

УДК 532.5

СВОБОДНОЕ ГЛИССИРОВАНИЕ ПЛАСТИНЫ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ ФРУДА

М. В. МАКАСЕЕВ

Національний технічний університет України "КПІ", Київ

Получено 27.10.2005 ◊ Пересмотрено 11.02.2006

Получено асимптотическое решение для больших чисел Фруда задачи установившегося глиссирования пластины с заданной нагрузкой и свободным (неизвестным) углом хода. Даны формулы для смоченной длины, угла хода и осадки задней кромки в зависимости от числа Фруда и положения центра тяжести глиссера.

Отримано асимптотичний розв'язок для великих чисел Фруда задачі сталого глисування пластины з заданим навантаженням і вільним (невідомим) кутом ходу. Дано формули для змоченої довжини, кута ходу та осадки задньої кромки в залежності від числа Фруда і положення центру ваги глиссера.

The asymptotic solution for large Froude numbers of a problem steady planing plates with given load and free (unknown) by a trim angle are obtained. The formulas for wetted length, trim angle and draught of a trailing edge depending on a Froude number and center of gravity position of a glider are given.

ВВЕДЕНИЕ

Под свободным глиссированием понимается движение глиссера при условии, что на него кроме некоторой силы тяги, сообщающей заданную поступательную скорость, действуют только сила тяжести и сила реакции воды. При этом заданными являются нагрузка на глиссер (водоизмещение) и положение центра тяжести. Осадку глиссера, угол хода (угол дифферента) и смоченную поверхность необходимо определить. К "несвободному" глиссированию в данном случае можно отнести другие виды движения глиссера при всех возможных способах фиксирования угла хода и осадки, встречающиеся, например, в экспериментальных исследованиях.

Плоская задача об установившемся глиссировании пластины при фиксированном угле хода решена Л.И.Седовым [1], [2] и Н.Е.Кочиним [3] разными методами. В качестве характерного линейного размера использовалась смоченная длина l , а число Фруда определялось как $Fr = V_0/\sqrt{gl}$, где V_0 – скорость движения глиссера, g – ускорение свободного падения. При таком подходе остается нерешенной задача о смоченной длине, так как одному фиксированному значению числа Фруда соответствует бесконечное множество пар значений смоченной длины и скорости.

В реальных условиях и при экспериментальных исследованиях глиссирования характерный линейный размер определяется по нагрузке на глиссер (водоизмещению): $a = \sqrt[3]{\Delta/\rho g}$, где Δ – нагрузка, ρg – удельный вес воды. Задача о глиссировании пластины с заданной нагрузкой и неизвестной

смоченной длиной решена в [4]. При этом угол хода оставался фиксированным. Задача о свободном глиссировании пластины с неизвестным углом хода решена в [5]. В настоящей работе получено асимптотическое решение этой задачи для больших чисел Фруда, даны расчетные формулы для смоченной длины, угла хода и осадки задней кромки.

1. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАДАЧИ О СВОБОДНОМ ГЛИССИРОВАНИИ

В системе координат, связанной с глиссирующей пластиной так, что ось x направлена в сторону движения и совпадает с невозмущенным уровнем свободной поверхности на бесконечности, ось y проходит через заднюю кромку пластины, основное интегральное уравнение задачи имеет вид [4]:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^l \frac{\gamma(s)}{x-s} ds + \nu \int_0^l \gamma(s) [R(x-s, \nu) - \cos \nu(x-s)] ds = -f'(x), \quad 0 < x < l, \quad (1)$$

где $\gamma(x)$ – перепад давления на пластине; ν – параметр весомости: $\nu = ga/V_0^2 = 1/Fr^2$,

$$R(x, \nu) = \left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sgn} x + \operatorname{Si} \nu x \right] \cos \nu x - \operatorname{Ci} \nu |x| \sin \nu x,$$

$\operatorname{Si} x$ и $\operatorname{Ci} x$ – интегральные синус и косинус [6]; $f(x) = f_0 + kx$ – форма пластины; f_0 – осадка задней кромки; $k = \operatorname{tg} \alpha$; α – угол хода. Первый

интеграл в (1) понимается в смысле главного значения. Уравнение (1) выражает условие гладкого обтекания пластины. При свободном глиссировании к уравнению (1) добавляются условия равновесия сил и моментов [5]:

$$\int_0^l \gamma(x) dx = \nu, \tag{2}$$

$$\int_0^l \gamma(x) x dx = \nu b, \tag{3}$$

где b – расстояние от задней кромки до центра тяжести. Неизвестными в системе являются $\gamma(x)$, l и k .

