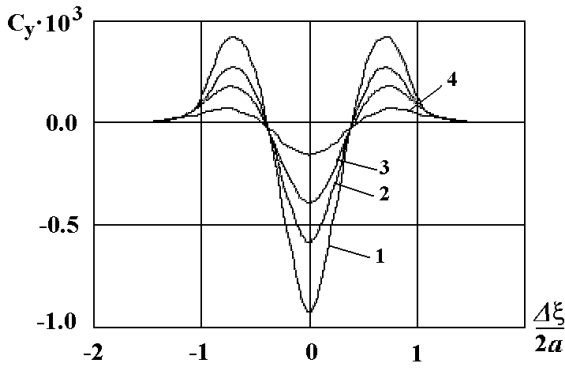


Рис. 19. Залежність коефіцієнтів бокових сил, що виникають у випадку, коли один з еліпсоїдів нерухомий, а інший з однаковою швидкістю рухається повз нього в безграничній рідині ($\Delta\eta/b = 4$) від безрозмірного поздовжнього зміщення $\Delta\xi/2a$:

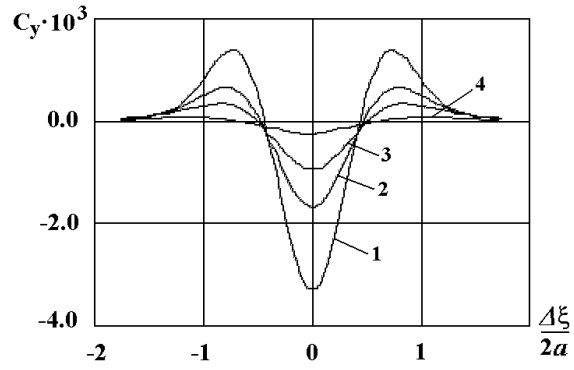
1 – коефіцієнт сили, що діє на рухомий еліпсоїд; 2 – коефіцієнт сили, що діє на нерухомий еліпсоїд

відповідає русі двох тіл з однаковими швидкостями. Проведені в [22] розрахунки з використанням моделі “тонкого” тіла показали їх якісну відповідність експериментальним даним.

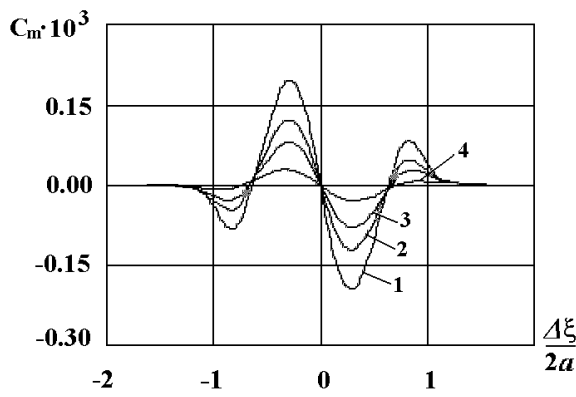
Для таких же умов були проведені розрахунки з використанням побудованого вище чисельного алгоритму МГЕ, який дозволяє виконати умови непротікання набагато точніше, ніж теорія “тонкого” тіла. На рис. 18 наведені графіки порівняння коефіцієнтів бокової сили $C_y = F_y/2\rho V^2 ab$ залежно від поздовжнього зміщення $\Delta\xi$. З рисунка видно, що експериментальні дані добре узгоджуються з



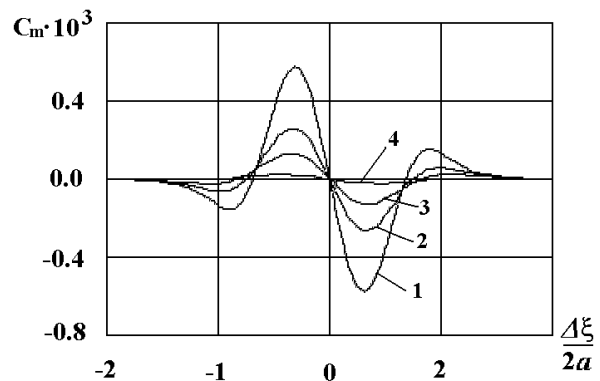
а



а



б



б

Рис. 20. Вплив відстані між тілами (1 – $\Delta\eta/b = 3$; 2 – $\Delta\eta/b = 4$; 3 – $\Delta\eta/b = 5$; 4 – $\Delta\eta/b = 8$) у випадку “тонких” тіл ($b/a = 0.1$; $c/a = 0.05$) на гідродинамічні коефіцієнти бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б) на нерухоме тіло при проходженні повз нього іншого тіла, таких же розмірів у безграничній рідині

