

Численное моделирование динамики упругих трубчатых спиралей с внутренними неоднородными потоками вскипающей жидкости

В. И. Гуляев, Е. Ю. Толбатов

Украинский транспортный университет, Киев, Украина

Поставлена задача о численном исследовании динамического поведения спиральной трубы, содержащей внутренние неоднородные потоки вскипающей жидкости. Предложена модель движения сокращающихся сгустков нагреваемой жидкости, разделённых полостями, которые заполнены паром. Для рассматриваемой динамической системы с изменяющейся геометрией масс построена система дифференциальных уравнений с зависящими от времени разрывными коэффициентами и правой частью. Описана методика их численного решения, базирующаяся на использовании методов численного интегрирования по времени и метода начальных параметров совместно с процедурой ортогонализации по пространственной переменной. Отслежены колебания системы при различных параметрах неоднородности потока, его скорости и параметра диссипации энергии. Обнаружена возможность установления устойчивых и неустойчивых режимов движения, зависящих от характера неоднородности и скорости движения жидкостных сгустков.

Ключевые слова: криволинейные трубчатые стержни, неоднородный поток жидкости, вынужденные колебания, период колебаний, динамическая устойчивость, методы пошагового интегрирования.

Обозначения

$\vec{f}_ж^I$	– центробежная сила инерции жидкости
a_0	– длина жидкостных пробок на входе
V_0	– скорость жидкостных пробок на входе
k	– параметр, определяющий скорость испарения жидкости
\vec{F}, \vec{M}	– векторы внутренних усилий и моментов
$\vec{\omega}_\chi$	– вектор Дарбу
T	– радиус кручения
$\vec{\rho}$	– радиус-вектор точек осевой линии
A, B, C	– параметры изгибной и крутильной жёсткости
p, q, r	– кривизны и кручение осевой линии
χ	– коэффициент внешнего трения
N	– число витков спирали
R	– радиус цилиндрической поверхности винтовой спирали
α	– угол подъёма спирали
S	– полная длина спирали
d	– наружный диаметр кольцевого сечения трубки
h	– толщина стенки трубки
$\rho_ж$	– погонная масса протекающей жидкости (воды)

ρ_T – погонная масса трубки

T_n – период поступления жидкостных пробок в канал змеевика

T_x, T_y – условные периоды колебаний системы вдоль осей Ox и Oy

Введение. Криволинейные трубчатые стержни в форме винтовых цилиндрических спиралей, взаимодействующие с внутренней подвижной (жидкой) средой, получили широкое распространение в технике в качестве трубопроводов теплообменных аппаратов атомной и тепловой энергетики. При взаимодействии внутреннего потока жидкости с криволинейной трубкой генерируются сложные статические и динамические эффекты, возникающие под влиянием сил, действующих на трубку со стороны потока. Под воздействием этих сил на трубчатые конструкции в них инициируются динамические процессы, аналогичные явлениям, протекающим в удлинённых конструкциях и сооружениях, подвергающихся действию подвижных нагрузок и масс.

Задача о динамике круговой цилиндрической трубчатой спирали под действием подвижных нагрузок, порождаемых силами инерции движущихся в канале трубчатого криволинейного стержня сгустков вскипающей жидкости, пара и их смеси (рис. 1), имеет специфические особенности, свойственные деформируемым системам с подвижными массами [1–6]. Взаимодействие между подвижными массами и колеблющейся деформируемой системой может привести к обмену между ними кинетической и потенциальной энергиями и к статической либо динамической потере устойчивости деформируемой упругой системы. При этом движущаяся в криволинейной трубе неоднородная жидкость оказывает существенное влияние на её колебания. Отметим, что ранее [2, 3] рассмотрены случаи движения неизменяющихся жидкостных пробок с постоянной скоростью. Ниже исследована модель движения вскипающих пробок с изменяющимися длиной и скоростью.