Форма свободной поверхности после решения системы (1)–(3) определяется по формуле [4]

$$\vartheta(x) = \int_0^l \gamma(s) [Q(\nu, x-s) + \sin \nu (x-s)] ds,$$

где

$$Q(\nu, x) = -\frac{1}{\pi} \left[\cos \nu x \text{Ci} \nu |x| + \sin \nu |x| \left(\frac{\pi}{2} + \text{Si} \nu |x| \right) \right].$$

2. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДЛЯ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ФРУДА

Систему уравнений (1)–(3) после замены переменных $\bar{s} = s/l$, $\bar{x} = x/l$ запишем в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(\bar{s})}{\bar{x} - \bar{s}} d\bar{s} + \omega \int_0^1 \gamma(\bar{s}) [R(\bar{x} - \bar{s}, \omega) - \cos \omega(\bar{x} - \bar{s})] d\bar{s} = -k, 0 < \bar{x} < 1, \tag{4}$$

$$lk \bar{c}_y(1, \omega) = \nu, \tag{5}$$

$$l^2 k \bar{c}_m(1, \omega) = \nu b, \tag{6}$$

где $\omega = \nu l$; $\bar{c}_y(1, \omega) = c_y(1, \omega)/k$; $\bar{c}_m(1, \omega) = c_m(1, \omega)/k$,

$$c_y(1, \omega) = \int_0^1 \gamma(\bar{x}) d\bar{x}, c_m(1, \omega) = \int_0^1 \gamma(\bar{x}) \bar{x} d\bar{x}.$$

Уравнение (4) по форме совпадает с исходным уравнением (1) при $l = 1$, что соответствует формально задаче с заданной единичной длиной и параметром весомости ω .

Идея решения уравнений (4)–(6) при малых ν ($Fr \rightarrow \infty$) такая. Считая в (4) k временно известным, найдем формальное решение этого уравнения при малых ω , т.е. найдем асимптотическое разложение по параметру ω величин $c_y(1, \omega)$ и $c_m(1, \omega)$. Подставляя затем эти разложения в (5) и (6) и заменяя ω на νl , найдем из (5) и (6) в свою очередь разложения l и k .

Формальное решение (4) при фиксированном k соответствует решению задачи глиссирования с заданным углом хода и заданной смоченной длиной в постановке Л.И.Седова и Н.Е.Кочина [1–3]. Для больших чисел Фруда в [1–3] получены асимптотические формулы для коэффициентов сил. Поскольку метод решения, применяемый в настоящей работе, отличается от методов [1–3], покажем, что асимптотическое решение (4) совпадает с решением, полученным в [1–3].

Для удобства изложения вместо уравнения (4) будем решать (1) при $l = 1$ и малых ν . Используя известные [6] формулы для интегральных синуса и косинуса

$$\text{Si} x = x - \frac{1}{3!} \frac{x^3}{3} + \frac{1}{5!} \frac{x^5}{5} \mp \dots$$

$$\text{Ci} x = C + \ln x - \frac{1}{2!} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4!} \frac{x^4}{4} \mp \dots,$$

(здесь C – постоянная Эйлера), а также формулы разложения для обычных синуса и косинуса, получим при $\nu \rightarrow 0$ разложение для уравнения (1):

$$\frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(s)}{x-s} ds + \nu \int_0^1 \gamma(s) \left[\frac{1}{2} \text{sgn}(x-s) - 1 \right] ds - \frac{\nu^2 \ln \nu}{\pi} \int_0^1 \gamma(s) (x-s) ds + O(\nu^2) = -k, 0 < x < 1, \tag{7}$$

и функции $\vartheta(x)$ (при $l = 1$):

$$\vartheta(x) = -\frac{C + \ln \nu}{\pi} \int_0^1 \gamma(s) ds - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \gamma(s) \ln |x-s| ds + \nu \int_0^1 \gamma(s) \left[1 - \frac{1}{2} \text{sgn}(x-s) \right] (x-s) ds + \frac{\nu^2 \ln \nu}{2\pi} \int_0^1 \gamma(s) (x-s)^2 ds + O(\nu^2). \tag{8}$$