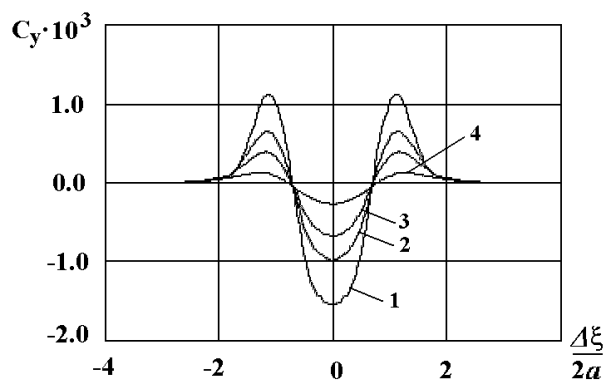
Рис. 21. Вплив відстані між тілами (1 – $\Delta\eta/b = 3$; 2 – $\Delta\eta/b = 4$; 3 – $\eta/b = 5$; 4 – $\Delta\eta/b = 8$) у випадку “товстих” тіл ($b/a = 0.25$; $c/a = 0.0125$) на гідродинамічні коефіцієнти бокової сили C_y (а) та моменту C_m (б) на нерухоме тіло при проходженні повз нього іншого тіла, таких же розмірів у безграничній рідині

результатами чисельного моделювання. Незначне перевищення експериментальних даних для коефіцієнта бокової сили над розрахунковими значеннями може бути пов'язане з впливом пограничного шару та відповідним зменшенням відстані між тілами.

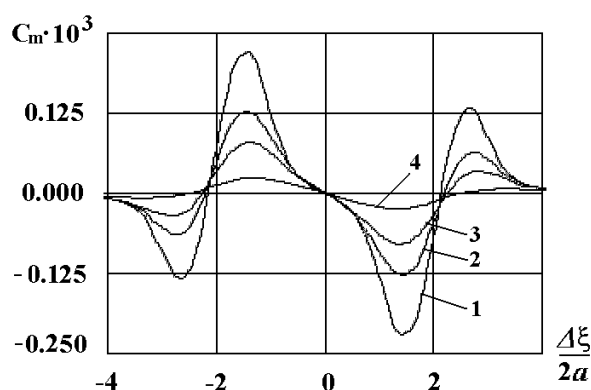
Цікавим є випадок, коли тіла рухаються з різними швидкостями або коли одне тіло нерухоме, а інше рухається повз нього. Як показують досліди, проведені в роботі [12], за умови однакових розмірів обох тіл сила, що діє на нерухоме тіло, набагато більша, ніж сила, яка діє на рухоме тіло. Цей неочевидний факт підтверджується наближеними розрахунками (рис. 19). Тому сили, які діють

на нерухоме тіло, викликають більший інтерес, наприклад, у випадку руху одного судна поблизу закореного (або пришвартованого) судна чи гідротехнічної споруди. Розглядаються лише сили, які діють на нерухоме тіло.

На рис. 20 наведені результати розрахунків коефіцієнтів бокових гідродинамічних сил $C_y = F_y/2\rho V^2 ab$ та моментів $C_m = M_z/4\rho V^2 a^2 b$, що діють на нерухомі “тонкі” тіла при різних відстанях між рухомим та нерухомим тілами η . Тілами в даному випадку служать тривісні еліпсоїди однакових розмірів зі співвідношеннями осей $b/a = 0.1$, $c/a = 0.05$. З цих графіків видно, що



a



б

Рис. 22. Гідродинамічні коефіцієнти бокової сили C_y (а) і моменту C_m (б), що діють на нерухомий еліпсоїд ($b_1/a_1 = 0.25$; $c_1/a_1 = 0.0125$) при проходженні повз нього іншого еліпсоїда з параметрами $b_2/a_2 = 0.1$; $c_2/a_2 = 0.05$; $a_2/a_1 = 0.05$ на різних відстанях:
 1– $\Delta\eta/b_1 = 3$; 2– $\Delta\eta/b_1 = 4$; 3– $\Delta\eta/b_1 = 5$; 4– $\Delta\eta/b_1 = 8$

при зближенні тіл сили взаємодії між ними різко зростають. На рис. 21 наведені аналогічні розрахунки для “товстого” еліпсоїда зі співвідношеннями осей $b/a = 0.25$, $c/a = 0.0125$. Порівнюючи відповідні коефіцієнти сил та моментів, можна помітити, що залежності для “тонких” і “товстих” тіл дещо відрізняються. У випадку “товстих” еліпсоїдів гідродинамічні коефіцієнти в декілька разів більші. На рис. 22 наведені результати чисельних розрахунків бокових сил та моментів, що діють на нерухомий еліпсоїд зі співвідношеннями осей $b_1/a_1 = 0.25$, $c_1/a_1 = 0.0125$ під час проходження повз нього еліпсоїда інших розмірів

$$b_2 = a_2/10, c_2 = a_2/20.$$

До характерних особливостей отриманих залежностей слід віднести істотне зміщення максимуму функції C_m вздовж осі $\Delta\xi$ при зміні довжини рухомого еліпсоїда.