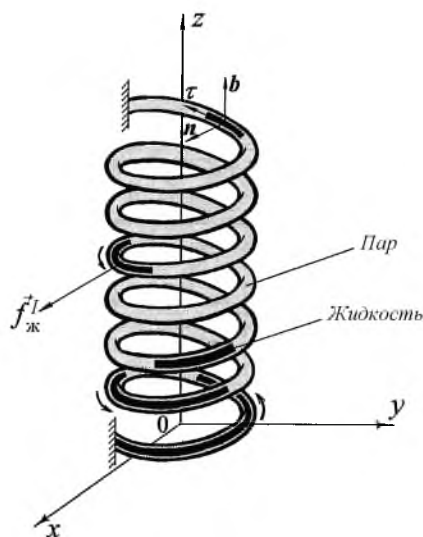


Рис. 1. Геометрическая схема участка трубчатой спирали с подвижными испаряющимися пробками.

Как показали экспериментальные исследования, выполненные в Московском энергетическом институте по анализу движения вскипающей жидкости в трубчатых спиральных стеклянных змеевиках, нагреваемых снаружи, при некоторых термодинамических режимах и значениях геометрических и механических параметров системы возникают случаи так называемого снарядного движения жидкости. Они заключаются в том, что в трубчатых теплообменных системах возможны такие режимы вскипания жидкости в трубе, при которых образующаяся пароводяная смесь не является гомогенной, а оказывается состоящей из чередующихся и движущихся с высокой скоростью участков жидкости и пара. По мере движения процесс вскипания продолжается, поэтому длина участков, заполненных жидкостью и получивших название жидкостных пробок, уменьшается, а длина полостей, заполненных паром (газовых снарядов), увеличивается. При этом существенно повышаются и скорости их движения.

Движение жидкостной пробки внутри криволинейного канала сопровождается действием на его стенку центробежной силы инерции $\vec{f}_ж^I$ (рис. 1) в направлении, противоположном ориентации главной нормали. Кроме того, поскольку каждый элемент жидкости участвует также в движении вместе с трубкой при её колебаниях, генерируются дополнительные силы взаимодействия жидкости и стенки трубки. Если жёсткость криволинейной трубки относительно мала, то её взаимодействие с движущейся жидкостной пробкой может привести к заметным динамическим эффектам. Бывают случаи, например, когда из-за вызванных этими эффектами вибраций в стенках трубки, контактирующей с элементами поддерживающих конструкций, протираются дыры (свищи).

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о динамике упругой трубчатой спирали, содержащей внутренние потоки неоднородной жидкости с учётом внешнего трения. Возникающие при движении жидкости силы вязкого трения оказываются сравнительно малыми, и поскольку они направлены вдоль осевой линии трубы, при исследовании её поперечных колебаний их можно не учитывать [7]. Для вычисления сил инерции, действующих на элементы трубчатой спирали, зададим закон движения жидкостных пробок и заполненных паром полостей в её канале, исходя из условия сохранения общего расхода пароводяной смеси на входе и выходе.

Сформируем модель изменения параметров потока при движении. Примем, что пробки длиной a_0 поступают в канал со скоростью V_0 . На входе зазор между двумя соседними пробками равен нулю. При движении жидкости в результате вскипания длина пробки изменяется по закону $a_1 = a_0 e^{-kt}$ и уменьшается со скоростью $\dot{a} = da_1 / dt = -ka_0 e^{-kt}$, где k – параметр, определяющий скорость испарения жидкости. С увеличением объёма пара длина полостей между пробками возрастает со скоростью $\dot{b} = db_1 / dt = cka_0 e^{-kt}$. Считается, что объём пара в полости в c раз превышает объём жидкости, из которой он образовался, поэтому между плотностями пара и жидкости выполняется соотношение $\rho_ж = c\rho_п$.

Вследствие увеличения объёма полости скорость V_{i+1} движения $(i+1)$ -й пробки возрастает по отношению к предыдущей пробке по закону $V_{i+1} = V_i(c-1)\dot{a}$. Принято, что скорость пара в полости между пробками распределяется линейно (рис. 2).