Исходя из характера разложений (7), (8), функцию $\gamma(x)$ будем искать в виде асимптотического ряда

$$\gamma(x) = \gamma_0(x) + \gamma_1(x)\nu \ln \nu + \gamma_2(x)\nu + \gamma_3(x)\nu^2 \ln \nu + \dots, \quad (9)$$

подставляя который в разложение (7) и вычисляя коэффициенты полученного разложения, будем иметь уравнения для определения функций $\gamma_0(x), \gamma_1(x), \dots$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_0(s)}{x-s} ds &= -k, 0 < x < 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_1(s)}{x-s} ds &= 0, 0 < x < 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_2(s)}{x-s} ds &= \\ &= - \int_0^1 \gamma_0(s) \left[\frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-s) - 1 \right] ds, 0 < x < 1, \\ \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\gamma_3(s)}{x-s} ds &= \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \gamma_0(s) (x-s) ds, 0 < x < 1, \dots \end{aligned}$$

Решения этих уравнений при предположении $\gamma(0) = 0$, что соответствует постулату Кутта-Жуковского в теории крыла, следует искать в классе функций, ограниченных при $x = 0$ и неограниченных при $x = 1$. Последовательно определяем:

$$\begin{aligned} \gamma_0(x) &= k \sqrt{\frac{x}{1-x}}, \\ \gamma_1(x) &= 0, \\ \gamma_2(x) &= \\ &= -\frac{k}{\pi} \sqrt{\frac{x}{1-x}} \left(\int_0^1 \sqrt{\frac{1-s}{s}} \int_0^s \sqrt{\frac{t}{1-t}} dt \frac{ds}{x-s} + \frac{3\pi^2}{4} \right), \\ \gamma_3(x) &= k \sqrt{\frac{x}{1-x}} \left(\frac{x}{2} - \frac{5}{8} \right), \dots \end{aligned}$$

Найдем коэффициенты подъемной силы:

$$c_y(1, \nu) = c_{y0} + \nu \ln \nu c_{y1} + \nu c_{y2} + \nu^2 \ln \nu c_{y3} + \dots,$$

и момента относительно задней кромки

$$c_m(1, \nu) = c_{m0} + \nu \ln \nu c_{m1} + \nu c_{m2} + \nu^2 \ln \nu c_{m3} + \dots,$$

где

$$c_{yi} = \int_0^1 \gamma_i(x) dx, c_{mi} = \int_0^1 \gamma_i(x) x dx, i = 0, 1, 2, \dots$$

Вычисления дают:

$$c_{y0} = \frac{k\pi}{2}, c_{y1} = 0, c_{y2} = -\frac{k(\pi^2 + 4)}{4}, c_{y3} = 0, \dots,$$

$$c_{m0} = \frac{3\pi}{8}k, c_{m1} = 0, c_{m2} = -\frac{9\pi^2 + 32}{48}k,$$

$$c_{m3} = -\frac{5\pi}{64}k, \dots$$

В результате можно записать:

$$c_y(1, \nu) = \frac{\pi}{2}k - \frac{\pi^2 + 4}{4}k\nu + O(\nu^2), \quad (10)$$

$$c_m(1, \nu) = \frac{3\pi}{8}k - \frac{9\pi^2 + 32}{48}k\nu - \frac{5\pi}{64}k\nu^2 \ln \nu + O(\nu^2). \quad (11)$$

Коэффициент сопротивления в этом случае

$$c_x(1, \nu) = kc_y(1, \nu).$$

Формулы (10), (11) совпадают с точностью до обозначений с соответствующими формулами Л.И.Седова и Н.Е.Кочина [1–3]. Воспользуемся найденными значениями коэффициентов асимптотических разложений для решения системы (4)–(6).

Из уравнений (5) и (6) получим, что

$$l = b \frac{c_y(1, \omega)}{c_m(1, \omega)},$$

и при $\nu \rightarrow 0$ имеем $l = 4b/3 = l_0$, следовательно, разложение для l должно иметь форму

$$l = l_0 + l_1\nu \ln \nu + l_2\nu + l_3\nu^2 \ln \nu + \dots \quad (12)$$

При $\nu \rightarrow 0$ из (5) имеем $k = 0$. Поэтому разложение для k должно иметь вид

$$k = k_1\nu \ln \nu + k_2\nu + k_3\nu^2 \ln \nu + \dots \quad (13)$$

Подставляя разложения (12), (14) в уравнения (5), (6) и вычисляя коэффициенты, находим:

$$l_0 = \frac{bc_{y0}}{c_{m0}} = \frac{4b}{3}, l_1 = 0, l_2 = l_0^2 \left(\frac{c_{y2}}{c_{y0}} - \frac{c_{m2}}{c_{m0}} \right) = -\frac{32b^2}{81\pi},$$

$$k_1 = 0, k_2 = \frac{1}{l_0 c_{y0}}, k_3 = 0,$$

$$k_4 = l_0 k_2 \left(\frac{c_{m2}}{c_{m0}} - 2 \frac{c_{y2}}{c_{y0}} \right) = \frac{9\pi^2 + 40}{9\pi^2}.$$