ВИСНОВКИ

У роботі побудована чисельна модель гідродинамічної взаємодії тіл (зокрема суден), що рухаються в рідині. Модель ґрунтується на застосуванні методу граничних елементів. Поверхня тіла та непроникні ділянки границі апроксимуються системою трикутних елементів. На кожному дискретному елементі поверхні розподілені джерела постійної інтенсивності. Значну увагу приділено побудові матриці, яка описує взаємний вплив трикутних дискретних елементів. У роботі проведена апробація чисельної моделі. Виконані розрахунки для потенціалу φ і швидкості рідини на поверхні рухомого еліпсоїда в необмеженій рідині та поблизу плоскої стінки. Одержані дані, які описують денівеляцію поверхні води при рухові судна (що моделюється еквівалентним тривісним еліпсоїдом) у каналі з трапецевидним перерізом. Побудовані залежності коефіцієнтів приєднаних мас еліпсоїда від його розташування в каналі, параметрів каналу та еліпсоїда. Розраховані сили гідродинамічної взаємодії двох еліпсоїдів, які рухаються в безмежній рідині. Розглянуті випадки однакових та різних (за розмірами) еліпсоїдів, коли вони рухаються в одному напрямку, та коли один еліпсоїд рухається, а другий нерухомий. Побудована чисельна модель та отримані залежності дозволяють з більшою точністю проводити аналіз спеціальних режимів руху суден, зокрема в річках, каналах, поблизу гідротехнічних споруд тощо.

1. Бенержи П., Баттерфилд Р. Метод граничных элементов в прикладных науках.– М.: Мир, 1984.– 494 с.
2. Бреббия К., Теллес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов.– М.: Мир, 1987.– 524 с.
3. Горбань И. Н. Исследование вихревых течений в ограниченных областях. Диссерт. на соиск. уч. ст. к.ф.-м. н.– К.: ИГМ НАНУ, 1993.– 236 с.
4. Горбань В. А. О динамике систем тел в идеальной жидкости.– К.: Гидромеханика, 1983.– 236 с.
5. Короткий А.И. Присоединенные массы судна.– Л.: Судостроение, 1986.– 312 с.
6. Костюков А.А. Взаимодействие тел, движущихся в жидкости.– Л.: Судостроение, 1972.– 310 с.
7. Костюков А.А. Теория корабельных волн и волнового сопротивления.– Л.: Судпромгиз, 1987.– 123 с.

8. *Мастушкин Ю.М.* Гидродинамическое взаимодействие судов при встречах и обгонах.– Л.: Судостроение, 1987.– 311 с.
9. *Милн-Томсон Л.М.* Теоретическая гидромеханика.– М.: Мир, 1964.– 555 с.
10. *Павленко Г. Е.* Избранные труды.– К.: Наук. думка, 1978.– 495 с.
11. *Сретенский Л. Н.* Теория волновых движений жидкости.– М.: Наука, 1977.– 815 с.
12. *Cohen S., Beck R.* Experimental and theoretical hydrodynamic forces on a mathematical model in confined waters // Journal of Ship Research.– 1983.– 27, N 2.– P. .
13. *Q.Y. Gui, J.M. Chuang and C.C. Hsiung* A discussion on irregularities which occur in computation of ship manoeuvring in a restricted waterway using the numerical conformal mapping method // Int. Shipbuild. Progr.– 1992.– 39, N 417.– P. 55-67.
14. *Hess J. L., Smith A. M. O.* Calculations of nonlifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies // Journal of Ship Research.– 1964.– 8, N 2.– P. 22-44.
15. *C.C. Hsiung and Qianyi Gui* Computing interaction forces and moments on a ship in restricted waterways // Int. Shipbuild. Progr.– 1988.– 35, N 403.– P. 219-254.
16. *Korsmeyer F.T., Lee C.-H., Newman J.N.* Computation of Ship Interaction forces in restricted waters // Journal of Ship Research.– 1993 .– 37, N 4.– P. 298-306.
17. *P.Krishnankutty and K.S. Varyani* Force on the mooring lines of a ship due the hydrodynamic interaction effects of a passing ship // Int. Shipbuild. Progr.– 2004.– 51, N 1.– P. 33-57.
18. *Kyulevcheliiev S., Georgiev S.* Experimental observations of ship wavemaking at trans - and supercritical speeds // Euro-Conference HADMAR 2001,Varna,Bulgaria.– 2001.– N .– P. .
19. *Newman N. J.* Evaluation of the wave-resistance Green function: part 1 - the double integral // Journal of Ship Research.– 1987.– 31, N 2.– P. 79-90.
20. *Newman N. J.* Evaluation of the wave-resistance Green function: part 2 - the single integral on the centerplane // Journal of Ship Research.– 1987.– 31, N 3.– P. 145-150.
21. *Vantorre M., Laforce E., Verzhbitskaya E.* Model tests based formulations of ship-ship interaction forces for simulation purposes // IMSF 28th Annual General Meeting,Genova.– 2001.– N .– P. .
22. *Weihs D., Ringel M., Victor M.* Aerodynamic interactions between adjacent slender Bodies // AI-AA Journal.– 2006.– 44, N 3.– P. 481-484.
23. *Zhi Guo and Allen T. Cnwang* Oblique Impact of Two Cylinders in a Uniform Flow // Journal of Ship Research.– 1991.– 35, N 3.– P. 219-229.