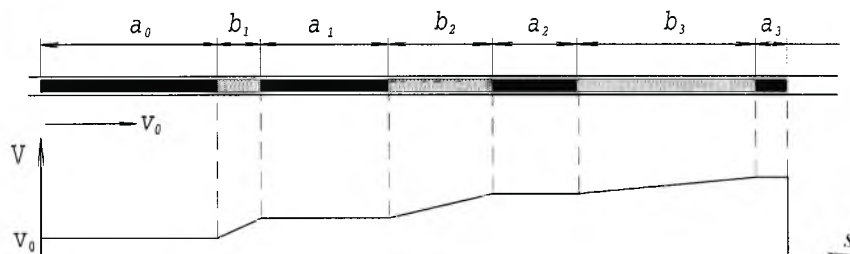


Рис. 2. Схема движения жидкостных пробок и изменения скорости движения элементов внутреннего потока.

Введём координату s , измеряемую длиной осевой линии от некоторой начальной точки до текущей, и подвижную правую систему координат u, v, w , связанную с поперечным сечением. Пусть начало этой системы расположено в центре тяжести площади поперечного сечения, оси u, v направлены вдоль главных центральных осей инерции площади поперечного сечения, а ось w – по касательной к упругой линии. Внешняя геометрия стержня определяет положение каждой его точки и всей упругой линии в неподвижной системе координат.

С упругой линией стержня свяжем естественный трёхгранник с ортами главной нормали \vec{n} , бинормали \vec{b} и касательной $\vec{\tau}$.

Опишем малые колебания трубчатого криволинейного стержня, возбуждаемые распределёнными силами \vec{f} , уравнениями динамики гибких криволинейных стержней [1, 8]:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{F}}{ds} + \vec{\omega}_\chi \times \vec{F} + \vec{f} = 0; \quad \frac{d\vec{M}}{ds} + \vec{\omega}_\chi \times \vec{M} + \vec{\tau} \times \vec{F} = 0; \quad \frac{d\vec{\tau}}{ds} = K\vec{n}; \\ \frac{d\vec{n}}{ds} = -K\vec{\tau} + \frac{1}{T}\vec{b}; \quad \frac{d\vec{b}}{ds} = -\frac{1}{T}\vec{n}; \quad \frac{d\vec{\rho}}{ds} = \vec{\tau}; \\ M_u = A(p - p_0); \quad M_v = B(q - q_0); \quad M_w = C(r - r_0), \end{aligned} \quad (1)$$

где \vec{F}, \vec{M} – векторы внутренних усилий и моментов с компонентами F_u, F_v, F_w и M_u, M_v, M_w соответственно; $\vec{\omega}_\chi$ – вектор Дарбу; T – радиус кручения; $\vec{\rho}$ – радиус-вектор точек осевой линии; A, B, C – параметры изгибной и крутильной жёсткости; p, q, r – кривизны и кручение осевой линии.

Роль вектора внешних сил \vec{f} в данном случае играет вектор сил инерции. Предположим, как это обычно делается при расчёте колебаний гибких конструкций в газовой (жидкой) среде [9], что внешнее воздействие,

связанное с препятствием среды перемещению элемента стержня, создаёт силу сопротивления, пропорциональную скорости перемещения и направленную в противоположную сторону. Тогда в проекции вектора силы инерции [1, 2], действующей на элемент змеевика с жидкостью \vec{f}^I , на оси подвижной системы координат $Oxyz$ добавятся слагаемые $(-\chi\dot{x}, -\chi\dot{y}, -\chi\dot{z})$:

$$\begin{cases} f_x^I = -(\rho_T + \rho_{ж})\ddot{x} - 2\rho_{ж}V_{ж}[\dot{t}_x(b_x^2 + n_x^2) + \dot{t}_y(b_x b_y + n_x n_y) + \\ \quad + \dot{t}_z(b_x b_z + n_x n_z)] - \rho_{ж}V_{ж}^2\sqrt{p^2 + q^2}n_x - \chi\dot{x}; \\ f_y^I = -(\rho_T + \rho_{ж})\ddot{y} - 2\rho_{ж}V_{ж}[\dot{t}_x(b_x b_y + n_x n_y) + \dot{t}_y(b_y^2 + n_y^2) + \\ \quad + \dot{t}_z(b_y b_z + n_y n_z)] - \rho_{ж}V_{ж}^2\sqrt{p^2 + q^2}n_y - \chi\dot{y}; \\ f_z^I = -(\rho_T + \rho_{ж})\ddot{z} - 2\rho_{ж}V_{ж}[\dot{t}_x(b_x b_z + n_x n_z) + \dot{t}_y(b_y b_z + n_y n_z) + \\ \quad + \dot{t}_z(b_z^2 + n_z^2)] - \rho_{ж}V_{ж}^2\sqrt{p^2 + q^2}n_z - \chi\dot{z}, \end{cases} \quad (2)$$