В результате

$$l = \frac{4}{3}b - \frac{32}{81\pi}b^2\nu + O(\nu^2 \ln \nu), \quad (14)$$

$$k = \frac{3}{2\pi b}\nu + \frac{9\pi^2 + 40}{9\pi^2}\nu^2 + O(\nu^3 \ln \nu). \quad (15)$$

Коэффициент сопротивления свободно глссирующей пластины

$$c_x(l, \nu) = k\nu = \frac{3}{2\pi b}\nu^2 + \frac{9\pi^2 + 40}{9\pi^2}\nu^3 + O(\nu^4 \ln \nu).$$

Для формы свободной поверхности можно получить:

$$\vartheta(x) = -\frac{\nu(C + \ln \nu)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^l \gamma(s) \ln|x-s| ds + \\ + \nu \int_0^l \gamma(s) \left[1 - \frac{1}{2} \operatorname{sgn}(x-s) \right] (x-s) ds + \dots$$

Осадка задней кромки:

$$\vartheta(0) = -\frac{\nu(C + \ln \nu)}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^l \gamma(s) \ln s ds - \frac{3}{2}\nu \int_0^l \gamma(s) s ds + \dots = \\ = -\frac{\nu(C + \ln \nu)}{\pi} - \frac{\nu \ln l}{\pi} - \frac{l}{\pi} \int_0^1 \gamma(\bar{s}) \ln \bar{s} d\bar{s} - \frac{3\nu^2 b}{2} + \dots$$

Подставляя сюда разложение $\gamma(\bar{s})$ по параметру ω , а также ряды (15), (16), после вычислений получим

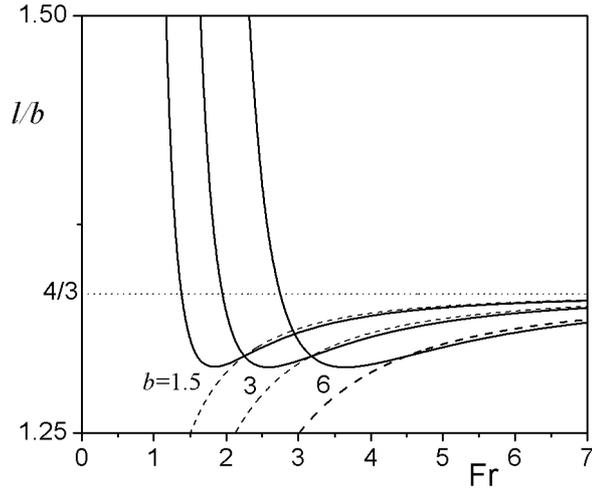


Рис. 1. Зависимость смоченной длины от числа Фруда при различных положениях центра тяжести

$$\vartheta(0) = -\frac{\nu}{\pi} \left(C + 1 + \ln \frac{\nu b}{3} \right) - 1.56\nu^2 b + O(\nu^3 \ln \nu). \quad (16)$$

Приведем значения некоторых интегралов, которые были использованы при вычислении коэффициентов асимптотических формул:

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} x dx = \frac{3\pi}{8},$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{x}} \int_0^x \sqrt{\frac{s}{1-s}} ds dx = \frac{\pi^2}{8} - 1,$$

$$\int_0^1 \sqrt{(1-x)x} \int_0^x \sqrt{\frac{s}{1-s}} ds dx = \frac{\pi^2}{32} - \frac{1}{6},$$

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x}{1-x}} \ln x dx = \frac{\pi}{2} - \pi \ln 2$$

3. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ

На рис. 1–3 представлены графики зависимостей смоченной длины, угла хода в градусах и осадки задней кромки плоской пластины в зависимости от числа Фруда при различных положениях центра тяжести. Сплошные линии – результаты численного решения [5] системы (15), штриховые построены по асимптотическим формулам (14)–(16).