где χ – коэффициент внешнего сопротивления.

Отметим, что здесь $\rho_{ж}$ обозначает погонную плотность потока. В зависимости от того, какая фракция в данный момент времени находится в рассматриваемой точке канала трубки, – это может быть либо плотность жидкости, либо плотность пара.

Для построения уравнений малых колебаний необходимо уравнения (1) линеаризовать в окрестности исходного, ненапряжённого состояния. Представим линеаризованные уравнения в векторном виде

$$\begin{cases} \frac{\partial \Delta \vec{F}}{\partial s} = -\vec{\omega}_\chi \times \Delta \vec{F} - \vec{F} \times \Delta \vec{\omega}_\chi - \Delta \vec{f}; \\ \frac{\partial \Delta \vec{M}}{\partial s} = -\vec{\omega}_\chi \times \Delta \vec{M} - \vec{M} \times \Delta \vec{\omega}_\chi - \vec{\tau} \times \Delta \vec{F} - \vec{F} \times \Delta \vec{\tau}; \\ \frac{\partial \Delta \vec{\tau}}{\partial s} = \vec{n} \Delta K + K \Delta \vec{n}; \\ \frac{\partial \Delta \vec{n}}{\partial s} = -\vec{\tau} \Delta K - K \Delta \vec{\tau} - \vec{b} \frac{\Delta T}{T^2} + \frac{1}{T} \Delta \vec{b}; \\ \frac{\partial \Delta \vec{b}}{\partial s} = \vec{n} \frac{\Delta T}{T^2} - \frac{1}{T} \Delta \vec{n}; \\ \frac{\partial \Delta \vec{\rho}}{\partial s} = \Delta \vec{\tau}. \end{cases} \quad (3)$$

Для вычисления составляющих вектора интенсивности силы инерции, возникающей в месте расположения движущейся жидкостной (паровой) пробки, линеаризуем соотношения (2):

$$\left\{ \begin{aligned}
 \Delta f_x^I &= -(\rho_\tau + \rho_{\text{ж}})\Delta\ddot{x} - 2\rho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}[\Delta\dot{t}_x(b_x^2 + n_x^2) + \Delta\dot{t}_y(b_x b_y + n_x n_y) + \\
 &\quad + \Delta\dot{t}_z(b_x b_z + n_x n_z)] - \rho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}^2[n_x(p_0\Delta p + q_0\Delta q)/\sqrt{p_0^2 + q_0^2} + \\
 &\quad + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\Delta n_x + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}n_x] - \chi\Delta\dot{x}; \\
 \Delta f_y^I &= -(\rho_\tau + \rho_{\text{ж}})\Delta\ddot{y} - 2\rho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}[\Delta\dot{t}_x(b_x b_y + n_x n_y) + \Delta\dot{t}_y(b_y^2 + n_y^2) + \\
 &\quad + \Delta\dot{t}_z(b_y b_z + n_y n_z)] - \rho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}^2[n_y(p_0\Delta p + q_0\Delta q)/\sqrt{p_0^2 + q_0^2} + \\
 &\quad + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\Delta n_y + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}n_y] - \chi\Delta\dot{y}; \\
 \Delta f_z^I &= -(\rho_\tau + \rho_{\text{ж}})\Delta\ddot{z} - 2\rho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}[\Delta\dot{t}_x(b_x b_z + n_x n_z) + \Delta\dot{t}_y(b_y b_z + n_y n_z) + \\
 &\quad + \Delta\dot{t}_z(b_z^2 + n_z^2)] - \rho_{\text{ж}}V_{\text{ж}}^2[n_z(p_0\Delta p + q_0\Delta q)/\sqrt{p_0^2 + q_0^2}\Delta n_z + \\
 &\quad + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}\Delta n_z + \sqrt{p_0^2 + q_0^2}n_z] - \chi\Delta\dot{z}.
 \end{aligned} \right. \quad (4)$$

Система уравнений (3), (4) вместе с соответствующими граничными и начальными условиями определяет динамику криволинейного трубопровода, возбуждаемого внутренним неоднородным потоком. С её помощью можно анализировать и собственные колебания системы.

Численное решение системы уравнений (3), (4) с частными производными основано на применении для её интегрирования по времени отличающейся повышенной точностью неявной разностной схемы Хуболта [1]. С использованием последней строится шаговый процесс, на каждом этапе которого решается двухточечная краевая задача для обладающих тремя первыми интегралами уравнений 15-го порядка с независимой переменной s . Рассматриваемая система является жёсткой, поскольку некоторые коэффициенты имеют малые делители, равные квадратам шагов интегрирования по времени, и среди её частных решений отмечаются быстро возрастающие функции. Поэтому построение её решения осуществляется с использованием метода начальных параметров, метода дискретной ортогонализации и метода Рунге-Кутты четвёртого порядка.

Результаты исследований. Чтобы выделить эффект влияния диссипации энергии на характер возбуждения вынужденных колебаний, решены задачи без учёта внешнего трения ($\chi = 0$) и при его наличии ($\chi = 0,5$). Исследовали колебания двух типов стальных спиральных трубок теплообменника. Характеристики трубок первого типа таковы: число витков спирали $N = 5$; радиус цилиндрической поверхности винтовой спирали $R = 0,5$ м; параметры кривизны и кручения: $p_0 = 0$; $q_0 = 1,99$ м⁻¹; $r_0 = 0,14$ м⁻¹. Для трубок второго типа значения этих параметров составили: $N = 10$; $R = 0,1$ м; $p_0 = 0$; $q_0 = 9,95$ м⁻¹; $r_0 = 7,19$ м⁻¹. Для обоих типов трубок угол подъёма спирали $\alpha = 0,07214$ рад, наружный диаметр кольцевого сечения $d = 0,02$ м, толщина стенки $h = 0,003$ м, изгибные жёсткости $A = B = 1253$ Н·м², жёсткость при кручении $C = 955$ Н·м², погонная масса протекающей жидкости (воды) $\rho_{\text{ж}} = 0,154$ кг/м, погонная масса трубки $\rho_\tau = 1,25$ кг/м, $c = 10$.

**Значения критических скоростей жидкостных пробок на входе
в винтовую трубчатую спираль и периоды вынужденных колебаний спиралей
в критических случаях**

№ задачи	a_0	$k, \text{с}^{-1}$	$V_{0, \text{кр}}, \text{м/с}$	Спираль первого типа ($R = 0,5 \text{ м}; N = 5$)			№ задачи	$V_{0, \text{кр}}, \text{м/с}$	Спираль первого типа ($R = 0,1 \text{ м}; N = 10$)		
				$T_n, \text{с}$	$T_x, \text{с}$	$T_y, \text{с}$			$T_n, \text{с}$	$T_x, \text{с}$	$T_y, \text{с}$
1	S/8	0,5	3,8	0,518	0,284	0,518	5	17,6	0,0447	0,0224	0,0460
			4,5	0,437	0,219	0,324			33,5	0,0235	0,0276
2	S/8	1,0	2,7	0,729	0,364	0,361	6	16,9...17,0	0,0466	0,0252	0,0466
			4,9	0,402	0,326	0,135			29,7	0,0265	0,018
3	S/4	0,5	5,4...7,0	0,729	0,146	0,212	7	17,7	0,0889	0,0327	0,0360
			7,2	0,547	0,274	0,616			34,0	0,0463	0,0339
4	S/4	1,0	5,1...5,8	0,772	0,386	0,771	8	16,9...17,1	0,0931	0,0310	0,0465
			6,3	0,751	0,250	0,824			27,2	0,0579	0,0289

При выбранных значениях геометрических параметров трубчатого змеевика решены восемь задач без учёта диссипации энергии (таблица), которые отличаются значениями длины пробок на входе a_0 и величиной k . При этом $a_0 = S/8$ и $S/4$ (S – полная длина змеевика), а значение k выбиралось таким, чтобы за время движения в канале трубки длина жидкостной пробки успевала уменьшиться на 15...40%.