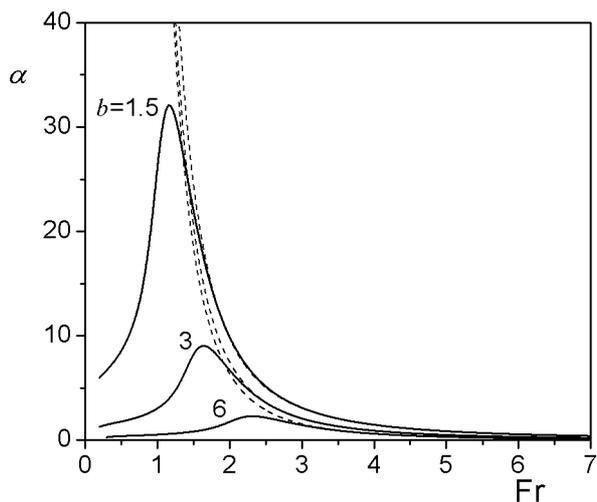


Рис. 2. Зависимость угла хода от числа Фруда при различных положениях центра тяжести

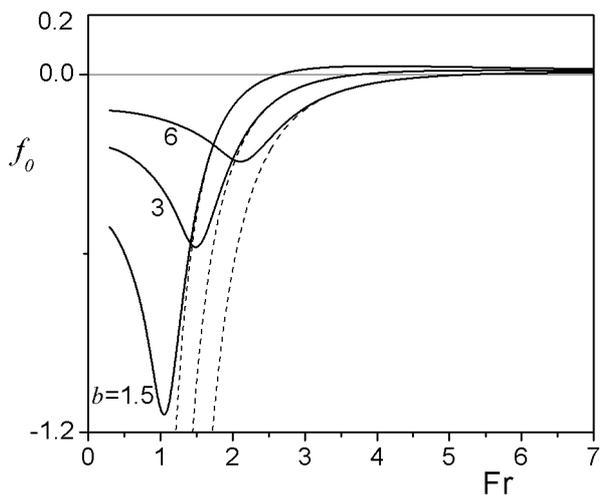


Рис. 3. Зависимость осадки задней кромки от числа Фруда при различных положениях центра тяжести

При свободном установившемся глиссировании положение центра давления, как следует из уравнений (2) и (3), всегда совпадает с положением центра тяжести:

$$x_c = c_m(l, \nu) / c_y(l, \nu) = b.$$

С увеличением скорости движения глссера ($Fr \rightarrow \infty$) смоченная длина приближается к величине $4b/3$ (рис. 1), т. е. центр давления приближается к точке, находящейся на расстоянии $1/4$ смоченной длины от передней кромки. Это подтверждает справедливость известных аналогий теории глссирования на больших скоростях с линеаризованной теорией крыла.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные в работе асимптотические формулы для основных гидродинамических характеристик пластины при установившемся глссировании с заданными нагрузкой и положением центра тяжести при больших числах Фруда дают результаты, достаточно хорошо согласующиеся с известными численными решениями. Указанные формулы могут быть использованы для оценочных расчетов при проектировании скоростных судов, гидросамолетов, других транспортных средств с динамическими принципами поддержания, а также в исследованиях и технических расчетах, связанных с глссированием.

1. Седов Л.И. Плоская задача о глссировании по поверхности тяжелой жидкости // Труды конф. по волновому сопротивлению. – М.: ЦАГИ. – 1937. – С. 3-38.
2. Седов Л.И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. – М: Наука, 1981. – 448 с.
3. Кочин Н.Е. Плоская задача о глссировании слабо изогнутого контура по поверхности тяжелой несжимаемой жидкости // Труды ЦАГИ. – 1938. – вып. 356. – С. 3 - 24.
4. Dovgiy S.A., Efremov I.I., Makasyeyev M.V. Some problems of a planing theory // High speed hydrodynamics / Proc. of Int. Summer Scientific School. June 16–23, 2002. Cheboksary, Russia. – Comput.Public.: Cheboksary, Russia / Washington, USA. – 2002. – С. 241 - 248.
5. Макасеев М.В. Установившееся глссирование пластины по поверхности весомай жидкости при заданной нагрузке и свободном угле хода // Прикладна гідромеханіка. – 2003. – том 5(77), №2. – С. 73-75.
6. Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М.: Наука, 1977. – 342 с.