Численное исследование показало, что в зависимости от соотношений между длиной пробок и разделяющих их полостей, а также значения k динамическая потеря устойчивости может быть реализована как в виде колебаний, так и в виде дивергенции, когда перемещения элементов трубки монотонно возрастают. Результаты расчётов свидетельствуют, что с увеличением скорости пробок на входе в криволинейную трубку потеря устойчивости в виде колебаний реализуется вначале в некотором диапазоне изменения V_0 , затем они вновь становятся устойчивыми до второго критического значения $V_{0,2}$, после которого наступает окончательная колебательная (задачи № 1–4, 7, 8) либо дивергентная (задачи № 5–6) потеря устойчивости.

Для каждой из задач при фиксированном значении V_0 исследовалась динамика трубчатой спирали на временном отрезке, равном времени поступления 150 и более пробок.

Для найденных критических скоростей рассчитаны значения периодов T_{Π} поступления жидкостных пробок в канал змеевика (таблица), которые можно сопоставить со значениями условных периодов почти периодических колебаний системы вдоль осей Ox (T_x) и Oy (T_y).

Анализ результатов расчётов показал, что для задач № 1 ($V_{0, \text{кр}} = 3,8 \text{ м/с}$) и 6 ($V_{0, \text{кр}} = 16,9 \text{ м/с}$) условный период T_y колебаний упругой системы вдоль оси Oy равен периоду T_{Π} поступления в канал трубчатой спирали жидкостных пробок. Для задач № 4 ($V_{0, \text{кр}} = 5,1 \text{ м/с}$) и 5 ($V_{0, \text{кр}} = 17,6 \text{ м/с}$) условный период T_y равен периоду T_{Π} , а T_x кратен ему. Причём выполняется соотношение $T_y = 2T_x$. В задачах № 2 ($V_{0, \text{кр}} = 2,7 \text{ м/с}$) и 8 ($V_{0, \text{кр}} = 27,2 \text{ м/с}$)

условные периоды критических колебаний вдоль обеих осей T_x и T_y одновременно кратны периоду T_{II} . Для задач № 1 ($V_{0,кр} = 4,5$ м/с), 3 ($V_{0,кр} = 5,4$ м/с), 4 ($V_{0,кр} = 6,3$ м/с) и 8 ($V_{0,кр} = 16,9$ м/с) условный период колебаний T_x , а для задачи № 2 ($V_{0,кр} = 4,9$ м/с) T_y кратны периоду T_{II} .

На рис. 3 (задача № 6) изображены формы вынужденных колебаний во времени срединного сечения $s = S/2$ винтовой трубчатой спирали, содержащей внутренние неоднородные потоки вскипающей жидкости, вдоль оси Oy . Состояние потока (расположение пробок и скорости их движения при $V_{0,кр} = 16,9$ м/с и $V_{0,кр} = 29,7$ м/с) для момента времени, когда пробка, поступающая в канал со скоростью V_0 , достигает своей полной длины a_0 и начинает отделяться от основного потока в точке $s = 0$, показано на рис. 4.

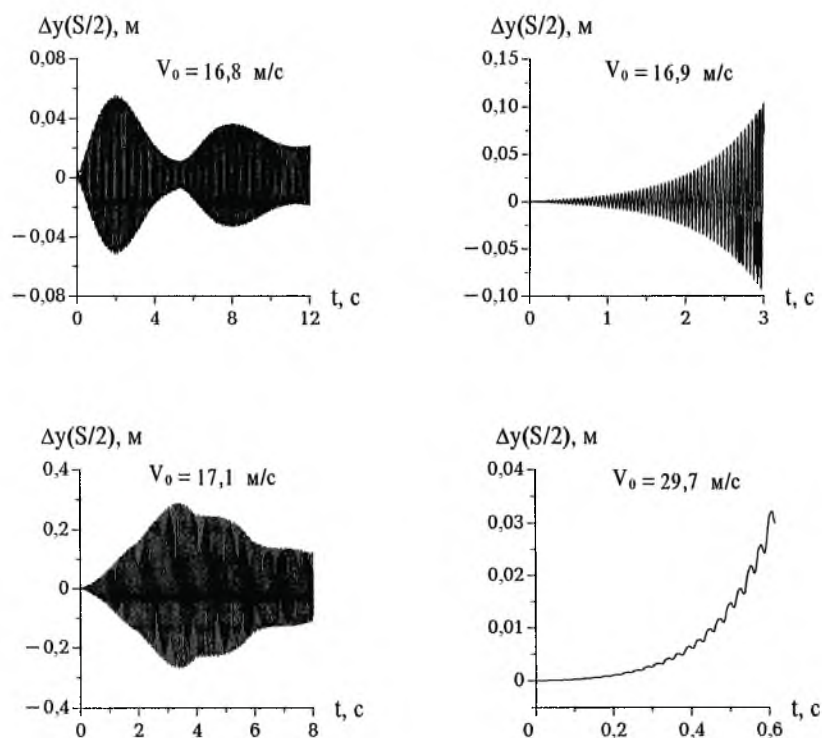


Рис. 3. Формы вынужденных колебаний во времени срединного сечения трубчатой спирали при различных значениях скоростей жидкостных пробок.

В этом случае в предкритическом состоянии ($V_0 = 16,8$ м/с) колебания трубчатой спирали имеют вид биений. После потери устойчивости при $V_{0,кр} = 16,9$ м/с установлена зона неустойчивых движений, которая длится до $V_{0,кр} = 17$ м/с. При значении $V_{0,кр} = 29,7$ м/с окончательная потеря устойчивости происходит в виде дивергенции.

Для задачи № 4 рассматривались колебания с учётом рассеяния энергии ($\chi = 0,5$). Отметим, что первая зона потери устойчивости не изменила своего значения и происходит в диапазоне $V_{0,кр} = 5,1...5,8$ м/с. Однако окончательная потеря устойчивости произошла при большем значении скорости, в данном случае она реализуется при $V_{0,кр} = 6,5$ м/с.

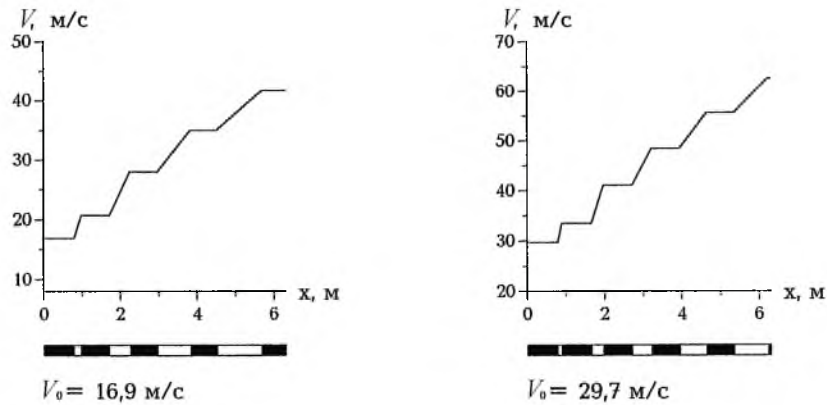


Рис. 4. Диаграммы распределения скоростей жидкостных пробок.

В заключение выделим ещё одну особенность, характерную для рассматриваемого динамического процесса. При возбуждении колебательных движений змеевика внутренними подвижными пробками происходит наложение двух механизмов динамического воздействия, каждый из которых имеет свою природу. Во-первых, отмечается чисто динамическое воздействие на змеевик центробежных сил инерции, которые в данном случае играют роль активных сил. Действием этих сил обусловлено наличие правой части в разрешающих уравнениях и их неоднородность. Во-вторых, проявляются эффекты, свойственные параметрическому механизму возбуждения колебаний. Действительно, поскольку динамическая система содержит подвижные массы, её инерционные параметры периодически изменяются, и это может стать дополнительным источником возбуждения колебаний. Динамическое воздействие параметрических эффектов связано с появлением в разрешающих уравнениях коэффициентов, периодически зависящих от времени.

Известно [10], что возбуждаемые этими двумя факторами резонансные колебания, т.е. обычные резонансы и параметрические резонансы, по-разному развиваются и протекают во времени. Если в первом случае амплитуды колебаний нарастают по линейному закону во времени, то во втором – по квадратичному. Как видно из полученных расчётов (рис. 3, $V_0 = 16,9 \text{ м/с}$), амплитуда колебаний при резонансе рассматриваемой системы нарастает нелинейно. Поэтому можно сделать вывод, что здесь преобладает механизм параметрического возбуждения колебаний.

Резюме

Поставлено задачу про чисельне дослідження динамічної поведінки спіральної труби, що містить внутрішні неоднорідні потоки закипаючої рідини. Запропоновано модель руху згустків рідини, що скорочуються, розділених порожнинами, які заповнено паром. Для заданої динамічної системи з геометрією мас, що змінюється, побудовано систему диференціальних рівнянь із розривними коефіцієнтами і правою частиною, що залежать від часу.

Описано методику їх чисельного розв'язку, що базується на використанні методів чисельного інтегрування за часом і методу початкових параметрів сумісно з процедурою ортогоналізації за часовою змінною. Відслідковано коливання системи при різноманітних параметрах неоднорідності потоку, його швидкості та параметра дисипації енергії. Виявлено можливість встановлення стійких і нестійких режимів руху, що залежать від характеру неоднорідності і швидкості руху рідинних згустків.

1. Гуляев В. И., Гайдайчук В. В., Кошкин В. Л. Упругое деформирование, устойчивость и колебания гибких криволинейных стержней. – Киев: Наук. думка, 1992. – 343 с.
2. Гуляев В. И., Толбатов Е. Ю. Предрезонансные и резонансные упругие колебания спиральных труб, взаимодействующих с внутренними подвижными жидкостными пробками // Прикл. механика. – 1999. – 35, № 1. – С. 85 – 91.
3. Гуляев В. И., Толбатов Е. Ю., Абдуллаев Ф. Я. Динамическая неустойчивость трубы с внутренними подвижными жидкостными пробками // Пробл. прочности. – 1999. – № 3. – С. 114 – 121.
4. Овчинников В. Ф., Смирнов Л. В. Динамические свойства трубопровода с движущейся жидкостью // Вопр. атомной науки и техники. Сер. Физика и техника ядерных реакторов. – 1981. – Вып. 6. – С. 6 – 16.
5. Тривайло П. М. Пространственные колебания винтовых спиралеобразных теплообменных трубок, возбуждаемых внутренним потоком теплоносителя // Пробл. прочности. – 1985. – № 11. – С. 83 – 91.
6. Nakamura M., Nagai J., Sakai E., and Aso K. Vibration of flexible tube induced by pulsatile flow of emulsions // Trans. Jap. Mech. Eng. – 1996. – 62, No. 599. – P. 2619 – 2625.
7. Benjamin T. B. Dynamics of a system of articulated pipes conveying fluid. I. Theory // Proc. Royal Society London, Ser. A. Math. and Phys. Sci. – 1961. – 261, No. 1307. – P. 457 – 486.
8. Светлицкий В. А. Механика стержней. Ч. 1. – М.: Высш. шк., 1987. – 320 с.
9. Баршаускене В. В., Палюнас В. А. О формах свободных изгибно-крутильных колебаний стержней в жидкости // Литовский механический сборник. – 1989. – № 31. – С. 73 – 79.
10. Пановко Я. Г., Губанова И. И. Устойчивость и колебания упругих систем. – М.: Наука, 1987. – 352 с.

Поступила 15. 10. 99